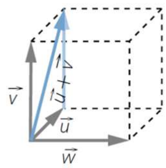
Vectores en el espacio

4

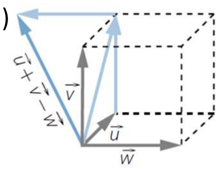
ACTIVIDADES

1. Página 86

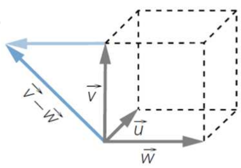
a)



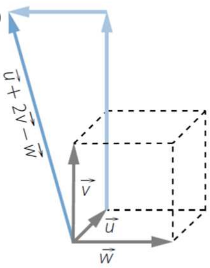
d)



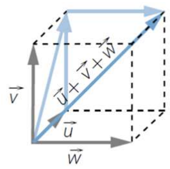
b)



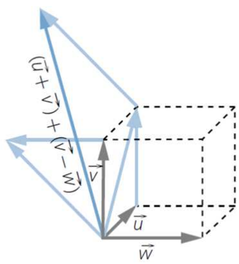
e)



c)



f)



2. Página 86

$-1\cdot\vec{v}=-\vec{v}=\text{Op}\left(\vec{v}\right)$

$\text{Op}\left(\text{Op}\left(\vec{u}\right)\right)=\text{Op}\left(-\vec{u}\right)=-\left(-\vec{u}\right)=\vec{u}$

3. Página 87

No necesariamente. Si son independientes dos a dos tienen distintas direcciones, pero la combinación lineal de dos de ellos puede dar como resultado el tercero de modo que considerados los tres a la vez sean dependientes.

Por ejemplo: (1, 2, 0), (–1, 0, 0) y (0, 1, 0).

4. Página 87

Buscamos dos valores λ_1 y λ_2 tales que $\vec{w}=\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}\rightarrow\vec{w}=(0,2,4)=\lambda_1(1,0,-2)+\lambda_2(2,1,-2)$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante:

$$\left.\begin{array}{l}0=\lambda_1+2\lambda_2\\2=\lambda_2\\4=-2\lambda_1-2\lambda_2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda_1=-2\lambda_2\\2=\lambda_2\\\lambda_1=-2-\lambda_2\end{array}\right\}\rightarrow\lambda_1=-4,\lambda_2=2\rightarrow\vec{w}=-4\vec{u}+2\vec{v}$$

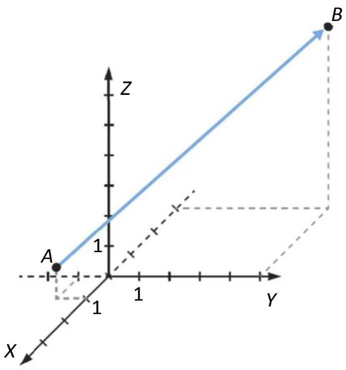
5. Página 88

a) $\left.\begin{array}{l} A=(1,-1,1) \\ B=(-3,5,6) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB}=(-4,6,5)$

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(-4,6,5)$.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+6^2+5^2}=\sqrt{77}$.

El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es $\sqrt{77}$.

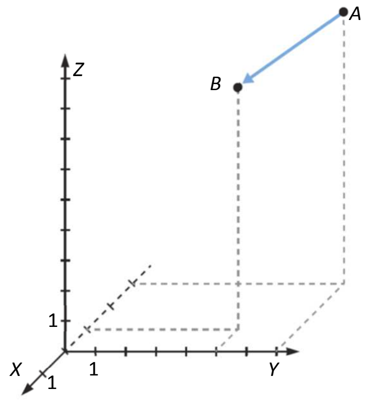


b) $\left.\begin{array}{l} A=(-3,7,9) \\ B=(-1,5,8) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son $(2,-2,-1)$.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

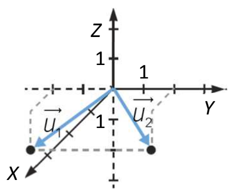
El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3.



6. Página 88

Escribimos la definición de módulo del vector y la condición dada.

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}|=\sqrt{1^2+m^2+(-2)^2}=\sqrt{5+m^2} \\ |\vec{u}|=3=\sqrt{9} \end{array}\right\} 5+m^2=9 \rightarrow m^2=4 \rightarrow m=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \rightarrow \vec{u}_1=(1,-2,-2), \vec{u}_2=(1,2,-2)$$



7. Página 89

a) $\vec{u}+\vec{v}=(-3,2,1)+(0,2,3)=(-3,4,4)$

b) $\vec{v}-\vec{w}=(0,2,3)-(-1,5,-2)=(1,-3,5)$

c) $-\vec{u}-\vec{w}=-(-3,2,1)-(-1,5,-2)=(4,-7,1)$

d) $2\vec{u}+3\vec{v}=(-6,4,2)+(0,6,9)=(-6,10,11)$

e) $3\vec{v}-\vec{w}=(0,6,9)-(-1,5,-2)=(1,1,11)$

f) $4\vec{u}-3\vec{w}=(-12,8,4)-(-3,15,-6)=(-9,-7,10)$

8. Página 89

Calculamos los vectores que necesitamos a partir de las coordenadas de los puntos.

