

## ACTIVIDADES

### 1. Página 36

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-4) - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2$$

$$\text{b) } |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 1 = 16$$

### 2. Página 36

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 2x \cdot 1 = -8 - 2x \rightarrow -2x - 8 = 0 \rightarrow x = -4$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & x & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot x \cdot 2 + (-2) \cdot (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \cdot 1 - (-3) \cdot x \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-5) \cdot 1 = 9x + 27 \rightarrow 9x + 27 = 0 \rightarrow x = -3$$

### 3. Página 37

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 7 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) = -57$$

$$\text{b) } |A| = |A^t| = -57$$

$$\text{c) } |2A| = 2^3 |A| = 8 \cdot (-57) = -456$$

$$\text{d) } |-A| = (-1)^3 |A| = -(-57) = 57$$

### 4. Página 37

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \rightarrow \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 5b & 5d \\ 3a & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10$$

### 5. Página 38

$$\begin{vmatrix} 3a & b+2a & c-a \\ 3d & e+2d & f-d \\ 3g & h+2g & i-g \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b+2a & c-a \\ d & e+2d & f-d \\ g & h+2g & i-g \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) = -6$$

6. Página 38

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F'_2 = F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F'_3 = F_3 + F_1 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F'_3 = F_3 + F_2 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F'_2 = F_2 - \frac{1}{4}F_1 \\ F'_3 = F_3 + \frac{1}{2}F_1 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. Página 39

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a & 3 & a \\ a & 5 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & 2 \\ a & a & 4 \\ a & a & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F'_3 = F_3 - F_2 \\ F'_2 = F_2 - F_1 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

8. Página 39

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-7) \cdot 10 + 8 \cdot 3 \cdot 1 = -466$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 4 = 10 \quad |A| \cdot |B| = -466 \cdot 10 = -4660$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -16 & 21 & 23 \\ 23 & 12 & -14 \\ 30 & 43 & 1 \end{vmatrix} = (-16) \cdot 12 \cdot 1 + 21 \cdot (-14) \cdot 30 + 23 \cdot 23 \cdot 43 - 23 \cdot 12 \cdot 30 - 21 \cdot 23 \cdot 1 - (-16) \cdot (-14) \cdot 43 = -4660$$

9. Página 40

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F'_2 = F_2 - 2F_1 \\ F'_3 = F_3 - 3F_1 \\ F'_4 = F_4 - 2F_1 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F''_3 = F'_3 - \frac{4}{3}F'_2 \\ F''_4 = F'_4 - F'_2 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F'''_4 = F''_4 + 6F''_3 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot 9 = -18$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F'_2 = F_2 - 2F_1 \\ F'_3 = F_3 - F_1 \\ F'_4 = F_4 - 3F_1 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F''_4 = F'_4 - \frac{2}{3}F'_2 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} \end{vmatrix} = 0$$

10. Página 40

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_3 \leftrightarrow F_4 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ a & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 - F_1 \\ F'_4 = F_4 - aF_1 \\ = \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1-a & -1-a & 1-2a \end{vmatrix} \begin{array}{l} F''_3 = F'_3 + 2F'_2 \\ F''_4 = F'_4 + (1+a)F'_2 \\ = \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -5-5a & 7+4a \end{vmatrix} \stackrel{F_4 = F_4 - \left(\frac{5+5a}{8}\right)F_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-8) \cdot (2-a)$$

Por tanto, el determinante será 0 si y solo si  $a = 2$ .

11. Página 41

a)  $\alpha_{21} = 3$                       b)  $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 18 = -4$

12. Página 41

a)  $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$                       b)  $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(8 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2)) = 4$

13. Página 42

a)  $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5A_{11} + (-4)A_{12} + 0A_{13} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5(3-2) + 4(-12) = -43$

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 10 - 48 = -43$$

b)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3A_{11} - 2A_{12} + 1A_{13} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= 3(8+6) + 2(4-6) + (-2-4) = 32$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 12 - 2 - 4 + 18 + 8 = 32$$

14. Página 42

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1A_{11} + (-1)A_{13} + 2A_{14} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} - (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= -43 - 21 - 2 \cdot 4 = -72$$

b)  $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)A_{11} + 2A_{21} + 7A_{41} =$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \\ -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 10 & 4 \\ -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} + 7(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 175 + 2 \cdot (-1)^3 \cdot (-287) + 7 \cdot (-1)^5 \cdot (-77) = 938$$

15. Página 43

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \stackrel{F_2=F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

16. Página 43

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 5 & 7 \\ 0 & 2 & a & 6 \\ 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

17. Página 44

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Y cada uno de los elementos de la matriz es un menor de orden 1.}$$

18. Página 44

a)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0$ ; por tanto, el rango de  $A$  es 2.

b)  $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$ ; por tanto, el rango de  $B$  es 2.

19. Página 45

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$  y  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3$

Por tanto, el rango de la matriz  $A$  es 2.

b)  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$ ,  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3$

Por tanto, el rango de la matriz  $B$  es 2.

20. Página 45

a)  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix} = m - 15 + 4 - 10 + 2m - 3 = 3m - 24 \rightarrow 3m - 24 = 0 \rightarrow m = 8$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 5m + 4 - 10 + 12 - m = -6m + 12 \rightarrow -6m + 12 = 0 \rightarrow m = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 5 & m & 6 \end{vmatrix} = 18 + 10m + 4m - 30 - 24 - m^2 = -m^2 + 14m - 36 \rightarrow -m^2 + 14m - 36 = 0 \rightarrow m = 7 \pm \sqrt{13}$

Ningún valor de  $m$  anula los tres menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de  $A$  es 3.

b)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m + m - 1 - 2 - m^2 = -m^2 + 3m - 2 \rightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = 1 \text{ y } m = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + m - 1 + m^2 - m^2(m-1) - 1 - m = -m^3 + 2m^2 + m - 2 \rightarrow -m^3 + 2m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = m + 2(m-1) + m - m(m-1) - 2 - m = -m^2 + 4m - 4 \rightarrow -m^2 + 4m - 4 = 0 \rightarrow m = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m-1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1+2m(m-1)+m-(m-1)-2-m^2 = m^2-2m \rightarrow m^2-2m=0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases}$$

Solo el valor  $m = 2$  anula los cuatro menores de orden 3 simultáneamente, luego el rango de  $B$  es 3 para todo valor  $m \neq 2$ , y para  $m = 2$ , el rango de  $B$  es 2.

