

## ACTIVIDADES

### 1. Página 10

La matriz consta de dos filas que corresponden a los alumnos y cuatro columnas con sus calificaciones. Así:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

### 2. Página 10

La matriz solución es  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

### 3. Página 10

La matriz solución es  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 4. Página 11

Como las dos matrices tienen la misma dimensión, los elementos de cada una tienen que ser iguales, es decir:

$$\begin{cases} a+1=3 \\ 2a+1=b+1 \\ 2=d-1 \\ c-2=2c \\ 3-a=1 \\ 6=b+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=-2 \\ d=3 \end{cases}$$

Así pues, las dos matrices son  $A=B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ .

### 5. Página 11

La matriz solución es  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 6. Página 12

La matriz solución es:  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$  Matriz triangular superior

**7. Página 12**

La respuesta es abierta, con la condición de que los elementos de la diagonal principal sumen 7 y el resto de elementos sea 0. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

**8. Página 12**

La respuesta es abierta, con la condición de que los elementos de la diagonal principal sean cero, y los demás no.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 11 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

**9. Página 12**

La matriz solución es:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$  Matriz triangular inferior

**10. Página 13**

La matriz solución es  $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

**11. Página 13**

Para la comprobación usaremos la notación  $A = (a_{ij})$ . Así pues:  $A^t = (a_{ij})^t = (a_{ji})^t = (a_{ij}) = A$

La igualdad  $(a_{ij})^t = (a_{ji})^t$  se verifica por la propiedad conmutativa de la suma.

Una matriz que cumpla estas condiciones puede ser, por ejemplo:  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

**12. Página 14**

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -10 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -16 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

**13. Página 14**

La matriz traspuesta de  $A$  es  $A^t = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ . Así pues:

$$A + A^t - I \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 11 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

## 14. Página 14

En primer lugar, calculamos  $B + C$ . Es decir:

$$B+C = \begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 & 9 & c+9 & b+4 \\ 3 & e & a+4 & d+6 \end{pmatrix}$$

Al tener las mismas dimensiones, hay que igualar los elementos de la matriz  $A$  con la matriz anterior. Es decir:

$$\begin{cases} a=2a-3 \\ b=9 \\ 7=c+9 \\ 8+d=b+4 \\ a=3 \\ 9=e \\ c+9=a+4 \\ e+2=d+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=9 \\ c=-2 \\ d=5 \\ e=9 \end{cases}$$

## 15. Página 15

$$\text{a) } 3A - B + 2C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } 2C + B - 3A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

## 16. Página 15

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 + 4 + 9 = 12$$

$$\text{c) } 2A \cdot 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = -6 + 24 + 54 = 72$$

$$\text{b) } B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } (-2B) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & -8 & -12 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}$$

## 17. Página 16

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 11 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

c)  $A^t \cdot B$  no se puede realizar, ya que el número de columnas de  $A^t$  no coincide con el número de filas de  $B$ .

## 18. Página 16

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & -55 & -13 \\ 13 & -20 & 13 \end{pmatrix}$$

## 19. Página 17

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 26 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{No son conmutables.}$$

$$b) A \cdot (B+C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 26 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

## 20. Página 17

Deberá comprar al proveedor que le salga más barato. Por ello, hay que calcular el coste total:

$$\text{El coste comprando al proveedor } M \text{ asciende a } (6,50 \quad 1,50) \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100000 \\ 550000 \\ 50000 \end{pmatrix} = 3\,175\,000 \text{ €.}$$

$$\text{El coste comprando al proveedor } N \text{ asciende a } (6,70 \quad 1,10) \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,5 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100000 \\ 550000 \\ 50000 \end{pmatrix} = 3\,150\,000 \text{ €.}$$

Por tanto, deberá comprar al proveedor  $N$ .

## 21. Página 18

El rango de la matriz  $A$  es 2, ya que no existen  $a, b$  y  $c$  tales que  $F_2 = a \cdot F_1$ ,  $F_3 = b \cdot F_1$  o  $F_3 = c \cdot F_2$  y, sin embargo,  $F_3 = F_1 + F_2$ .

El rango de la matriz  $B$  es 2, ya que no existen  $a, b$  y  $c$  tales que  $F_2 = a \cdot F_1$ ,  $F_3 = b \cdot F_1$  o  $F_3 = c \cdot F_2$  y sin embargo,  $F_3 = 2F_1 + F_2$ .

## 22. Página 18

El rango de  $A$  es 2, ya que no existe  $a$  tal que  $F_2 = a \cdot F_1$ .

El rango de  $B$  es 1, ya que  $F_3 = 3 \cdot F_1$  y  $F_2 = 2 \cdot F_1$ .

$$\text{El rango de } A \cdot B^t \text{ es 1, ya que } A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -7 & -14 & -21 \end{pmatrix}$$

y, además,  $F_2 = -F_1$ .

## 23. Página 19

El rango de la matriz  $A$  es 2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + 3F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz  $B$  es 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 7F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

## 24. Página 19

$$A^t \cdot B - C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -m+2 \end{pmatrix}$$

El rango está en función del parámetro  $m$ . Por el método de Gauss se tiene que  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -m+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -m+1 \end{pmatrix}$ .

Así pues, si  $m=1$ , entonces el rango de  $A^t \cdot B - C^t$  es 1, y si  $m \neq 1$ , entonces el rango es 2.