$\overrightarrow{AB}=(-3,1,-2)$ $\overrightarrow{BC}=(5,-3,-3)$ $\overrightarrow{AC}=(2,-2,-5)$ $\overrightarrow{CB}=(-5,3,3)$ $\overrightarrow{BA}=(3,-1,2)$

a) $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=(-3,1,-2)-(10,-6,-6)=(-13,7,4)$

b) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{CB}=(-6,2,-4)-(2,-2,-5)-(-15,9,9)=(7,-5,-8)$

c) $2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}=(10,-6,-6)-(6,-6,-15)=(4,0,9)$

d) $-\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BA}\right)=-(2,-2,-5)-(1,1,7)=(-3,1,-2)$

9. Página 90

a) $M=\left(\frac{2-4}{2},\frac{-1+3}{2},\frac{0+6}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{2}{2},\frac{6}{2}\right)=(-1,1,3)$

b) $M=\left(\frac{-3+1}{2},\frac{-1+5}{2},\frac{2-4}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{4}{2},\frac{-2}{2}\right)=(-1,2,-1)$

10. Página 90

a) $\left(\frac{-3+b_1}{2},\frac{-2+b_2}{2},\frac{0+b_3}{2}\right)=(1,2,-1)\rightarrow\left.\begin{matrix}-3+b_1=2\\-2+b_2=4\\0+b_3=-2\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}b_1=5\\b_2=6\\b_3=-2\end{matrix}\right.\rightarrow B(5,6,-2)$

b) $\left(\frac{a_1+1}{2},\frac{a_2+0}{2},\frac{a_3+3}{2}\right)=\left(3,\frac{1}{2},-1\right)\rightarrow\left.\begin{matrix}a_1+1=6\\a_2+0=1\\a_3+3=-2\end{matrix}\right\}\rightarrow\left\{\begin{matrix}a_1=5\\a_2=1\\a_3=-5\end{matrix}\right.\rightarrow A(5,1,-5)$

11. Página 91

$\begin{vmatrix}2&2&1\\-1&3&5\\0&3&-3\end{vmatrix}=-57\neq0\rightarrow\text{Rango}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&3&5\\0&3&-3\end{pmatrix}=3$ $\rightarrow$ Los 3 vectores son independientes.

12. Página 91

$\overrightarrow{AB}=(-2,1,-1)$ $\overrightarrow{AC}=(4,-2,2)$ $\text{Rango}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\4&-2&2\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=1$

Como el rango no coincide con el número de vectores, los vectores son linealmente dependientes y los puntos están alineados.

13. Página 92

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,-1,1)\cdot(-4,2,-2)=\sqrt{6}\cdot2\sqrt{6}\cdot(-1)=-12$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2,3,2)\cdot(1,2,-2)=\sqrt{17}\cdot3\cdot0=0$

14. **Página 92**

a) $$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|Proy_{\vec{u}}\vec{v}|\end{array}\right\}\rightarrow|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot|Proy_{\vec{u}}\vec{v}|\rightarrow\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{2}\cdot|Proy_{\vec{u}}\vec{v}|\rightarrow|Proy_{\vec{u}}\vec{v}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot|Proy_{\vec{v}}\vec{u}|\end{array}\right\}\rightarrow|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{v}|\cdot|Proy_{\vec{v}}\vec{u}|\rightarrow\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{2}\cdot|Proy_{\vec{v}}\vec{u}|\rightarrow|Proy_{\vec{v}}\vec{u}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

15. **Página 93**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3,1,-1)\cdot(0,2,-2)=4$

b) $\vec{u}\cdot\vec{w}=(-3,1,-1)\cdot(-1,3,-5)=11$

c) $-\vec{v}\cdot\vec{w}=(0,-2,2)\cdot(-1,3,-5)=-16$

d) $\vec{v}\cdot 2\vec{w}=(0,2,-2)\cdot(-2,6,-10)=32$

e) $2\vec{u}\cdot 3\vec{v}=(-6,2,-2)\cdot(0,6,-6)=24$

f) $(\vec{u}-\vec{w})\cdot 2\vec{v}=(-2,-2,4)\cdot(0,4,-4)=-24$

16. **Página 93**

a) $$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,2,3)\cdot(2,-1,m+2)=3m+2\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=5\end{array}\right\}\rightarrow 3m+2=5\rightarrow m=\frac{5-2}{3}=1$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,2,3)\cdot(2,-1,m+2)=3m+2\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=3\end{array}\right\}\rightarrow 3m+2=3\rightarrow m=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\vec{v}\cdot\vec{u}=(2,-1,m+2)\cdot(-1,2,3)=3m+2\\ \vec{v}\cdot\vec{u}=3\end{array}\right\}\rightarrow 3m+2=3\rightarrow m=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

d) $$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,2,3)\cdot(2,-1,m+2)=3m+2\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=1\end{array}\right\}\rightarrow 3m+2=1\rightarrow m=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$$

e) $$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,2,3)\cdot(2,-1,m+2)=3m+2\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\end{array}\right\}\rightarrow 3m+2=0\rightarrow m=\frac{0-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

f) $\vec{u}\perp\vec{v}$ si el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\ \rightarrow\ m=-\frac{2}{3}$

17. **Página 94**

a) $$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(3,-1,1)\cdot(-1,2,4)}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{21}}=-\frac{\sqrt{231}}{231}\rightarrow\alpha=\arccos\left(-\frac{\sqrt{231}}{231}\right)=93,773^{\circ}$$

b) $$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(4,-3,2)\cdot(2,-1,-1)}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{174}}{58}\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{3\sqrt{174}}{58}\right)=46,977^{\circ}$$