21. Página 46

$$\text{a) Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) Adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) Adj}(C) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

22. Página 46

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -16 \\ 2 & -16 & 10 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 16 & -16 & 6 \\ -16 & 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 96 + 72 - 120 - 64 - 36 = -12 \quad A \cdot \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Página 47

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } |B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & -7 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{F_4 \leftrightarrow F_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -1 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -(4+3+6-16) = 3$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \\ 4 & -13 & 10 & -9 \\ -4 & 31 & -25 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -4 & -13 & 31 \\ 3 & 4 & 10 & -25 \\ -3 & -3 & -9 & 24 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & -4 & -13 & 31 \\ 3 & 4 & 10 & -25 \\ -3 & -3 & -9 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{31}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{25}{3} \\ -1 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

24. Página 47

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 \rightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=3 \end{cases} \rightarrow A \text{ es invertible si y solo si } m \neq 1 \text{ y } m \neq 3.$$

$$b) |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ m & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 - m^2 - 9m + 2m + 8 = -m^2 - 7m + 8 \rightarrow -m^2 - 7m + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-8 \end{cases} \rightarrow B \text{ es invertible si y solo si } m \neq 1 \text{ y } m \neq -8.$$

SABER HACER

25. Página 48

$$a) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^3 + 1 + 1 - (1+x) - (1+x) - (1+x) = x^3 + 3x^2 \rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 3 + 2(x-1) + 4 - 4x = x^2 - 2x - 1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = -2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

26. Página 48

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ a+d & b+e & c+f \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & e & f \end{vmatrix} \right) = \frac{2}{3} \cdot (2+0) = \frac{4}{3}$$

27. Página 49

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 9 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 9 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 9 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1 \\ \dots \\ F_n = F_n + F_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & \dots & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & \dots & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8 = -8^{n-1}$$

$$|A_n| = -8^{n-1} \rightarrow |A_6| = -8^{6-1} = -32768$$

28. Página 49

$$\begin{vmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m(m-1) + m^2(m-1) + m^2(m-1) - m^2(m-1) - m(m-1)^2 - m^2 = m^2 - 2m = m(m-2)$$

$$m(m-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases} \quad \text{Si } m \neq 0 \text{ y } m \neq 2, \text{ el rango de la matriz } A \text{ es } 3.$$

$$\text{Si } m = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ que tiene rango } 2.$$

$$\text{Si } m = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ que tiene rango } 2.$$

29. Página 50

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 3k - 9 + 9 = 3k - 9 \rightarrow 3k - 9 = 0 \rightarrow k = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 3k \rightarrow 9 + 3k = 0 \rightarrow k = -3$$

Como no hay ningún valor que anule simultáneamente todos los menores de orden 3, el rango de A es 3.

30. Página 50

$$|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = m(m-1)^2 + 1 - m - (m-1) = m^3 - 2m^2 - m + 2 \rightarrow m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Por tanto, A es invertible si y solo si  $m \neq -1$ ,  $m \neq 1$  y  $m \neq 2$ .

31. Página 50

Tomamos  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Vamos a calcular  $A^{-1}$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

32. Página 51

Consideramos  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$AX + B = C^2 \rightarrow AX = C^2 - B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C^2 - B) \rightarrow X = A^{-1}(C^2 - B)$$

$$|A| = -3 \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X = A^{-1}(C^2 - B) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 19 & -22 & -4 \\ -26 & 23 & -1 \\ -50 & 44 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



33. Página 51

$$AX + X = B \rightarrow AX + IX = B \rightarrow (A+I)X = B \rightarrow (A+I)^{-1}(A+I)X = (A+I)^{-1}B \rightarrow X = (A+I)^{-1}B$$

$$X = (A+I)^{-1}B = \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ -20 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES FINALES

34. Página 52

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \qquad |B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -11$$

$$A+B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A+B| = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow |A-B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -25$$

35. Página 52

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A \cdot B| = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -15 = |A| \cdot |B|$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow |B \cdot A| = \begin{vmatrix} 9 & 16 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -15 = |B| \cdot |A|$$

36. Página 52

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{c) } \begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix} = -3a - 2b \qquad \text{e) } \begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix} = a^2 - 7a$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{d) } \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{f) } \begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2$$

37. Página 52

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 4a + 6, 4a + 6 = 26 \rightarrow a = 5$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = -15b, -15b = 45 \rightarrow b = -3$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = c^2 - 12c + 4, c^2 - 12c + 4 = 32 \rightarrow c = -2 \text{ o } c = 14$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{14}{d}, \frac{14}{d} = 7 \rightarrow d = 2$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} \sqrt{e} & 2 \\ 2 & \sqrt{e-6} \end{vmatrix} = \sqrt{e^2 - 6e} - 4, \sqrt{e^2 - 6e} - 4 = 0 \rightarrow e = 8$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} \operatorname{sen} f & \operatorname{cos} f \\ \operatorname{cos} f & \operatorname{sen} f \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 f - \operatorname{cos}^2 f, \operatorname{sen}^2 f - \operatorname{cos}^2 f = -\frac{1}{2} \rightarrow f = \frac{1}{6}(6\pi n - \pi), n \in \mathbb{Z} \text{ o } f = \frac{1}{6}(6\pi n + \pi), n \in \mathbb{Z}$$

38. Página 52

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A+B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A+B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A-B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