## 25. Página 20

a) Buscamos una matriz  $B$  tal que  $A \cdot B = I$  y  $B \cdot A = I$ . Si  $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ , tenemos que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & 3c+d \\ 2a+b & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \rightarrow \begin{cases} 3a+b=1 \\ 3c+d=0 \\ 2a+b=0 \\ 2c+d=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \\ d=3 \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que:  $B \cdot A = I \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

## 26. Página 20

Para ver si una matriz es invertible, podemos calcular el rango de dicha matriz.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Como el rango es 2, entonces la matriz es invertible.}$$

## 27. Página 20

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 28. Página 21

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para ver que hemos obtenido la inversa, basta con comprobar que  $I = A \cdot A^{-1}$ :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Para ver que hemos obtenido la inversa, basta con comprobar que  $I = B \cdot B^{-1}$ :

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 29. Página 21

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{array} \right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

## 30. Página 22

Despejando  $X$  en la ecuación, tenemos que  $X = A^{-1} \cdot B$ . Mediante el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

## 31. Página 22

Despejando  $X$  en la ecuación, tenemos que  $X = B \cdot A^{-1}$ . Mediante el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así pues:

$$X = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 32. Página 23

En primer lugar, despejamos  $X$ , es decir:  $A^t \cdot X - B = 0 \rightarrow A^t \cdot X = B \rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot B$

En segundo lugar, calculamos  $(A^t)^{-1}$ :

$$(A^t)^{-1} \rightarrow \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, multiplicamos y obtenemos que:

$$X = (A^t)^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

## 33. Página 23

Despejamos  $X$ , es decir,  $X \cdot A + A = 2A^2 \rightarrow X \cdot A = 2A^2 - A \rightarrow X = (2A^2 - A) \cdot A^{-1} \rightarrow X = 2A - I$ .

Así pues:

$$X = 2A - I \rightarrow X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

## SABER HACER

## 34. Página 24

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

## 35. Página 24

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 70 \\ 0 & -21 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 70 \\ 0 & -21 & 43 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = 7, \beta = -6$$

## 36. Página 25

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{101} = \begin{pmatrix} 1 & 101 & 101 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 37. Página 25

$$PM = (I - M) \cdot M = IM - M^2 = M - M = 0$$

$$MP = M \cdot (I - M) = MI - M^2 = M - M = 0$$

Así, resulta:  $PM = MP = 0$ .

## 38. Página 26

La matriz resultado es de dimensión  $1 \times 3$ , donde cada elemento representa lo que cuestan en total todos los productos en cada fábrica.

$$(25 \ 30 \ 60 \ 75) \cdot \begin{pmatrix} 34 & 40 & 46 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix} = (4435 \ 4435 \ 5680)$$

La primera y la segunda fábricas ofrecen el mismo precio por este pedido.

## 39. Página 26

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 2 \\ xy = -2 \\ y^2 = 4 \end{cases}$$

• Si  $y = 2$ , entonces  $x = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

• Si  $y = -2$ , entonces  $x = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

## 40. Página 27

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \\ 3 & 2-a & 3 & 3+a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2+F_1 \\ F_3=4F_3-3F_1}]{} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -18 & -13 \\ 0 & 11-4a & 18 & 9+4a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_2+F_3} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -18 & -13 \\ 0 & 4-4a & 0 & -4+4a \end{pmatrix}$$

• Si  $a = 1$ , entonces  $\text{Rango}(A) = 2$ .

• Si  $a \neq 1$ , entonces  $\text{Rango}(A) = 3$ .

## 41. Página 27

Para que la matriz sea invertible, es necesario que su rango sea máximo (en este caso 3).

$$\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{pmatrix}$$

Entonces, para los valores que anulan la diagonal principal ( $-1$  y  $2$ ) la matriz  $M$  no tiene rango 3. Por tanto, estos son los valores para los que  $M$  no tiene inversa.

## 42. Página 27

$$\left. \begin{aligned} 2X + Y = A^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix} \\ X - Y = A^{-1} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Sumando las dos ecuaciones, obtenemos:

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 14 & 30 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$Y = \begin{pmatrix} 2/3 & 7 \\ 14/3 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 & 4 \\ 8/3 & 11 \end{pmatrix}$$



## ACTIVIDADES FINALES

## 43. Página 28

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\text{a) } (1 \ 3) \quad (4 \ 15 \ 14)$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

## 44. Página 28

La matriz solución es  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 45. Página 28

Al tener las mismas dimensiones, hay que igualar los elementos de la matriz A con los de la matriz B:

$$\begin{cases} 1=1 \\ 2=2 \\ x+3=y \\ 3=3 \\ x=2y-5 \\ -4=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

## 46. Página 28

$$\text{a) } A+B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A-2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } 2A+3B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 12 & 6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 6 \\ 16 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

## 47. Página 28

$$\text{a) } (n \times m) \cdot (m \times p) \rightarrow (n \times p)$$

$$\text{d) } (p \times n) \cdot (n \times m) \rightarrow (p \times m)$$

$$\text{b) } (m \times n) \cdot (n \times p) \rightarrow (m \times p)$$

$$\text{e) } (m \times p) \cdot (p \times n) + (m \times n) \rightarrow (m \times n)$$

$$\text{c) } (m \times p) \cdot (p \times n) \rightarrow (m \times n)$$

$$\text{f) } (p \times m) \cdot (m \times n) - (p \times n) \rightarrow (p \times n)$$

## 48. Página 28

- a)  $2 \times 4$     b)  $3 \times 6$     c)  $3 \times 3$     d)  $6 \times 3$     e)  $4 \times 6$     f)  $4 \times 2$

## 49. Página 28

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B^t \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

## 50. Página 28

Para la comprobación usaremos la notación  $A = (a_{ij})$ . Así pues:  $(A^t)^t = [(a_{ij})^t]^t = (a_{ji})^t = (a_{ij}) = A$ .