18. **Página 94**

a) $$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,-3,2)\cdot(m,-m+2,6)=3m+6\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\end{array}\right\}\rightarrow 3m+6=0\rightarrow m=-2$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,m,1)\cdot(-2,1,m+1)=2m+3\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\end{array}\right\}2m+3=0\rightarrow m=-\frac{3}{2}$$

19. Página 95

$$Proy_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u} = \frac{(4,-1,2)\cdot(-1,0,1)}{\sqrt{21}}(4,-1,2) = -\frac{2\sqrt{21}}{21}(4,-1,2)$$

20. Página 95

a) Escribimos la condición de perpendicularidad para un vector genérico (v_1,v_2,v_3).

$$u \perp (v_1,v_2,v_3) \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow (0,1,-2)\cdot(v_1,v_2,v_3) = v_2 - 2v_3 = 0$$

Resolvemos la ecuación despejando una incógnita en función de la otra.

$$v_2 - 2v_3 = 0 \rightarrow v_2 = 2v_3 \rightarrow v_3 = \lambda, v_2 = 2\lambda, v_1 = \mu$$

$$(v_1,v_2,v_3) = (\mu, 2\lambda, \lambda) = (0, 2\lambda, \lambda) + (\mu, 0, 0) = \lambda(0, 2, 1) + \mu(1, 0, 0)$$

Por ejemplo: $(1,0,0)$ y $(0,2,1)$ son vectores perpendiculares a $\vec{u} = (0,1,-2)$.

21. Página 96

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\alpha = \sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot sen\,30° = \sqrt{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

22. Página 96

Si dos vectores son perpendiculares forman un ángulo de $90° \rightarrow |\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,90° = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 1 = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$.

El producto vectorial de dos vectores perpendiculares es igual al producto de los módulos de los vectores.

23. Página 96

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

a) $$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2)$$

$$-\vec{v}\times\vec{u} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -(v_2u_3 - u_2v_3, v_3u_1 - u_3v_1, v_1u_2 - u_1v_2) = \vec{u}\times\vec{v}$$

b) $$(k\vec{u})\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ku_1 & ku_2 & ku_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (ku_2v_3 - kv_2u_3, ku_3v_1 - kv_3u_1, ku_1v_2 - kv_1u_2)$$

$$k(\vec{u}\times\vec{v}) = k\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = k(u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2) = (k\vec{u})\times\vec{v}$$

c) $\vec{u}\times(k\vec{v})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ kv_1 & kv_2 & kv_3\end{vmatrix}=(ku_2v_3-kv_2u_3,ku_3v_1-kv_3u_1,ku_1v_2-kv_1u_2)$

$$k(\vec{u}\times\vec{v})=k\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=k(u_2v_3-v_2u_3,u_3v_1-v_3u_1,u_1v_2-v_1u_2)=\vec{u}\times(k\vec{v})$$

d) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{u}\times\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\vec{u}\times(v_2w_3-w_2v_3,v_3w_1-w_3v_1,v_1w_2-w_1v_2)=$

$$=(u_2v_1w_2-u_2w_1v_2-u_3v_3w_1+u_3w_3v_1,u_3v_2w_3-u_3w_2v_3-u_1v_1w_2+u_1w_1v_2,u_1v_3w_1-u_1w_3v_1-u_2v_2w_3+u_2w_2v_3)$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}\times\vec{w}=(u_2v_3-v_2u_3,u_3v_1-v_3u_1,u_1v_2-v_1u_2)\times\vec{w}=$$

$$=(u_3v_1w_3-v_3u_1w_3-w_2u_1v_2+w_2v_1u_2,w_1u_1v_2-w_1v_1u_2-w_3u_2v_3+w_3v_2u_3,w_2u_2v_3-w_2v_2u_3-w_1u_3v_1+w_1v_3u_1)$$

24. Página 97

a) $\vec{u}\times\vec{v}=(0,2,-2)\times(-1,3,-5)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 3 & -5\end{vmatrix}=-4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=(-4,2,2)$

b) $\vec{u}\times\vec{w}=(0,2,-2)\times(0,-2,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=(-2,0,0)$

c) $-\vec{v}\times\vec{w}=(1,-3,5)\times(0,-2,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 5\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=7\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}=(7,-1,-2)$

d) $\vec{v}\times 2\vec{w}=(-1,3,-5)\times(0,-4,2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & -5\\ 0 & -4 & 2\end{vmatrix}=-14\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}=(-14,2,4)$

e) $2\vec{u}\times 3\vec{v}=(0,4,-4)\times(-3,9,-15)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -4\\ -3 & 9 & -15\end{vmatrix}=-24\vec{i}+12\vec{j}+12\vec{k}=(-24,12,12)$

f) $(\vec{u}-\vec{w})\times 2\vec{v}=(0,4,-3)\times(-2,6,-10)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -3\\ -2 & 6 & -10\end{vmatrix}=-22\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k}=(-22,6,8)$

25. Página 97

a) $\vec{u}\times\vec{v}=(5,-2,-1)\times\left(-1,\frac{1}{2},4\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -2 & -1\\ -1 & \frac{1}{2} & 4\end{vmatrix}=-\frac{15}{2}\vec{i}-19\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}=\left(-\frac{15}{2},-19,\frac{1}{2}\right)\rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\left(-\frac{15}{2},-19,\frac{1}{2}\right)$

Para comprobar que $\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ tenemos que ver que los productos escalares $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ y $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ se anulan.