39. Página 52

a)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

c)  $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$

e)  $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

b)  $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

d)  $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c$

f)  $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3 \cdot a \cdot b \cdot c$

40. Página 52

a)  $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 3a-4, 3a-4=2 \rightarrow a=2$

b)  $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2+5b-1, b^2+5b-1=5 \rightarrow b=-6 \text{ o } b=1$

c)  $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2+23c+3, c^2+23c+3=-197 \rightarrow \text{No tiene solución.}$

d)  $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -2d^3-d, -2d^3-d=-18 \rightarrow d=2$

41. Página 52

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} \quad (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+ad & ba+bd \\ ca+cd & da+d^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} \quad |A| = ad-bc$$

$$A^2 - (a+d) \cdot A + |A| \cdot I = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

42. Página 52

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

43. Página 52

a)  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11$ ,  $2|A| = 22$

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, |2A| = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 44 \rightarrow \text{No se cumple.}$$

b)  $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $|A+B| = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -15$

$$|A| = 11, |B| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -14, |A|+|B| = -3 \rightarrow \text{No se cumple.}$$

c)  $C-2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $|C-2B| = \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ -10 & 1 \end{vmatrix} = -100$

$$|B| = -14, |C| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 6, |C|-2|B| = 34 \rightarrow \text{No se cumple.}$$

d)  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -154$

$$|A| = 11, |B| = -14, |A| \cdot |B| = -154 \rightarrow \text{Se cumple por la propiedad 9.}$$

44. Página 52

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$|A^t| = |A| = -5$$

$$|2A| = 2^3 |A| = -40$$

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 25$$

$$\left| \frac{1}{2} A^3 \right| = \frac{1}{2^3} |A| \cdot |A| \cdot |A| = \frac{1}{8} (-5)^3 = -\frac{125}{8}$$

45. Página 52

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

a)  $F_3 + F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 2$

c)  $C_2 + 3C_1 + C_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 2$

b)  $C_3 + C_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2$

d)  $F_3 - F_1 - 2F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2$

## 46. Página 52

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2c - b + 2a$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{vmatrix} a+2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c+5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - b - 2c - 3$$

Por tanto, se cumple la igualdad: 
$$\begin{vmatrix} a+2 & 1 & -1 \\ b-3 & 0 & -2 \\ c+5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 0 & -2 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

## 47. Página 52

$$|A| = 3, |2A| = 48$$

$$2^n |A| = 48 \rightarrow 2^n \cdot 3 = 48 \rightarrow 2^n = 16 \rightarrow n = 4$$

La matriz  $A$  es de orden 4.

## 48. Página 52

$$|3A| = 54, n = 3$$

$$3^3 |A| = 54 \rightarrow |A| = 2$$

## 49. Página 52

a)  $|M^t| = 5$

Propiedad 1

b)  $|2M| = 2^2 |M| = 4 \cdot 5 = 20$

Propiedad 3

c)  $|5M| = 5^2 |M| = 25 \cdot 5 = 125$

Propiedad 3

d)  $|2M| = 2^3 |M| = 8 \cdot 5 = 40$

Propiedad 3

e)  $|5M| = 5^3 |M| = 125 \cdot 5 = 625$

Propiedad 3

f)  $|2M| = 2^4 |M| = 16 \cdot 5 = 80$

Propiedad 3

## 50. Página 53

a) Propiedad 3 – Propiedad 5 – Propiedad 2

b) Propiedad 5 ( $F_1 = F_1 - 10F_2$ )

c) Propiedad 5 ( $F_1 = F_1 - 10F_2$ ) y ( $F_2 = F_2 - 10F_3$ )

d) Propiedad 8 – Propiedad 6

51. Página 53

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{F_3=F_3+2F_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{C_3=100C_1+10C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 125 \\ 3 & 7 & 375 \\ 6 & 2 & 625 \end{vmatrix} = 25 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 15 \\ 6 & 2 & 25 \end{vmatrix} = 25$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 7 & -3 \\ 8 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1=C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & -2 & 7 & -3 \\ 6 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

52. Página 53

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$c) \begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1=C_1-C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$d) \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

53. Página 53

$$a) \begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$$

$$c) \begin{vmatrix} a-3b & b \\ c-3d & d \end{vmatrix} \stackrel{C_1=C_1+3C_3}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 8$$

$$b) \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$$

$$d) \begin{vmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{vmatrix} \stackrel{F_2=F_2-2F_1}{=} \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \stackrel{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -8$$

54. Página 53

$$\begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ 2g & 2i & 2h \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} d & f & e \\ g & i & h \\ a & c & b \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \stackrel{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} 2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \stackrel{F_2 \leftrightarrow F_3}{=} -2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2^3 \cdot \frac{1}{2} = -4$$

55. Página 53

$$|M^3| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = 6^3 = 216$$

$$|2M| = 2^{(\text{Orden de } M)} \cdot |M| = 6 \cdot 2^{(\text{Orden de } M)}$$

56. Página 53

$$a) \begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 3 = 45$$

$$b) \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} \stackrel{C_1=C_1-2C_3}{=} \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \stackrel{C_2=C_2-C_3}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3$$

57. Página 53

$$a) \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{d}{3} & \frac{e}{3} & \frac{f}{3} \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

$$b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} \stackrel{F_2=F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{vmatrix} \stackrel{F_3=F_3-F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$$

$$c) \begin{vmatrix} 2b & c+3a & \frac{a}{5} \\ 2e & f+3d & \frac{d}{5} \\ 2h & i+3g & \frac{g}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \begin{vmatrix} b & c+3a & a \\ e & f+3d & d \\ h & i+3g & g \end{vmatrix} \stackrel{C_2=C_2-3C_3}{=} \frac{2}{5} \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} \stackrel{C_1+C_3}{=} -\frac{2}{5} \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \stackrel{C_2=C_3}{=} \frac{2}{5} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{12}{5}$$

58. Página 53

$$a) C_3 = -2C_1 \quad b) F_3 = F_1 + F_2 \quad c) C_3 = \frac{1}{2}C_1 + C_2 \quad d) F_3 = 3F_2 - 2F_1$$

59. Página 53

$$a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \stackrel{F_2=F_2-F_1}{=} 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix} \stackrel{F_3=F_3+F_1}{=} 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

60. Página 53

$$\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ 3d & 3d & 3d \\ \frac{2}{a} & \frac{2}{b} & \frac{2}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & abc & abc \\ 3ad & 3bd & 3cd \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3ad & 3bd & 3cd \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El determinante es 0, ya que la primera y la tercera filas son linealmente dependientes.