## 51. Página 28

Para la comprobación usaremos la notación  $A = (a_{ij})$ . Así pues:  $A^t = (a_{ji})^t = (-a_{ji})^t = -(a_{ij})^t = -(a_{ij}) = -A$ .

La igualdad  $(a_{ij})^t = (-a_{ji})^t$  se verifica porque  $i - j = -(j - i)$ .

## 52. Página 28

$$\text{a) } AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -2 & 26 \\ -3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{c) } BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -16 & -19 \\ -5 & 16 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) No es posible.} \quad \text{d) } CB^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -22 \\ 2 & 3 \\ -15 & 8 \end{pmatrix}$$

## 53. Página 28

$$\text{a) } A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 & 14 \\ 76 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A \cdot C^t + B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & -5 \\ 23 & 3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -4 \\ 24 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } B^t \cdot A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 9 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 3 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } B \cdot C \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -11 \\ 13 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 & -74 \\ -16 & -40 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 9 & -5 \\ -25 & 3 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 10 \\ -24 & 0 & -15 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

## 54. Página 28

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

## 55. Página 28

Se quieren encontrar las matrices  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tales que  $A \cdot X = X \cdot A$ .

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \quad X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, obtenemos que:

$$\begin{cases} a+c=a \\ b+d=a+b \\ c=c \\ c+d=d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\alpha \\ b=\lambda \\ c=0 \\ d=\alpha \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

## 56. Página 28

Para que la matriz  $B$  conmute con la matriz  $A$  es necesario que dicha matriz sea cuadrada de dimensión 2.

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Como la matriz  $B$  tiene que ser triangular superior, entonces  $c = 0$ . Así pues,  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+3d \\ -a & -b+2d \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 3a+2b \\ -d & 2d \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases} a = a-b \\ -a = -d \\ b+3d = 3a+2b \\ -b+2d = 2d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = \lambda \end{cases} \quad \text{Como } a+d=2 \rightarrow \lambda+\lambda=2 \rightarrow \lambda=1.$$

Por tanto, la matriz buscada es  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 57. Página 28

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Sea  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . La matriz  $X$  tiene que verificar  $A \cdot X = X \cdot A$ . Entonces:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} \quad X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b & 2b \\ 3c-d & 2d \end{pmatrix}$$

Por tanto, igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases} 3a = 3a-b \\ 3b = 2b \\ -a+2c = 3c-d \\ -b+2d = 2d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = \alpha - \lambda \\ d = \alpha \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha - \lambda & \alpha \end{pmatrix}$$

## 58. Página 28

$$\text{Sea } P = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}:$$

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb & xb + ay \\ -ya - xb & -yb + xa \end{pmatrix} \quad C \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -bx - ay & -by + ax \end{pmatrix}$$

Así pues, las matrices  $C$  y  $P$  son siempre conmutables.

## 59. Página 28

Sean  $A \in M$  y  $B \in M$ :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc = \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = 1 \end{aligned}$$

## 60. Página 28

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t & -t \\ 2t & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Igualando los términos, se obtiene que  $t = -3$ .

## 61. Página 28

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + y^2 & x + yz \\ x + yz & x^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, tenemos que:

$$\begin{cases} 1 + y^2 = 5 \\ x + yz = 0 \\ x^2 + z^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (X_1, Y_1, Z_1) = (2, 2, -1) \\ (X_2, Y_2, Z_2) = (-2, 2, 1) \\ (X_3, Y_3, Z_3) = (2, -2, 1) \\ (X_4, Y_4, Z_4) = (-2, -2, -1) \end{cases}$$

## 62. Página 28

Realizando las operaciones e igualando cada término, tenemos que:

$$x^2 + 3 = 2 - 2x \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Como observación, el resto de ecuaciones no aporta información sobre la variable  $x$ .

Por consiguiente, si  $x = -1$ , se cumple la igualdad pedida.

## 63. Página 28

$$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - 1 & 2x & 1 - 2x \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2x & -5 \\ x & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow x = 3$$

Como observación, la solución  $x = -3$  no es válida ya que no se verificaría para el tercer elemento de la primera fila.

## 64. Página 28

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B \cdot \left[ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\lambda - 3)a - 6b = 0 \\ -2b = 0 \\ (\lambda - 3)c - 6d = 0 \\ -2d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\lambda - 3)a = 0 \\ b = 0 \\ (\lambda - 3)c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 3$$

$$\text{Así pues, } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

## 65. Página 29

Una matriz antisimétrica de orden 2 verifica que  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ . Así:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} \rightarrow A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:  $a^4 = 16 \rightarrow a = \pm\sqrt[4]{16} \rightarrow a = \pm 2$

## 66. Página 29

No se puede asegurar. Por ejemplo, si tomamos las siguientes matrices, su producto no es conmutativo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que conmute el producto es necesario y suficiente que la matriz  $A$  tenga su diagonal formada por el mismo número:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot I$$

Así, el producto de esta matriz  $A$  con otra matriz  $B$  será conmutativo.