$\vec{u}\cdot\left(-\frac{15}{2},-19,\frac{1}{2}\right)=(5,-2,-1)\cdot\left(-\frac{15}{2},-19,\frac{1}{2}\right)=\frac{-75+76-1}{2}=0$

$\vec{v}\cdot\left(-\frac{15}{2},-19,\frac{1}{2}\right)=\left(-1,\frac{1}{2},4\right)\cdot\left(-\frac{15}{2},-19,\frac{1}{2}\right)=\frac{15-19+4}{2}=0$

b) $\vec{u}\times\vec{v}=\left(0,-1,\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{2},-1,3\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & -1 & 3\end{vmatrix}=-\frac{8}{3}\vec{i}-\frac{1}{6}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}=\left(-\frac{8}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)\rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\left(-\frac{8}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)$

Comprobamos que los productos escalares $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ y $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ se anulan.

$\vec{u}\cdot\left(-\frac{8}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)=\left(0,-1,\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)=0\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{0+1-1}{6}=0$

$\vec{v}\cdot\left(-\frac{8}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},-1,3\right)\cdot\left(-\frac{8}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{8+1-9}{6}=0$

26. Página 98

a) $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(1,0,1)\times(0,-1,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}+0\vec{j}-\vec{k}=(1,0,-1)$

b) $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\left(2,\frac{1}{2},-1\right)\times(0,-1,-2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}=(-2,4,-2)$

27. Página 98

a) Obtenemos $\vec{v}$ haciendo el producto vectorial de $\vec{u}$ con un vector no proporcional a él, por ejemplo $(0,1,0)$.

$\vec{v}=(-1,0,0)\times(0,1,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}-\vec{k}=(0,0,-1)\rightarrow|\vec{v}|=1$

Calculamos $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(-1,0,0)\times(0,0,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=0\vec{i}-\vec{j}+0\vec{k}=(0,-1,0)\rightarrow|\vec{w}|=1$.

$\beta=\{(-1,0,0),(0,0,-1),(0,-1,0)\}$ es base ortogonal y los vectores que la forman tienen módulo 1; por tanto, es base ortonormal.

b) $\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times(0,1,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+0\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rightarrow|\vec{v}|=1$

Calculamos $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=0\vec{i}-\vec{j}+0\vec{k}=(0,-1,0)\rightarrow|\vec{w}|=1$

$\beta=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,-1,0)\right\}$ es base ortogonal y los vectores que la forman tienen módulo 1; por tanto, es base ortonormal.

28. Página 99

Calculamos el área: $A=|\vec{u}\times\vec{v}|$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(4,-2,0)\times(-1,2,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}=(2,4,6)\rightarrow A=|\vec{u}\times\vec{v}|=|(2,4,6)|=7,48\ \text{u}^2$$

Sabemos que el perímetro es dos veces la suma de los lados. Calculamos el perímetro: $P=2\cdot(|\vec{u}|+|\vec{v}|)$

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{u}|=|(4,-2,0)|=2\sqrt{5}\\ |\vec{v}|=|(-1,2,-1)|=\sqrt{6}\end{array}\right\}\rightarrow P=2\cdot(|\vec{u}|+|\vec{v}|)=13,85\ \text{u}$$

29. Página 99

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,-1,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(-3,-3,-3)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & -3 & -3\end{vmatrix}=-3\vec{i}+9\vec{j}-6\vec{k}=(-3,9,-6)$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-3)^2+9^2+(-6)^2}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}\rightarrow\text{Área}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\frac{3\sqrt{14}}{2}\ \text{u}^2$$

Comprobamos que el resultado es independiente de los vectores elegidos.

Calculamos el área del triángulo de lados $\overrightarrow{BA}=(-1,1,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(-4,-2,-1)$.

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 2\\ -4 & -2 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}-9\vec{j}+6\vec{k}=(3,-9,6)\rightarrow|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\sqrt{126}=3\sqrt{14}\rightarrow\text{Área}=\frac{|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|}{2}=\frac{3\sqrt{14}}{2}\ \text{u}^2$$

Calculamos el área del triángulo de lados $\overrightarrow{CA}=(3,3,3)$ y $\overrightarrow{CB}=(4,2,1)$.

$$\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 3 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+9\vec{j}-6\vec{k}=(-3,9,-6)\rightarrow|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|=\sqrt{126}=3\sqrt{14}\rightarrow\text{Área}=\frac{|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|}{2}=\frac{3\sqrt{14}}{2}\ \text{u}^2$$

El área es la misma en los tres casos posibles.