61. Página 53

$$\begin{vmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 8 \rightarrow a \cdot b \cdot c = 8$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a+f & d-a & f \\ c+e & b & c+e \\ e & b & e \end{vmatrix} \stackrel{c_1=c_1-c_3}{=} \begin{vmatrix} a & d-a & f \\ 0 & b & c+e \\ 0 & b & e \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & c+e \\ b & e \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & c+e \\ 1 & e \end{vmatrix} \stackrel{r_1-r_2}{=} ab \begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & e \end{vmatrix} = ab(-c) = -8$$

$$\text{b) } abc = 8 \rightarrow a \cdot 1 \cdot 2 = 8 \rightarrow a = 4$$

62. Página 54

$$M^2 = \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & zy \\ zx & zy & -x^2 - y^2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 - y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & 1 - x^2 - z^2 & zy \\ zx & zy & 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rightarrow |P| = \begin{vmatrix} 1 - y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & 1 - x^2 - z^2 & zy \\ zx & zy & 1 - x^2 - y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ zx & zy & z^2 \end{vmatrix} = (x \cdot y \cdot z) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

63. Página 54

$|B| = |2 \cdot A^2| = 2^3 \cdot |A| \cdot |A| = 8 \cdot |A|^2 \rightarrow 8 \cdot |A|^2 = -32 \rightarrow |A|^2 = -4$  No puede ser; por tanto, no es posible que el valor del determinante de  $B$  sea  $-32$ .

64. Página 54

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 3x^2 - 7x + 6 = 2x \rightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} x & x+2 & x-1 \\ x & x+4 & x-3 \\ x & x+6 & x-6 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ x & 4 & -3 \\ x & 6 & -6 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow -2x = -10 \rightarrow x = 5$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2x & 4 & -2 \\ x & 2 & x \\ -1 & 3 & 2x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6x^2 - 10x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1-7x \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 1-7x \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

65. Página 54

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F_1=F_1-F_2 \\ F_2=F_2-F_3}}{=} \begin{vmatrix} x & -x & 0 \\ 0 & x & -x \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ -x & x & b \\ 0 & -x & x+c \end{vmatrix} \stackrel{F_3=F_1+F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ -x & x & b \\ 0 & 0 & x+a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ -x & x & b \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-3) \begin{vmatrix} x & 0 \\ -x & x \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-3)$$

$$x^2 \cdot (x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

66. Página 54

$$|M| = 3 \rightarrow |4M| = 4^2 |M| \xrightarrow{C_1 + C_2} -4^2 |M| \xrightarrow{\frac{1}{2} F_2} -4^2 \cdot \frac{1}{2} |M| = -24 = |P|$$

67. Página 54

$$|M| = 5 \rightarrow |3M| = 3^3 |M| \xrightarrow{F_1 + F_3} -3^3 |M| \xrightarrow{-2C_2} -3^3 \cdot (-2) |M| = 270 = |P|$$

68. Página 54

$$\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ b & a & b \\ 2a & 3a & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 = c_1 - c_3} \begin{vmatrix} a-b & a+b & b \\ 0 & a & b \\ a-b & 3a & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1 - F_2} \begin{vmatrix} a-b & a+b & b \\ 0 & a & b \\ 0 & a-b & a-b \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 = c_2 - c_3} \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

69. Página 54

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 + 6 - 84 - 9 = -80$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-39) + 7 = -80$$

70. Página 54

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 60 - 3 + 24 - 8 - 10 + 54 = 117$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 = C_2 - 6C_1 \\ C_3 = C_3 - 5C_1}} \begin{vmatrix} 3 & -17 & -13 \\ 2 & -8 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -17 & -13 \\ -8 & -13 \end{vmatrix} = 117$$

71. Página 54

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-8 + 10 - 24 - 24 + 20 + 4) - (-30 - 36 + 16 - 40 + 6 + 72) = 34$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8 - 24 - 20 + 30 - 16 - 8) - 3(8 - 24 - 16 + 24 - 16 + 8) - (8 - 20 + 8 - 16 + 8 - 10) = -92$$



72. Página 54

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F'_3=F_3+F_1 \\ F'_5=F_5+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{F'_4=F_4-F_2}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{F_3=2F_4}{=} 0$$

73. Página 54

$$\begin{vmatrix} -a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -a \end{vmatrix} \stackrel{C'_1=C_1-C_3}{=} \begin{vmatrix} -a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ a & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = (-a) \cdot \begin{vmatrix} -a & 1 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= -a(-a^3 + a + a) + a(-a - a) = a^4 - 4a^2$$

74. Página 54

$$\begin{vmatrix} 3a & a & a & a \\ a & 3a & a & a \\ a & a & 3a & a \\ a & a & a & 3a \end{vmatrix} = a^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C'_2=C_2-C_1 \\ C'_3=C_3-C_1 \\ C'_4=C_4-C_1}}{=} a^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= a^4 \cdot \left[ -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right] = a^4 [ -(-8) + 2(12 + 4 + 4) ] = 48a^4$$

75. Página 54

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & -27 & 64 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C'_2=C_2-C_1 \\ C'_3=C_3-C_1 \\ C'_4=C_4-C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 2-x & -3-x & 4-x \\ x^2 & 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ x^3 & 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -3-x & 4-x \\ 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ 8-x^3 & -27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)(-3-x)(4-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+2 & x-3 & x+4 \\ x^2+2x+4 & x^2-3x+9 & x^2+4x+16 \end{vmatrix}$$

Por tanto,  $x = 2$ ,  $x = -3$  y  $x = 4$  son soluciones de la ecuación.