## 67. Página 29

$$\text{Sea } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}:$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} \quad B \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = 2a+b \\ 2a+c = c+d \\ 2b+d = 2c+d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = \lambda \\ c = \lambda \\ d = 2\alpha \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \lambda & 2\alpha \end{pmatrix}$$

## 68. Página 29

$$M^2 - 2M = 3I \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Así, igualando los términos correspondientes, se tiene que:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a = 3 \\ 2ab - 2b = 0 \rightarrow 2b(a-1) = 0 \end{cases}$$

• Si  $b=0 \rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \rightarrow a_1 = 3, a_2 = -1$

• Si  $a=1 \rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \rightarrow 1 + b^2 - 2 = 3 \rightarrow b_1 = 2, b_2 = -2$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## 69. Página 29

$$\begin{aligned} X^2 - 4X + I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} m^2 - 4m + 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow m^2 - 4m + 1 = 1 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

## 70. Página 29

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 + B^2 = \left[ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 + \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 1+2x & 2x \\ 4 & 2x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 & 2x+2 \\ 6 & 2x+6 \end{pmatrix} \rightarrow x = 3.$$

## 71. Página 29

$$(A \cdot B)^t = \left[ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^t = \left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & -8 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^t \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

## 72. Página 29

$$\begin{aligned} (I + A)^3 &= mI + nA \rightarrow \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \right]^3 = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \left[ \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} \right]^3 &= m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17n+m & 29n \\ -10n & -17n+m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Igualando término a término, se tiene que  $m = -2$  y  $n = 2$ .

## 73. Página 29

$$A^2 + \alpha \cdot A + \beta \cdot I = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5+2\alpha+\beta & 4+\alpha \\ 4+\alpha & 5+2\alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

## 74. Página 29

La matriz  $B$  debe tener dimensión  $3 \times 2$  para que se pueda multiplicar con  $A$  y, además, para que tengamos como resultado una matriz  $2 \times 2$ .

Como la primera fila es  $(2 \ 0)$ , entonces  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2+2e & 2f \\ 4+c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando términos, se tiene que:

$$\begin{cases} -2+2e=0 \\ 2f=2 \\ 4+c=3 \\ d=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ d=1 \\ e=1 \\ f=1 \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 75. Página 29

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,  $A$  y  $B$  no cumplen la propiedad conmutativa para el producto.

## 76. Página 29

Debido a que la matriz  $A$  es antisimétrica, tenemos que  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ .

Así:

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -(a^2+b^2) & -bc & ac \\ -bc & -(a^2+c^2) & -ab \\ ac & -ab & -(b^2+c^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases} -(a^2+b^2) = -5 \\ -bc = -6 \\ ac = 3 \\ -(a^2+c^2) = -10 \\ -ab = -2 \\ -(b^2+c^2) = -13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a, b, c) = (1, 2, 3) \\ (a, b, c) = (-1, -2, -3) \end{cases}$$

Por tanto:  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

## 77. Página 29

$$\text{a) } (A+B)^2 = \left[ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -8 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ -8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 \\ (A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2 \end{cases} \rightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

Para que se verifique la igualdad, las matrices deben cumplir la propiedad conmutativa de la multiplicación.

## 78. Página 29

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2d & 2c+5d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 2d+5b & 0 \\ 5c+2a & 5d+2b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando cada término, se tiene que:

$$\begin{cases} 5a+2c=5a+2b \\ 2d+5b=2a+5b \\ 5c+2a=5c+2d \\ 5d+2b=2c+5d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\lambda \\ b=\alpha \\ c=\alpha \\ d=\lambda \end{cases}$$

Las matrices que conmutan son de la forma  $M = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Por otro lado:

$$a+d+1=5 \rightarrow \lambda+\lambda+1=5 \rightarrow 2\lambda=4 \rightarrow \lambda=2$$

La matriz que conmuta con la dada, cuyos elementos de la diagonal principal suman 5, y donde  $a_{11} = -a_{12}$ , está determinada por:

$$a+b=0 \rightarrow 2+\alpha=0 \rightarrow \alpha=-2 \rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 79. Página 29

$$X^2 = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & m+a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m^2=1 \rightarrow m=\pm 1 \\ m+a=0 \rightarrow m=-a \\ a^2=1 \rightarrow a=\pm 1 \\ s^2=1 \rightarrow s=\pm 1 \end{cases}$$

Así:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$



## 80. Página 29

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n-1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n-2+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \quad A^{41} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cdot 41 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 82 & 1 \end{pmatrix}$$

## 81. Página 29

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_n = I + A + A^2 + \dots + A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & -\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

## 82. Página 29

$$A^2 = 2A - I$$

$$A^3 = (2A - I)A = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A = 3A - 2I$$

$$A^4 = 4A - 3I$$

$$A^n = nA - (n-1)I$$

## 83. Página 29

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

## 84. Página 29

$$\text{a) } A \cdot B = B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a+b \\ b = b \\ a+c = c+d \\ b+d = d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \lambda \\ b = 0 \\ c = \alpha \\ d = \lambda \end{cases} \rightarrow B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

## 85. Página 29

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 0 & 2^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^4 & 0 & 2^4 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

## 86. Página 29

$$a) A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \quad M \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3a+2b \\ c & 3c+2d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+3c=a \\ b+3d=3a+2b \\ 2c=c \\ 2d=3c+2d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\lambda \\ b=3(\alpha-\lambda) \\ c=0 \\ d=\alpha \end{cases} \rightarrow M = \begin{pmatrix} \lambda & 3(\alpha-\lambda) \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}, \text{ donde } b_2 = 2 \cdot 3 + 3 = 2 \cdot b_1 + 3$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}, \text{ donde } b_3 = 2 \cdot 9 + 3 = 2 \cdot b_2 + 3$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 45 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_4 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}, \text{ donde } b_4 = 2 \cdot 21 + 3 = 2 \cdot b_3 + 3$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & b_n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \text{ donde } b_n = 2 \cdot b_{n-1} + 3$$

Además de expresar  $A^n$  recurrentemente, se puede escribir de la siguiente forma:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \sum_{i=1}^n 2^{i-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