30. Página 99

a) Calculamos el área: $A=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,-1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,0,-1)\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}=(1,-2,-1)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}\rightarrow \text{Área}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=1,22\ \text{u}^2$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3,0,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(2,3,-1)\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=6\vec{i}-\vec{j}+9\vec{k}=(6,-1,9)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{6^2+(-1)^2+9^2}=\sqrt{118}\rightarrow \text{Área}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=5,43\ \text{u}^2$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3,2,-3)\\ \overrightarrow{AC}=(5,-2,-6)\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -3\\ 5 & -2 & -6\end{vmatrix}=-18\vec{i}+3\vec{j}-16\vec{k}=(-18,3,-16)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-18)^2+3^2+(-16)^2}=\sqrt{589}\rightarrow \text{Área}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=12,13\ \text{u}^2$$

d) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,-2,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(1,-1,-1)\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}=(0,-3,3)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}\rightarrow \text{Área}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=2,12\ \text{u}^2$$

31. Página 100

a) $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -9\\ 2 & 4 & -8\end{vmatrix}=0$

b) $\left[\vec{v},\vec{u},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}2 & 5 & -9\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -8\end{vmatrix}=0$

c) $\left[\vec{v},\vec{w},\vec{u}\right]=\begin{vmatrix}2 & 5 & -9\\ 2 & 4 & -8\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0$

d) $\left[\vec{w},\vec{v},\vec{u}\right]=\begin{vmatrix}2 & 4 & -8\\ 2 & 5 & -9\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0$

32. Página 100

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}3 & 8 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ -5 & 4 & 0\end{vmatrix}=-156$$

33. Página 100

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \end{vmatrix}=0$$

La tercera fila es combinación lineal de las dos primeras.

34. Página 101

El volumen del paralelepípedo es igual al valor absoluto del producto mixto de los vectores que lo definen.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix}=48$$

El volumen es $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=48\,\text{u}^3$.

35. Página 101

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0,0,1) \\ \overrightarrow{AC}=(0,2,0) \\ \overrightarrow{AD}=(3,0,0) \end{array}\right\} \rightarrow [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-6$$

$$V=\frac{|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]|}{6}=\frac{6}{6}=1\text{u}^3$$

SABER HACER

36. Página 102

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\vec{v}=\left(\frac{-1}{2},0,\frac{-3}{2}\right) \\ 3\vec{u}=(0,6,-3) \\ 2\vec{w}=(8,-2,-4) \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{1}{2}\vec{v}+3\vec{u}-2\vec{w}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)+(0,6,-3)-(8,-2,-4)=\left(-\frac{15}{2},8,\frac{5}{2}\right)$$

37. Página 102

Si $C(x,y,z)\rightarrow\overrightarrow{CB}=(3-x,6-y,9-z)$ y $\overrightarrow{CA}=(1-x,2-y,-1-z)$

$$\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{CA}\rightarrow(3-x,6-y,9-z)=-3(1-x,2-y,-1-z)\rightarrow \left.\begin{array}{l} 3-x=-3+3x \\ 6-y=-6+3y \\ 9-z=3+3z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ y=3 \\ z=\frac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow C\left(\frac{3}{2},3,\frac{3}{2}\right)$$

38. Página 102

Sea $D(x,y,z)$.

Si $ABCD$ es un paralelogramo, sus diagonales se cortan en sus puntos medios.

M es el punto medio de $AC \to M\left(\frac{2+(-2)}{2},\frac{3+(-1)}{2},\frac{1+0}{2}\right)=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

M es el punto medio de $BD \to M\left(\frac{-1+x}{2},\frac{0+y}{2},\frac{4+z}{2}\right)=\left(\frac{x-1}{2},\frac{y}{2},\frac{z+4}{2}\right)$

$$\left(0,1,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{x-1}{2},\frac{y}{2},\frac{z+4}{2}\right)\to \left.\begin{array}{l} 0=\frac{x-1}{2}\to x=1 \\ 1=\frac{y}{2}\to y=2 \\ \frac{1}{2}=\frac{z+4}{2}\to z=-3 \end{array}\right\} \to D(1,2,-3)$$

39. Página 103

$$\vec{x}=\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}+\lambda_3\vec{w}\to(1,0,1)=\lambda_1(-1,2,1)+\lambda_2(2,-1,1)+\lambda_3(-2,0,-3)\to \left.\begin{array}{l} 1=-\lambda_1+2\lambda_2-2\lambda_3 \\ 0=2\lambda_1-\lambda_2 \\ 1=\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda_3=3\lambda_1-1 \\ \lambda_2=2\lambda_1 \\ 3\lambda_3=3\lambda_1-1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2\lambda_3=3\lambda_3\to\lambda_3=0 \\ \lambda_2=2\lambda_1\to\lambda_2=\frac{2}{3} \\ 0=3\lambda_1-1\to\lambda_1=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \to \vec{x}=(1,0,1)=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}+0\vec{w}$$

40. Página 103

Tres vectores no son base de $\mathbb{R}^3$ cuando son linealmente dependientes. Buscamos el valor de k para el cual el rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores es menor que 3.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{pmatrix}<3\to\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix}=17k+9=0\to k=-\frac{9}{17}$$

41. Página 103

Aplicamos las propiedades y la definición del producto escalar.