Como todas las incógnitas están en la primera columna, esto quiere decir que la ecuación es de grado menor o igual que tres, luego las tres soluciones halladas son las únicas que tiene.

76. Página 54

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C'_1=C_1-C_4 \\ C'_2=C_2-C_4 \\ C'_3=C_3-C_4}}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x+1 & 1 \\ x-3 & x-3 & x-3 & 3 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ x-3 & x-3 & 3 \end{vmatrix} - (x-3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x+1 & 0 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+1)[3(x+1)^2 - (x+1)(x-3) - (x+1)(x-3)] - (x-3)[(x+1)^2] = 12x^2 + 24x + 12$$

$$12x^2 + 24x + 12 = 0 \rightarrow x = -1$$

77. Página 54

$$f(1) = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & -2 \\ -1 & 1-a & 2a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & -2 \\ -1 & 1-a & 2a \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_2=c_2+c_3}{=} \begin{vmatrix} 1+a & -1 & -2 \\ -1 & 1+a & 2a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2a \\ a & 1 \end{vmatrix} + (1+a) \begin{vmatrix} 1+a & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2a^2 + (1+a)(1+a+2a) = a^2 + 4a$$

$$a^2 + 4a = 5, \quad a^2 + 4a - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ a = 1 \end{cases} \rightarrow \text{El valor que buscamos es } a = -5.$$

78. Página 55

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$

b)  $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = 0$  y  $\begin{vmatrix} -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} = 1$

c)  $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3, \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$

d)  $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 3$

e)  $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 24 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 24 & 19 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

f)  $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -24 & 1 \end{vmatrix} = 78 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$

79. Página 55

a)  $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 3$

b)  $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 23 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

80. Página 55

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 3$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

81. Página 55

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 3$$

Una combinación sería, por ejemplo:  $C_4 = C_1 - C_2 + 2C_3$

82. Página 55

$$a) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a - 9, 2a^2 - 3a - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ a = 3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5a - 15, 5a - 15 = 0 \rightarrow a = 3$$

El rango es 3 excepto en el caso de que  $a = 3$ , que es 2.

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b - 4, 2b - 4 = 0 \text{ si } b = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ b+1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2b^2 + 2b - 4, 2b^2 + 2b - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

El rango es 3, pues no hay ningún valor de  $b$  que anule simultáneamente a todos los menores de orden 3.

83. Página 55

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} \stackrel{F_2=F_2+F_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{vmatrix} \stackrel{F_3=F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} < 3$$

Como  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$  tiene rango 2  $\rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e-b & f-c \\ 2a-d & 2b-e & 2c-f \end{pmatrix}$  tiene rango 2.

84. Página 55

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2(n-2) \quad B \rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 & n \\ m & m & 4 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2(n-2) \quad \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ m & m & 4 \\ 0 & m & n \end{vmatrix} = -m(n-2)^2$$

a) Una condición necesaria para que  $R(A)$  sea 2 es que  $m = 0$  o  $n = 2$ , pero en ambos casos  $R(B)$  no puede ser 3.

b) Si  $n = 2$  y  $m \neq 0 \rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m \end{vmatrix} = m^2 \neq 0$ ; por tanto, el rango de  $A$  es 2.

$$B = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 & 2 \\ m & m & 4 & 4 \\ 0 & m & 2 & 2 \end{vmatrix}, \text{ todos los menores de orden 3 son cero, } \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m \end{vmatrix} = m^2 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de } B \text{ es 2.}$$

c) Si  $n \neq 2$  y  $m \neq 0 \rightarrow$  Los menores de orden 3 son distintos de cero; por tanto, los rangos de  $A$  y  $B$  son 3.

85. Página 55

a)  $C_4 = 0$ ; por tanto, rango  $X < 4$

$$\begin{vmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0 \text{ si } b \neq 0 \rightarrow \text{Rango de } X = 3$$

Si  $b = 0 \rightarrow a \cdot d = 0 \rightarrow$  Si  $d = 0$ , el rango de  $X$  es 2, y si  $d \neq 0$ , el rango de  $X$  es 3.

b) Como el rango de la matriz  $A$  es 1, al menos uno de sus elementos es distinto de cero. Supongamos que  $c \neq 0$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ p & q & 0 & 0 \\ r & s & 0 & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 0 & d \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} - bc \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = 0, \text{ ya que } ad = bc,$$

$$\text{pues } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } Y < 4 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rango } Y = 3$$

c)  $F_3 = F_4 = 0 \rightarrow$  Rango  $Z < 3 \quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$  Rango  $Z = 2$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ p & 0 & 0 & q \\ r & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = 0 \rightarrow R(W) < 4 \quad \begin{vmatrix} c & d & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & s \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ p & 0 & q \\ r & 0 & s \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$$

Si  $b = d = 0 \rightarrow R(W) = 2$ , y si  $b \neq 0$  o  $d \neq 0 \rightarrow R(W) = 3$

86. Página 55

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & a+2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a + 1, \quad a^2 + 2a + 1 = 0 \rightarrow a = -1; \text{ por tanto, } |A| = 0 \rightarrow \text{Rango } A = 1$$

87. Página 55

$$A + tI = \begin{pmatrix} 2+t & 2 \\ 3 & 1+t \end{pmatrix} \quad |A + tI| = \begin{vmatrix} 2+t & 2 \\ 3 & 1+t \end{vmatrix} = t^2 + 3t - 4, \quad t^2 + 3t - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 1 \end{cases}$$

Por tanto, si  $t = -4$  o  $t = 1$  el rango de  $A + tI$  es 1.