## 87. Página 29

$$a) M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} \quad M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

$$b) M^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & 100a^{99}b \\ 0 & a^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a = \pm 1$$

$$\bullet \text{ Si } a=1 \rightarrow b = \frac{1}{100} \rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Si } a=-1 \rightarrow b = -\frac{1}{100} \rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 88. Página 30

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ m & -2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+n & m \\ m & -2m+n \end{pmatrix}$$

Así, igualando los términos:

$$\begin{cases} 2 = m+n \\ -1 = m \\ -1 = m \\ 5 = -2m+n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$b) A^2 = -A + 3I \rightarrow A^5 = (A^2)^2 \cdot A = (-A + 3I)(-A + 3I)A = (A^2 - 3A - 3A + 9I)A = \\ = ((-A + 3I) - 3A - 3A + 9I)A = (-7A + 12I)A = -7A^2 + 12A = -7(-A + 3I) + 12A = 19A - 21I$$

Por tanto:

$$A^5 = 19 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 21 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ -38 & -2 \end{pmatrix}$$

## 89. Página 30

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+2m & 8-6 \\ 4m-3m & 2m+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+2m & 2 \\ m & 2m+9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ m & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+2m & 2 \\ m & 2m+9 \end{pmatrix}$$

Así, igualando términos:

$$\begin{cases} 4 = 16 + 2m \\ m = m \\ 2 = 2 \\ -3 = 2m + 9 \end{cases} \rightarrow m = -6$$

$$c) \left[ \begin{pmatrix} 1 & m \\ n & 0 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 1+mn & m \\ n & mn \end{pmatrix} \rightarrow mn = 0$$

Las matrices son del tipo  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$  o bien  $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

90. Página 30

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \\
 B \cdot A &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \dots + b_{1n}a_{n1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \dots + b_{2n}a_{n2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \dots + b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

El primer elemento de la diagonal de la matriz  $BA$  se compone de todos los primeros sumandos de los elementos de la diagonal de la matriz  $AB$ .

El segundo elemento de la diagonal de la matriz  $BA$  se compone de todos los segundos sumandos de los elementos de la diagonal de la matriz  $AB$ , y así sucesivamente.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } Tr(AB) &= Tr \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = 7 + 15 = 22 & Tr(BA) &= Tr \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = a - 1 \\
 a - 1 &= 22 \rightarrow a = 23
 \end{aligned}$$

91. Página 30

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} & A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{b) } B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \rightarrow \text{Las matrices son del tipo } B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ o bien } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

92. Página 30

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 2.} \\
 \text{b) } \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_2 = 3F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 1.} \\
 \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 3.} \\
 \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 = 4F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 2.}
 \end{aligned}$$

## 93. Página 30

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 2.}$$

$$b) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = 4F_2 + F_1 \\ F_3 = 2F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 7F_3 + 9F_2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 2.}$$

$$c) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + 3F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 2.}$$

## 94. Página 30

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + 4F_1 \\ F_3 = F_3 + 3F_1 \\ F_4 = F_4 + 5F_1}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \\ 0 & -7 & -14 & -18 \\ 0 & -7 & -14 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = F_4 - F_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \\ 0 & -7 & -14 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 = 3F_3 - 7F_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & 28 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El rango es 3.}$$

## 95. Página 30

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 - 3a & 3 - a \end{pmatrix} \rightarrow 3 - a = 0 \rightarrow a = 3$$

Si  $a = 3$ , el rango de la matriz es 2.

## 96. Página 30

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_1 + 3F_2 \\ F_3 = F_1 - 3F_2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 7 & m \\ 0 & -2 & m - 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 7F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 0 & 7 & m \\ 0 & 0 & 9m - 126 \end{pmatrix}$$

$$9m - 126 = 0 \rightarrow m = 14$$

- Si  $m = 14$ , entonces  $\text{Rango}(A) = 2$ .
- Si  $m \neq 14$ , entonces  $\text{Rango}(A) = 3$ .

## 97. Página 30

$$\begin{pmatrix} a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \\ a & a+7 & a+8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 = C_2 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1}} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \\ a & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} a & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Es decir, el rango de la matriz siempre es 2, independientemente del valor del parámetro  $a$ .

## 98. Página 30

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} & m \end{pmatrix}$$

Las columnas 2 y 3 son linealmente dependientes con la columna 1:

$$C_2 = -\frac{1}{2}C_1 \quad C_3 = \frac{1}{4}C_1$$

Si  $C_4$ , linealmente dependiente con  $C_1 \rightarrow$  Rango = 1

En caso contrario  $\rightarrow$  Rango = 2

Esto es:

- $m = 12 \rightarrow C_4 = 2C_1 \rightarrow$  Todas las columnas son linealmente dependientes  $\rightarrow$  Rango = 1
- $m \neq 12 \rightarrow$  La primera y la segunda columna son linealmente independientes  $\rightarrow$  Rango = 2

## 99. Página 30

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su rango es independiente de  $n$  y siempre es 3.

## 100. Página 30

a) Para que  $A = \begin{pmatrix} d & a & a \\ b & d & 3 \\ c-4 & c & d \end{pmatrix}$  sea antisimétrica, se debe cumplir que:

$$\left. \begin{array}{l} a = -b \\ a = -(c-4) \\ 3 = -c \end{array} \right\} \rightarrow a = 7, b = -7, c = -3, d = 0. \text{ Así, } A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 \\ -7 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$b) A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 3 \\ -4 & 0 & d \end{pmatrix} \xrightarrow{4F_1 + dF_3} \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 3 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}$$

- Si  $d = 0 \rightarrow$  Rango (A) = 1
- Si  $d \neq 0 \rightarrow$  Rango (A) = 3

## 101. Página 30

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & 3 & -2 \\ a+2 & 0 & a \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & a & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=3F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -4 & 2+3a \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & a & 2a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4=(a+2)F_3-aF_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -4 & 2+3a \\ 0 & a+2 & a \\ 0 & 0 & a^2+4a \end{pmatrix}$$

$a^2 + 4a = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_2 = -4$ . Así, distinguimos dos casos:

• Si  $a \neq 0$  y  $a \neq -4 \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

• Si  $a = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

• Si  $a = -4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_2-2F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

El rango de A es 3 independientemente del valor de a.