$|\vec{u}|=3\to\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2=9$

$|\vec{v}|=5\to\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2=25$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}\cdot\vec{v}\to 49=9+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+25\to\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{15}{2}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\to\frac{15}{2}=3\cdot5\cdot\cos\alpha\to\cos\alpha=\frac{1}{2}\to\alpha=60^\circ$

42. Página 104

Imponemos la condición de perpendicularidad $\vec{u}\perp\vec{v}\rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=(-k,2,0)\cdot(2,-k+2,k+1)=4-4k\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\end{array}\right\}\rightarrow 4-4k=0\rightarrow k=1$$

43. Página 104

El producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a ambos.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(-1,2,0)\times(2,-2,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(2,1,-2)$$

Para que sea unitario, dividimos por el módulo del vector: $\vec{w}=\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\dfrac{1}{3}(2,1,-2)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

44. Página 104

Por la primera condición: $\vec{u}=\lambda\vec{v}=\lambda(1,-2,3)$. Por la segunda condición: $A=|\vec{u}\times\vec{w}|=25$.

$$\vec{u}\times\vec{w}=(\lambda,-2\lambda,3\lambda)\times(-2,4,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda & -2\lambda & 3\lambda\\ -2 & 4 & -1\end{vmatrix}=(-10\lambda)\vec{i}+(-5\lambda)\vec{j}+0\vec{k}=(-10\lambda,-5\lambda,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}A=|\vec{u}\times\vec{v}|=|(-10\lambda,-5\lambda,0)|=\sqrt{(-10\lambda)^2+(-5\lambda)^2}=5\sqrt{5}\lambda\\ A=25\end{array}\right\}\rightarrow 5\sqrt{5}\lambda=25\rightarrow\lambda=\sqrt{5}$$

El vector $\vec{u}=\lambda\vec{v}=\left(\sqrt{5},-2\sqrt{5},3\sqrt{5}\right)$.

45. Página 105

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\times\vec{v}=(-1,0,2)\times(a,b,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 2\\ a & b & 1\end{vmatrix}=(-2b,2a+1,-b)\\ \vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}=(-2,5,-1)\end{array}\right\}\rightarrow(-2b,2a+1,-b)=(-2,5,-1)\rightarrow a=2,b=1$$

46. Página 105

Calculamos el ángulo que forman los vectores aplicando las propiedades del producto escalar.

$$|\vec{u}|=6\rightarrow\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2=36 \qquad |\vec{v}|=8\rightarrow\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|^2=64$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}\cdot\vec{v}\rightarrow 100=36+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+64\rightarrow(\vec{u}\cdot\vec{v})=0$$

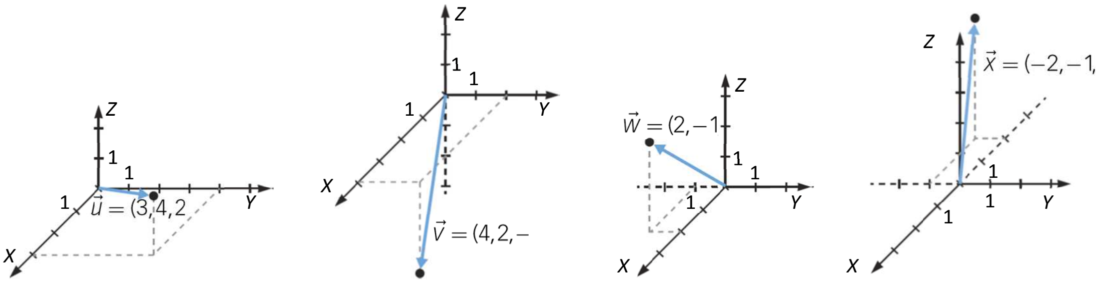
Aplicamos la definición de producto escalar y calculamos el producto mixto.

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\alpha\rightarrow 0=6\cdot 8\cdot cos\alpha\rightarrow cos\alpha=0\rightarrow\alpha=90^\circ$$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}]=[\vec{u}\times\vec{v},\vec{u},\vec{v}]=(\vec{u}\times\vec{v})(\vec{u}\times\vec{v})=|\vec{u}\times\vec{v}|\cdot|\vec{u}\times\vec{v}|\cdot cos(0^\circ)=|\vec{u}\times\vec{v}|^2=\left(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\alpha\right)^2=\left(6\cdot 8\cdot sen(90^\circ)\right)^2=2304$$

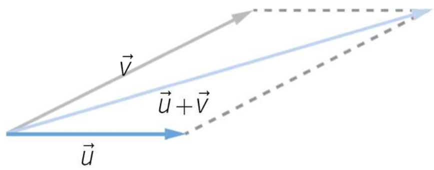
ACTIVIDADES FINALES

47. Página 106

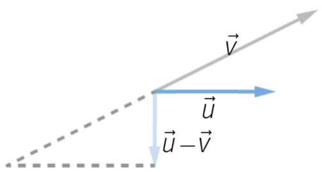


48. Página 106

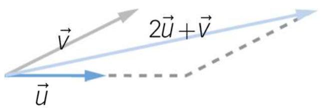
a)



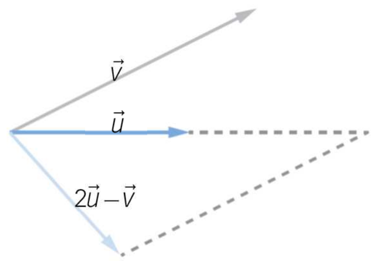
b)



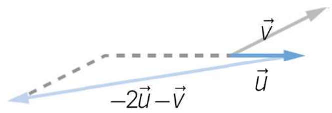
c)



d)



e)



49. Página 106

a) $\vec{u}+\vec{v}=(2,-3,1)+(4,2,-1)=(6,-1,0)$

b) $\vec{u}-2\vec{v}=(2,-3,1)-(8,4,-2)=(-6,-7,3)$

c) $3\vec{u}+2\vec{v}=(6,-9,3)+(8,4,-2)=(14,-5,1)$

d) $-2\vec{u}-\vec{v}=(-4,6,-2)-(4,2,-1)=(-8,4,-1)$

e) $2(\vec{u}+\vec{v})-\vec{v}=(12,-2,0)-(4,2,-1)=(8,-4,1)$

f) $\vec{u}-3(\vec{v}-2\vec{u})=7\vec{u}-3\vec{v}=(14,-21,7)-(12,6,-3)=(2,-27,10)$

50. Página 106

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, y reescribimos las condiciones.