88. Página 55

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a(a^5 - a^3 - a^2 + 1), a(a^5 - a^3 - a^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si  $a=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , el rango es 1.

Si  $a=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ , el rango es 2.

Si  $a=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , el rango es 2.

89. Página 55

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & a+1 \\ a+1 & a-1 & 2a \end{vmatrix}, C_3 = C_1 + C_2 \rightarrow \text{Rango } A < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a+1 & a-1 \end{vmatrix} = -a^2 - 1, -a^2 - 1 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a \rightarrow \text{Rango } A = 2$$

90. Página 55

a)  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$        $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -16a - 48, -16a - 48 = 0 \rightarrow a = -3$

Si  $a \neq -3 \rightarrow \text{Rango} = 3$

Si  $a = -3 \rightarrow \text{Rango} = 2$

b)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -6b^2 + 10b + 4, -6b^2 + 10b + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ b = 2 \end{cases}$$

Si  $b \neq 2$  y  $b \neq -\frac{1}{3} \rightarrow \text{Rango} = 3$       Si  $b = 2$  o  $b = -\frac{1}{3} \rightarrow \text{Rango} = 2$

c)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

Como  $C_1 = -C_4$ , todos los menores se pueden reducir a uno.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ c & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 3c, -6 + 3c = 0 \rightarrow c = 2$$

Si  $c \neq 2 \rightarrow \text{Rango} = 3$

Si  $c = 2 \rightarrow \text{Rango} = 2$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & -d & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ d & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9d^2 - 36d + 36, \quad 9d^2 - 36d + 36 = 0 \rightarrow d = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -d & -2 \\ -3 & 6 & 6 \\ d & -4 & -4 \end{vmatrix} = -6d^2 + 24d - 24, \quad -6d^2 + 24d - 24 = 0 \rightarrow d = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \\ d & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -d & 3 & -2 \\ 6 & -9 & 6 \\ -4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Si  $d \neq 2 \rightarrow$  Rango = 3    Si  $d = 2 \rightarrow$  Rango = 1, ya que todas las filas son proporcionales.

91. Página 55

$$a) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^3 - a, \quad a(a^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si  $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1 \rightarrow$  Rango = 3

$$\text{Si } a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$\text{Si } a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$\text{Si } a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$b) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 2a+1 & a+1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a, \quad a(a^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si  $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1 \rightarrow$  Rango = 3

$$\text{Si } a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$\text{Si } a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$\text{Si } a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4, \quad a^2 + 3a - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2a & a & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 4, \quad -a^2 - 4 = 0 \text{ no se cumple para ningún valor de } a.$$

El rango de la matriz es 3, ya que para cualquier valor de  $a$  existe un menor de orden 3 distinto de cero.

92. Página 56

$$a) \begin{vmatrix} m-2 & m+1 & -1 \\ m^3 & -1 & m+1 \\ m^4+1 & m & 2m+1 \end{vmatrix} = m^6 - 4m^4 - 2m^3 + 7m + 2$$

$$\begin{vmatrix} m-2 & m+1 & m \\ m^3 & -1 & m \\ m^4+1 & m & 7 \end{vmatrix} = m^6 + 3m^5 - 7m^4 - 8m^3 + 3m^2 - 5m + 14$$

$$\begin{vmatrix} m-2 & -1 & m \\ m^3 & m+1 & m \\ m^4+1 & 2m+1 & 7 \end{vmatrix} = -m^6 + m^4 + 5m^3 + 9m^2 - 7m - 14$$

$$\begin{vmatrix} m+1 & -1 & m \\ -1 & m+1 & m \\ m & 2m+1 & 7 \end{vmatrix} = -3m^3 + 12m, \quad -3m^3 + 12m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Estudiamos  $m=2$ , por ser el único valor de  $m$  que hace cero todos los menores de orden 3.

$$\text{Si } m \neq 2, \text{ Rango} = 3, \text{ y si } m = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 3 & 2 \\ 17 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$b) \begin{vmatrix} m & 1 & m+2 \\ -1 & -m & -1-2m \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 4 \\ -1 & -m & 2m+6 \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} = -m^3 - 4m^2 + m + 4, \quad -m^3 - 4m^2 + m + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m & m+2 & 4 \\ -1 & -1-2m & 2m+6 \\ 2 & 6 & m \end{vmatrix} = -2m^3 - 8m^2 + 2m + 8, \quad -2m^3 - 8m^2 + 2m + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m+2 & 4 \\ -m & -1-2m & 2m+6 \\ 2 & 6 & m \end{vmatrix} = m^3 + 4m^2 - m - 4, \quad m^3 + 4m^2 - m - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Si  $m \neq -1, m \neq 1$  o  $m \neq -4 \rightarrow \text{Rango} = 3$

$$\text{Si } m = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$\text{Si } m = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$\text{Si } m \neq -4 \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$c) \begin{vmatrix} a+3 & a-3 & a+1 \\ 2a-1 & 1 & a+1 \\ -1 & a & 2a+2 \end{vmatrix} = -3a^3 + 8a^2 + 15a + 4, -3a^3 + 8a^2 + 15a + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{1}{3} \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a+3 & a-3 & a+1 \\ 2a-1 & 1 & a-4 \\ -1 & a & a-2 \end{vmatrix} = -a^3 + 13a^2 + 3a - 11, -a^3 + 13a^2 + 3a - 11 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 7 - \sqrt{38} \\ a = 7 + \sqrt{38} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a+3 & a+1 & a+1 \\ 2a-1 & a+1 & a-4 \\ -1 & 2a+2 & a-2 \end{vmatrix} = a^3 + 11a^2 + 29a + 19, a^3 + 11a^2 + 29a + 19 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -5 - \sqrt{6} \\ a = -5 + \sqrt{6} \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a-3 & a+1 & a+1 \\ 1 & a+1 & a-4 \\ a & 2a+2 & a-2 \end{vmatrix} = -a^3 + 4a^2 - 9a - 14, -a^3 + 4a^2 - 9a - 14 = 0 \rightarrow a = -1$$

Estudiamos  $a = -1$ , ya que para cualquier otro valor de  $a$  existe un menor de orden 3 distinto de cero.