## 102. Página 31

a)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1=F_1+5F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1=4F_2-F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

c)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_1-F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=-F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$   
 $\xrightarrow{F_1=F_1-F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$   
 $\xrightarrow{F_2=F_2-2F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1=2F_3-F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## 103. Página 31

a)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1=F_1+3F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left( \begin{array}{ccc|ccc} -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=3F_1+F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{4}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

b)  $(A \cdot B)^{-1}$ 

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} -6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = 6F_1 + F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{4}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Se cumple que  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 104. Página 31

$$\text{a) } \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = 2F_1 + 3F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 + 4F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = -\frac{1}{3}F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\text{b) } \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = 3F_2 - 4F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = -\frac{1}{3}F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array} \right)$$

Se puede comprobar que:

$$(A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = (A^t)^{-1}$$

## 105. Página 31

$$\text{a) } \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_1 + F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{2}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = 2F_1 - F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\text{b) } \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = -\frac{F_2}{2}} \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = 3F_2 - F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array} \right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estos resultados se cumplen para cualquier matriz invertible.



## 106. Página 31

$$A^{-1} = 2I - A \rightarrow AA^{-1} = A(2I - A) = 2A - A^2 = I$$

$$2 \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+cb & ab+c^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -cb & 2c-ab-c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow c=0, b=-\frac{1}{a}$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

## 107. Página 31

Buscamos una matriz de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 2a+c \\ b & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$

Así,  $M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , pero  $M$  no es invertible.

Por tanto, no son semejantes.

## 108. Página 31

$$a) A^2 - 3I = 2A \rightarrow A^2 - 2A = 3I \rightarrow A(A - 2I) = 3I \rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{3}(A - 2I)\right) = I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$$

$$b) \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2+y^2-3 & 2xy \\ 2xy & x^2+y^2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$2xy = 2y \rightarrow x=1 \text{ o bien } y=0$$

• Si  $x=1 \rightarrow x^2+y^2-3=2x \rightarrow 1+y^2-3=2 \rightarrow y=\pm 2$ . Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ o bien } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

• Si  $y=0 \rightarrow x^2+y^2-3=2x \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow x=-1, x=3$ . Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ o bien } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## 109. Página 31

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = BB^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

110. Página 31

$$a) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a-c & a \\ 2b-d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 2c+d \\ -a & -c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a-c=2a+b \\ a=2c+d \\ 2b-d=-a \\ b=-c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-2\lambda+\alpha \\ b=\lambda \\ c=-\lambda \\ d=\alpha \end{cases}$$

Las matrices que conmutan con A son de la forma  $\begin{pmatrix} -2\lambda+\alpha & -\lambda \\ \lambda & \alpha \end{pmatrix}$ .

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -(n-1) \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1+1 & -1 \\ -(-1) & -(-1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

111. Página 31

$$\left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{cF_1 - aF_2} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & cb-ad & c & -a \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = cF_1 - aF_2} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & cb-ad & c & -a \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{cb-ad}} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_1 = F_1 - bF_2} \left( \begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 - \frac{bc}{cb-ad} & \frac{ab}{cb-ad} \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = \frac{F_1}{a}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{cb-ad-bc}{a(cb-ad)} & \frac{ab}{a(cb-ad)} \\ 0 & 1 & \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-d}{cb-ad} & \frac{b}{cb-ad} \\ \frac{c}{cb-ad} & \frac{-a}{cb-ad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-cb} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Para que sea invertible se debe cumplir que  $cb-da \neq 0$ .

112. Página 31

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1/5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^3 \\ 0 & 1/5^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1/5^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/5^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par.} \\ \begin{pmatrix} 1/5^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5^n \\ 0 & 1/5^n & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

## 113. Página 31

$$A^2 + 7A = I \rightarrow A(A+7I) = I \quad A^{-1} = A+7I$$

## 114. Página 31

$$\text{a) } A^t = A^{-1} \rightarrow A^t A = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & \frac{1}{2}+b^2 & \frac{1}{2}+bc \\ ca & \frac{1}{2}+bc & \frac{1}{2}+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ c=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{b) Si } b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } c = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ entonces } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^4 = (A^2)^2 = I.$$

$$\text{Si } b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ entonces } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 115. Página 31

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

$$\text{b) } A \cdot A = 2I \rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot A = A^{-1} 2I \rightarrow \frac{1}{2} A = A^{-1} \rightarrow A^{-1} = A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A^2 = 2I \rightarrow A^{12} = (A^2)^6 = (2I)^6 = 2^6 I \quad A^{-1} = \frac{1}{2} A \rightarrow A^{-12} = (A^{-1})^{12} = \left(\frac{1}{2} A\right)^{12} = \left(\frac{1}{2^2} A^2\right)^6 = \left(\frac{1}{2^2} 2I\right)^6 = \frac{1}{2^6} I$$