$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)=(-2,2,3)$ $\qquad$ $2\vec{u}-\vec{v}=(2u_1-v_1,2u_2-v_2,2u_3-v_3)=(5,-2,3)$

Resolvemos los sistemas de ecuaciones:

$\left.\begin{matrix} u_1+v_1=-2 \\ 2u_1-v_1=5 \end{matrix}\right\} u_1=1, v_1=-3$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} u_2+v_2=2 \\ 2u_2-v_2=-2 \end{matrix}\right\} u_2=0, v_2=2$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} u_3+v_3=3 \\ 2u_3-v_3=3 \end{matrix}\right\} u_3=2, v_3=1$

Los vectores son $\vec{u}=(1,0,2)$ y $\vec{v}=(-3,2,1)$.

51. Página 106

Aplicamos la definición de módulo de un vector $\rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + m^2} = \sqrt{25 + m^2}$.

Imponemos la condición $|\vec{v}| = 13 \rightarrow \sqrt{25 + m^2} = 13 \rightarrow 25 + m^2 = 169 \rightarrow m = \pm\sqrt{144} = \pm 12$.

52. Página 106

Sea $\vec{u}$ el vector buscado, por la segunda condición: $\vec{u} = -\lambda\vec{v} = (-2\lambda, -5\lambda, \lambda)$ con $\lambda > 0$.

Imponemos la condición del módulo $|\vec{u}| = |(-2\lambda, -5\lambda, \lambda)| = \sqrt{30\lambda^2} = 9 \rightarrow 30\lambda^2 = 81 \rightarrow \lambda = +\dfrac{3\sqrt{30}}{10}$.

El vector que buscamos es $\vec{u} = -\lambda\vec{v} = \left(-\dfrac{3\sqrt{30}}{5}, -\dfrac{3\sqrt{30}}{2}, \dfrac{3\sqrt{30}}{10}\right)$.

53. Página 106

$$m(2,10,-4) + n(-1,3,-2) = (11,15,-2) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2m - n = 11 \\ 10m + 3n = 15 \\ -4m - 2n = -2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 6m - 3n = 33 \\ 10m + 3n = 15 \end{array}\right\} \rightarrow 16m = 48 \rightarrow m = 3, n = -5$$

Comprobamos que se verifica la tercera ecuación.

$$-4 \cdot 3 - 2(-5) = -2$$

La solución es $m = 3$ y $n = -5$.

54. Página 106

$$2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\vec{t} - \vec{w} \rightarrow \vec{t} = \frac{2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}}{2} = \frac{(16,-2,6) - (6,0-18) + (-6,2,4)}{2} = (2,0,14) \rightarrow \vec{t} = (2,0,14)$$

55. Página 106

Buscamos dos valores λ_1 y λ_2 tales que $\vec{x} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} \rightarrow \vec{x} = (6,-7,-8) = \lambda_1(3,-2,-1) + \lambda_2(0,1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 3\lambda_1 \\ -7 = -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ -8 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las dos primeras ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 3\lambda_1 \\ -7 = -2\lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -7 + 2\lambda_1 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

Comprobamos que se verifica la tercera ecuación.

$-\lambda_1 + 2\lambda_2 = -2 + 2 \cdot (-3) = -8$ La solución es $\vec{x} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

56. Página 106

Buscamos valores λ_1, λ_2 y λ_3 tales que $\vec{x}=\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}+\lambda_3\vec{w}$.

$\vec{x}=(7,-2,0)=\lambda_1(1,1,-2)+\lambda_2(1,0,3)+\lambda_3(-2,5,0)$

Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante.

$$\left.\begin{array}{l}7=\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3\\ -2=\lambda_1+5\lambda_3\\ 0=-2\lambda_1+3\lambda_2\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}7=\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3\\ \lambda_3=-\dfrac{2+\lambda_1}{5}\\ \lambda_2=\dfrac{2\lambda_1}{3}\end{array}\right\}\rightarrow 7=\lambda_1+\frac{2\lambda_1}{3}+2\frac{2+\lambda_1}{5}=\lambda_1\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}\rightarrow \lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$$

La solución es $\vec{x}=3\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$.

57. Página 106

Los vectores son linealmente dependientes si el rango de la matriz de sus coeficientes es menor que 3.

$$\begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&3&-5\\5&-5&5\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&3&-5\\5&-5&5\end{pmatrix}<3\rightarrow$$ $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

58. Página 106

Los vectores son linealmente independientes si el rango de la matriz de sus coeficientes es 3.

$$\begin{vmatrix}-2&1&2\\0&3&2\\1&4&-5\end{vmatrix}=42\neq 0\rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}-2&1&2\\0&3&2\\1&4&-5\end{pmatrix}=3\rightarrow$$ $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

59. Página 106

Si los vectores son linealmente independientes:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}2&1&-3\\2&m+3&-4\\-2&2&m-1\end{pmatrix}=3\rightarrow\begin{vmatrix}2&1&-3\\2&m+3&-4\\-2&2&m-1\end{vmatrix}=2m^2-4m-10\neq 0\rightarrow m\neq 1\pm\sqrt{6}$$

$\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes para $m\neq 1+\sqrt{6}$ y $m\neq 1-\sqrt{6}$.