Si  $a \neq -1 \rightarrow \text{Rango} = 3$

$$\text{Si } a = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2.$$

93. Página 56

$$\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_i = c_i - c_4}{=} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_i = c_i - c_3}{=} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)^2 \begin{vmatrix} a+2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)^3, (a+1)^3 = 0 \rightarrow a = -1$$

$$\text{Si } a \neq -1 \rightarrow \text{Rango} = 4 \qquad \text{Si } a = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango} = 1$$

94. Página 56

$$a) |A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c) |C| = -20 \neq 0 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20} \end{pmatrix}$$

$$b) |B| = 1 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) |D| = 10 \neq 0 \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$



95. Página 56

a)  $|A^t| = |A| = 5$

d)  $|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| = \frac{4}{5}$

b)  $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$

e)  $|(BC)^{-1}| = \frac{1}{|BC|} = \frac{1}{|B| \cdot |C|} = \frac{1}{8}$

c)  $|AB| = |A| \cdot |B| = 20$

f)  $|C^{-1}B^t| = \frac{1}{|C|} \cdot |B^t| = \frac{1}{|C|} \cdot |B| = 2$

96. Página 56

$$|A| = 4, |B| = -4, B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 9 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A + B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{19}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 10 & 5 & -5 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

a)  $|A + B^{-1} \cdot A| = 0$

b)  $|A^3 \cdot B^{-1}| = |A^3| \cdot |B^{-1}| = |A|^3 \cdot \frac{1}{|B|} = -16$

97. Página 56

$A^2 = I \rightarrow |A^2| = |I| = 1 \rightarrow |A| \cdot |A| = 1 \rightarrow |A| = \pm 1 \neq 0 \rightarrow$  La matriz A es invertible.

$A^2 = A \cdot A = I \rightarrow A^{-1} = A \rightarrow (A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \rightarrow (A^{-1})^2 = I$

98. Página 56

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad -A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = -A - I \rightarrow I = -A - A^3 = A(-I - A^2) \rightarrow A^{-1} = -I - A^2 \quad A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

99. Página 56

$|M| = -a^2 + a, |M| = 0$  si  $-a^2 + a = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$ ; por tanto, la matriz M no tiene inversa para  $a=0$  y  $a=1$ .

Si  $a=2, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; |M| = -2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

100. Página 56

$|A| = -m - 1$ ,  $|A| = 0 \rightarrow -m - 1 = 0 \rightarrow m = -1 \rightarrow$  La matriz  $A$  es singular para  $m = -1$ .

$$\text{Si } m = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; |A| = -3 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

101. Página 56

a)  $A$  es invertible si y solo si  $|A| \neq 0$ ;  $|A| = a^2 - 2ab + b^2$ .

$|A| = 0 \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \rightarrow a = b \rightarrow A$  es invertible si y solo si  $a \neq b$ .

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; |A| = 4 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

102. Página 56

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

103. Página 56

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } Y = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

104. Página 56

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } Y = \left[ \begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -23 & 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

105. Página 56

$$a) Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 4 & 28 \\ -8 & 12 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

106. Página 56

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 35 & -23 & 9 \\ -2 & 10 & 6 \\ 15 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 12 \\ -1 & -4 & 17 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{76} \begin{pmatrix} 212 & -122 & -235 \\ -36 & 20 & 46 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -5 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$CD = BA^{-1}AB^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I \rightarrow C \text{ y } D \text{ son inversas, } C = D^{-1}.$$

107. Página 57

a) No existe matriz inversa si  $|A| = 0$ .

$$|A| = a^2 - 3, |A| = 0 \text{ si } a^2 - 3 = 0, \text{ es decir, si } a = \pm\sqrt{3}$$

Por tanto,  $A$  no tiene inversa si  $a = \pm\sqrt{3}$ .

$$b) a = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, |A| = 1 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } (A^t)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot (A^t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & 3 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$c) a = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, X = A^{-1} \cdot (A^t + A^2)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

108. Página 57

a) La ecuación  $AX - A^t = A$  tiene solución si existe  $A^{-1}$ , es decir, si  $|A| \neq 0$

$$|A| = 1 - 7m, \quad 1 - 7m = 0 \text{ si } m = \frac{1}{7}; \text{ por tanto, la ecuación tiene solución cuando } m \neq \frac{1}{7}.$$

b) Si  $m = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, |A| = 1 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & -11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \\ -29 & 25 & 8 \end{pmatrix}$$

109. Página 57

a) La ecuación  $AX + 2B = 3C$  tiene solución si existe  $A^{-1}$ , es decir, si  $|A| \neq 0$ .

$$|A| = m \rightarrow \text{La ecuación tiene solución si y solo si } m \neq 0.$$

b) Si  $m = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, |A| = 1 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

110. Página 57

a) A es invertible si  $|A| \neq 0, |A| = 2a - 1$ .

$$|A| = 0 \text{ si } 2a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}; \text{ por tanto, A es invertible si y solo si } a \neq \frac{1}{2}.$$

b)  $XA + A = A^t \rightarrow X = (A^t - A)A^{-1}$

Si  $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, A^t - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

111. Página 57

A no es invertible  $\rightarrow |A| = 0, |A| = x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n 2^{n-1} & 0 & (-1)^{n-1} 2^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ (-1)^{n-1} 2^{n-1} & 0 & (-1)^n 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

112. Página 57

a)  $A$  no es invertible si y solo si  $|A|=0$ .  $|A|=-3t^2+18t-16=0 \rightarrow t=3 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}$ .

b)  $t=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = (-I) \cdot A = -A$$

$$A^5 = -A \cdot A = -A^2$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = -A^2 \cdot A = -(-I) \cdot A = A$$

$$A^n = A^{(\text{Resto de la división } n:6)}, \text{ por ejemplo: } \frac{100}{6} = 16 + \frac{4}{6} \rightarrow A^{100} = A^4 = -A$$