## 116. Página 31

$$\text{a) } AX = B \rightarrow X = A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\text{b) } XA = B \rightarrow X = XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$\text{c) } AX + B = C \rightarrow AX = C - B \rightarrow X = A^{-1}AX = A^{-1}(C - B)$$

$$\text{d) } AX + A = B \rightarrow AX = B - A \rightarrow X = A^{-1}AX = A^{-1}(B - A) = A^{-1}B - I$$

$$\text{e) } A^{-1}X = B \rightarrow X = AA^{-1}X = AB$$

$$\text{f) } AXB = C \rightarrow X = A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$$

$$\text{g) } A^t X = B \rightarrow X = (A^t)^{-1} A^t X = (A^t)^{-1} B$$

$$\text{h) } AXA = A^2 + I \rightarrow X = A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}(A^2 + I)A^{-1} = (A^{-1}A^2 + A^{-1})A^{-1} = (A + A^{-1})A^{-1} = I + (A^{-1})^2$$

## 117. Página 31

$$\text{Si } X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \text{ se tiene que: } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+3 & c-1 \\ b+2 & d-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+3=1 \\ b+2=2 \\ c-1=-1 \\ d-5=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=12 \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Es una matriz diagonal.}$$

## 118. Página 31

Despejamos  $X$ , es decir,  $A+X=2B \rightarrow X=2B-A$ .

$$\text{Entonces: } X=2B-A \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 119. Página 31

$$2A-5X=B \rightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow 5 \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8/5 \\ 1/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

## 120. Página 32

Despejamos la matriz  $X$ .

$$A-A^2=A \cdot B-X \rightarrow -X=A-A^2-A \cdot B \rightarrow X=A^2-A+A \cdot B \rightarrow X=A \cdot (A-I+B)$$

Operamos la matriz para obtener la matriz pedida. En efecto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 121. Página 32

La matriz debe ser de orden  $2 \times 4$  para que se puedan realizar el producto y la suma correspondientes.

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, } X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 122. Página 32

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & c+1 \\ b+1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = b + c \\ b + 1 = a + d \\ c + 1 = d + a \\ d = c + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{3} \\ d = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

## 123. Página 32

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -a+2c \\ b & -b+2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ 2b & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-b & -a+3c-d \\ 3b & -b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3b=1 \\ -a+3c-d=-2 \\ -b+4d=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

## 124. Página 32

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

## 125. Página 32

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ -20 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

## 126. Página 32

$$(X-I)B=A \rightarrow (X-I)BB^{-1}=AB^{-1} \rightarrow X-I=AB^{-1} \rightarrow X=AB^{-1}+I \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -4 \\ 10 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

## 127. Página 32

$$\text{a) } AX - A^t = A \rightarrow AX = A + A^t \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(A + A^t) \rightarrow X = I + A^{-1}A^t$$

A debe tener inversa. Para ello, el rango de la matriz debe ser 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + 5F_1 \\ F_3 = F_3 + 4F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 12 & 1 + 5m \\ 0 & 11 & 1 + 4m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 12F_3 - 11F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 12 & 1 + 5m \\ 0 & 0 & 1 - 7m \end{pmatrix}$$

Si  $1 - 7m = 0$ , la matriz no tiene inversa. Es decir, para  $m \neq \frac{1}{7}$  la ecuación sí tiene solución.

$$\begin{aligned} \text{b) } X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ -29 & 25 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 128. Página 32

$$X + XA = B^t \rightarrow X(I + A) = B^t \rightarrow X = B^t(I + A)^{-1}$$

$$X \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 129. Página 32

$$\text{a) } \left( \begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = -F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 7F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\text{b) } AXA = A^2 + A \rightarrow X = A^{-1}(A^2 + A)A^{-1} = A^{-1}A(A + I)A^{-1} = (A + I)A^{-1} = I + A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$I + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

## 130. Página 32

$$XB + A = B + A^2 \rightarrow XB = B + A^2 - A \rightarrow XBB^{-1} = (B + A^2 - A)B^{-1} \rightarrow X = I + (A^2 - A)B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 131. Página 32

a) Sumando a la segunda ecuación la primera, resulta:  $3X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos Y.  $X - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = Y \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Restando a la primera ecuación la segunda, resulta:  $2Y = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos X.  $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) Sumando a la segunda ecuación dos veces la primera, resulta:  $7X = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos Y.  $3X + Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) Multiplicamos la primera ecuación por 3 y le restamos dos veces la segunda.

$$\left. \begin{array}{l} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 6X + 9Y = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \\ 6X - 4Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow 13Y = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{15}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos X:

$$2X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{15}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{20}{13} \\ \frac{32}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{10}{13} \\ \frac{16}{13} & -\frac{6}{13} \end{pmatrix}$$

## 132. Página 32

$$A^2 - AB + BA - B^2 = (A+B)A - (A+B)B = (A+B)(A-B)$$

$$(A+B)^{-1}(A+B)(A-B) = (A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Sumando las dos ecuaciones, resulta: } 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos B.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 133. Página 32

Hay que resolver este sistema:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y le restamos la segunda para obtener X:

$$\begin{cases} 4X + 2Y = \begin{pmatrix} 10 & 24 & 14 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos Y:

$$Y = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

## 134. Página 32

Restando a la primera ecuación la segunda, resulta:

$$BY = C - Y \rightarrow BY + Y = C \rightarrow (B + I)Y = C \rightarrow Y = (B + I)^{-1}C$$

$$Y = \left( \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos X:

$$AX = Y \rightarrow X = A^{-1}AX = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 135. Página 32

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4X + 2Y = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow 5X = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 20 & 10 & 20 \\ -10 & 30 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejando en la segunda ecuación, obtenemos Y:

$$2Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -10 \\ -16 & 2 & -16 \\ -2 & -24 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -8 & 1 & -8 \\ -1 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$



## 136. Página 32

$$a) \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 & 0 \\ -\mu & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_1+F_2} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{F_2}{3}} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1-F_2} \begin{pmatrix} \mu & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

• Si  $\mu=0 \rightarrow$  No existe inversa de A.

$$\bullet \text{ Si } \mu \neq 0 \xrightarrow{F_1=\frac{F_1}{\mu}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3\mu} & -\frac{1}{3\mu} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Así:

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\mu} & -\frac{1}{3\mu} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \mu = -2$$

$$b) \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\mu & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{10}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

## 137. Página 32

$$a) M^2 + 3M = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)^2 + 3\alpha + 3 & 0 \\ 3 + \alpha & -2 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha+1)^2 + 3\alpha + 3 = 0 \rightarrow (\alpha+1)[(\alpha+1)+3] = 0 \rightarrow \alpha = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

La matriz no es invertible cuando  $\alpha = -1$  o cuando  $\alpha = -4$ .

$$b) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$MX + M = 2I \rightarrow MX = 2I - M \rightarrow X = M^{-1}(2I - M) = 2M^{-1} - I \rightarrow X = 2M^{-1} - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

138. Página 33

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{cases} A^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^{3n+1} = A \\ A^{3n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$b) X \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X \cdot (A + A^2 - A) = X \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \frac{A^2}{1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

139. Página 33

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=2F_3+F_1}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si  $a=1$ , entonces  $\text{Rango}(A) = 2$ .
- Si  $a \neq 1$ , entonces  $\text{Rango}(A) = 3$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & a \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F'_3=F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & a+8 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$$

- Si  $a=-1$ , entonces  $\text{Rango}(B) = 2$ .
- Si  $a \neq -1$ , entonces  $\text{Rango}(B) = 3$ .

$$b) AX=B \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/4 & 7/2 & 1/4 & -3/2 \\ 5/2 & -3 & 1/2 & 2 \\ 5/2 & -3 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

140. Página 33

	Comida	Recibos
Septiembre	400 €	120 €
Octubre	500 €	180 €
Noviembre	350 €	250 €

$$A = \begin{pmatrix} 400 & 120 \\ 500 & 180 \\ 350 & 250 \end{pmatrix}$$

## 141. Página 33

Colocamos las líneas de autobuses  $A$ ,  $B$  y  $C$  por columnas, y los días *Lunes*, *Martes* y *Miércoles* por filas:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

## 142. Página 33

Matriz fila de costes por unidad:  $A = (32 \ 46 \ 71)$       Matriz fila de ventas por unidad:  $B = (53 \ 82 \ 140)$

Matriz fila de beneficios por unidad:  $C = B - A = (21 \ 36 \ 69)$

Matriz columna de unidades vendidas:  $D = \begin{pmatrix} 2100 \\ 1400 \\ 900 \end{pmatrix}$

Beneficio anual:  $B \cdot D - A \cdot D = (B - A) \cdot D = C \cdot D = (21 \ 36 \ 69) \cdot \begin{pmatrix} 2100 \\ 1400 \\ 900 \end{pmatrix} = 156600$

## 143. Página 33

a) Colocamos el tipo de habitación por filas (*Lujo*, *Doble*, *Individual*), y el hotel por columnas (*Edén*, *Paraíso*, *Spa*):

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 30 & 50 & 50 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

En la segunda matriz colocamos, por filas, el tipo de habitación (*Lujo*, *Doble*, *Individual*), y en la columna, el dinero en euros.

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } (120 \ 80 \ 50) \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 30 & 50 & 50 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{3620}^{\text{Edén}} & \overbrace{4980}^{\text{Paraíso}} & \overbrace{4880}^{\text{Spa}} \end{pmatrix}$$

## 144. Página 33

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overbrace{0,04}^{\text{D}} & \overbrace{0,96}^{\text{No D}} \\ 0,02 & 0,98 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,26 & 12,74 \\ 0,28 & 13,72 \end{pmatrix}$$

El número de tornillos planos no defectuosos es 12 740, y el de tornillos de estrella no defectuosos es 13 720.

## 145. Página 33

Las columnas representan los productos  $X$  e  $Y$ , y las filas representan las empresas  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

$$\text{Inicialmente, las empresas recibían: } M = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \end{pmatrix}$$

$$\text{Este mes las empresas han recibido: } N = \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 400 & 800 \\ 900 & 700 \end{pmatrix}$$

$$\text{Las disminuciones producidas son: } M - N = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 400 & 800 \\ 900 & 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 700 \\ 600 & 200 \\ 100 & 300 \end{pmatrix}$$

$$\text{Las disminuciones porcentuales son: } M - N = \begin{pmatrix} 40\% & 70\% \\ 60\% & 20\% \\ 10\% & 30\% \end{pmatrix}$$

## MATEMÁTICAS EN TU VIDA

## 1. Página 34

Solo es necesaria una arista que una los dos vértices, porque la representación en forma de grafo es independiente de la forma real de la carretera.

## 2. Página 34

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Es una matriz simétrica.}$$

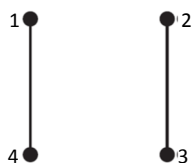
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Es una matriz simétrica.}$$

## 3. Página 34

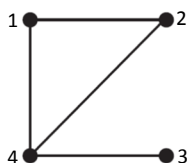
El número máximo de aristas es 4 porque, si se añadiese otra arista, el vértice pasaría por segunda vez por alguno de los vértices, y el camino no sería simple.

## 4. Página 34

a)



b)



**5. Página 34**

Calculamos la matriz de adyacencia y su potencia tercera:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{24} = 4 \rightarrow$  Hay 4 caminos de longitud 3 aristas.