113. Página 57

a)  $A$  es invertible si y solo si  $|A| \neq 0$ ,  $|A| = -m^3 + 4m$ .

$$|A|=0 \rightarrow -m^3+4m=0 \text{ si } m=0, m=2 \text{ o } m=-2; \text{ por tanto, } A \text{ es invertible si y solo si } m \neq 0 \text{ y } m \neq \pm 2.$$

b) Si  $m=1$ ,  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $|A|=3$

$$|6 \cdot A^{-1}| = 6^3 \cdot |A^{-1}| = 6^3 \cdot \frac{1}{|A|} \rightarrow |6 \cdot A^{-1}| = \frac{6^3}{3} = 72$$

c)  $m=1$ ,  $XA=B \rightarrow X=BA^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (3 \ 0 \ 3) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \ 3 \ 2)$$

114. Página 57

a)  $|A| = -8a^2 + 10a + 6$

$$B-I = \begin{pmatrix} a & 7 \\ a & a-2 \end{pmatrix}, (B-I)^t = \begin{pmatrix} a & a \\ 7 & a-2 \end{pmatrix}, |(B-I)^t| = \begin{vmatrix} a & a \\ 7 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 - 9a$$

$$|A| + |(B-I)^t| = 0 \rightarrow -8a^2 + 10a + 6 + a^2 - 9a = 0 \rightarrow -7a^2 + a + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{6}{7} \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la solución que buscamos es  $a = -\frac{6}{7} \notin \mathbb{Z}$ .

b) Si  $a=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $|A|=8 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{11}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$

115. Página 57

a)  $|A|=0 \rightarrow \text{Rango} < 3, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} = 2$

b)  $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$|B| = -m \rightarrow |B| = 0$  si  $m = 0$

Por tanto, si  $m \neq 0 \rightarrow |B| \neq 0$  y el rango es 3, pero si, en cambio,  $m = 0$ , el rango es 2.

c) B no es invertible si  $|B| = 0$ , es decir, si  $m = 0$ .

d) Si  $m = -1, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$B \cdot X \cdot B = A \rightarrow X = B^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} \quad X = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

116. Página 57

a) A tiene inversa si  $|A| \neq 0, |A| = a^2(a-1)$ .

$$|A| = 0 \rightarrow a^2(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Por tanto, A tiene inversa si y solo si  $a \neq 0$  y  $a \neq 1$ .

b) Si  $a = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, |A| = 18 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c)  $AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5a \\ 2a-2 & 0 \\ -a & -2a \end{pmatrix} \rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) & -a \\ 5a & 0 & -2a \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & 2(a-1) \\ 5a & 0 \end{vmatrix} = -10a(a-1), -10a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a & -a \\ 5a & -2a \end{vmatrix} = 3a^2, 3a^2 = 0 \rightarrow a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2(a-1) & -a \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a(a-1), -4a(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Si  $a = 0 \rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  tiene rango 1.

Si  $a = 1 \rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$  tiene rango 2.

117. Página 57

a)  $A$  es invertible si y solo si  $|A| \neq 0$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & 0 \\ -a & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} \stackrel{c_1=c_1+c_2}{=} \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a^3+1) = (a-1)(a+1)(a^2-a+1)$$

$$|A|=0, (a-1)(a+1)(a^2-a+1)=0 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

Por tanto,  $A$  es invertible si y solo si  $a \neq 1$  y  $a \neq -1$ .

b) Si  $a=0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c)  $X \cdot A = B \rightarrow X = BA^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

118. Página 57

a)  $|A| = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & 1 \\ a & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{c_1=c_1-c_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & a & a & a \\ 0 & a & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ a-1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -(a-1) \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{c_1=c_1-c_2}{=} -(a-1) \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & a & 1 \\ a-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= -(a-1)^2 \begin{vmatrix} a & a \\ a & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c_1=c_1-c_2}{=} -(a-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & a \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = a(a-1)^3$$

$$|A|=0, a(a-1)^3=0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Si  $a=0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } A < 4, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } A = 3$

Si  $a=1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } A < 4, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } A = 3$

Si  $a \neq 0$  y  $a \neq 1 \rightarrow R(A) = 4$

b)  $|A^{-1}| + |BB^t| = \frac{1}{|A|} + |BB^t|, |A| = 2$  para  $a=2$

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |B \cdot B^t| = 0 \rightarrow |A^{-1}| + |BB^t| = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

c)  $XA = B^t \rightarrow X = B^t A^{-1}$

$$a=2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -2 & -2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**119. Página 57**

a)  $|M| = 3 \rightarrow |M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = \frac{1}{3}$

b)  $|M| = 3 \rightarrow |aM| = a^4 |M| = 3a^4$

c)  $\text{Det}(2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4) = \text{Det}(2F_1, F_3, 7F_2, F_4) + \text{Det}(-F_4, F_3, 7F_2, F_4) = \text{Det}(2F_1, F_3, 7F_2, F_4) = 2 \cdot 7 \cdot \text{Det}(F_1, F_3, F_2, F_4) = -2 \cdot 7 \cdot \text{Det}(F_1, F_2, F_3, F_4) = -2 \cdot 7 \cdot 3 = -42$

**MATEMÁTICAS EN TU VIDA**

**1. Página 58**

Porque los lados de los triángulos son líneas rectas.

**2. Página 58**

La triangulación no es única, puede haber tantas triangulaciones diferentes como imaginemos.

**3. Página 58**

No, porque no hay un triángulo cuya superficie sea nula.

**4. Página 58**

Respuesta abierta, puede ser cualquiera. No obstante, se recomienda dibujar la figura irregular sobre la cuadrícula previamente dibujada, pues de esa manera haremos coincidir los vértices de la triangulación con puntos de coordenadas enteras.