60. Página 106

Si los vectores son linealmente dependientes:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix}3&m&-2m\\6&2m-1&0\\6&2m&2\end{pmatrix}<3\rightarrow\begin{vmatrix}3&m&-2m\\6&2m-1&0\\6&2m&2\end{vmatrix}=-6-12m=0\rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

$\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes para $m=-\dfrac{1}{2}$.

61. Página 106

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & m-1 \end{pmatrix} < 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1 = 0 \rightarrow m^2 = -1 \rightarrow m = \pm\sqrt{-1}$$

No se puede calcular la raíz de un número negativo; por tanto, no existe ningún valor de m para que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

62. Página 106

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Forman base porque son linealmente independientes.

b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 0$

No forman base porque son linealmente dependientes.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Forman base porque son linealmente independientes.

d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Forman base porque son linealmente independientes.

63. Página 106

a) Tres vectores forman base si son linealmente independientes.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix} = 3 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} = -a \neq 0 \rightarrow a \neq 0$$

$\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son base para $a \neq 0$.

b) Buscamos valores λ_1, λ_2 y λ_3 tales que:

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} \rightarrow \vec{x} = (-1,5,0) = \lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(2,1,3) + \lambda_3(1,-2,1)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante.

$$\left.\begin{array}{l} -1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 5 = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 0 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -2$$

La solución es $\vec{x} = \vec{u} - 2\vec{w}$.

64. Página 106

Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ son independientes si la matriz de las coordenadas de los vectores tiene rango 3.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ u_1-v_1 & u_2-v_2 & u_3-v_3 \\ u_1+v_1-w_1 & u_2+v_2-w_2 & u_3+v_3-w_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} \text{Rango}\begin{pmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ -2v_1 & -2v_2 & -2v_3 \\ -w_1 & -w_2 & -w_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1=F_1+\frac{1}{2}F_2 \\ F_2=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot F_2 \\ F_3=(-1)\cdot F_3}}{=} \text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 \\ u_1-v_1 & u_2-v_2 & u_3-v_3 \\ u_1+v_1-w_1 & u_2+v_2-w_2 & u_3+v_3-w_3 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 3$$

Por tanto, los vectores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ también son linealmente independientes.

65. Página 106

Sean $M(m_1,m_2,m_3)$ y $N(n_1,n_2,n_3)$, se tienen que cumplir las condiciones:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \to (m_1+2, m_2-3, m_3+1)=\frac{1}{3}(11,-6,1) \to \left.\begin{array}{r} 3m_1+6=11 \\ 3m_2-9=-6 \\ 3m_3+3=1 \end{array}\right\}$$

$$\to m_1=\frac{5}{3}, m_2=1, m_3=-\frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \to (n_1+2, n_2-3, n_3+1)=\frac{2}{3}(11,-6,1) \to \left.\begin{array}{r} 3n_1+6=22 \\ 3n_2-9=-12 \\ 3n_3+3=2 \end{array}\right\}$$

$$\to n_1=\frac{16}{3}, n_2=-1, n_3=-\frac{1}{3}$$

La solución es $M\left(\frac{5}{3},1,-\frac{2}{3}\right)$ y $N\left(\frac{16}{3},-1,-\frac{1}{3}\right)$.

66. Página 106

Sea $M(m_1,m_2,m_3)$, llamamos $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}$.

Reescribimos la condición:

$$\frac{s}{r}=\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{AM}}=3 \to \overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AM} \to \left(\frac{1}{4},11,-8\right)=4\left(m_1-\frac{3}{4}, m_2+3, m_3-4\right)$$

Resolvemos el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}=4m_1-3 \\ 11=4m_2+12 \\ -8=4m_3-16 \end{array}\right\} \to m_1=\frac{13}{16}, m_2=-\frac{1}{4}, m_3=2$$

La solución es $M\left(\frac{13}{16},-\frac{1}{4},2\right)$.

67. Página 106

Formamos dos vectores, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, con origen un punto y extremos los otros dos.

$\overrightarrow{AB}=(-2,-4,4)$ $\overrightarrow{AC}=(1,2,a-1)$

Si los puntos están alineados, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes y el rango de la matriz de sus coordenadas debe ser menor que 2.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & a-1 \end{pmatrix}<2\rightarrow\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}=-2a-2=0\rightarrow a=-1$$

La solución es $a=-1$.

68. Página 106

Formamos dos vectores, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, con origen un punto y extremos los otros dos.

$\overrightarrow{PQ}=(3,2,6-a)$ $\overrightarrow{PR}=(b-2,-4,9-a)$

Si los puntos están alineados, los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son linealmente dependientes y el rango de la matriz de sus coordenadas debe ser menor que 2.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6-a \\ b-2 & -4 & 9-a \end{pmatrix}<2\rightarrow\left.\begin{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ b-2 & -4 \end{vmatrix}=-8-2b=0\rightarrow b=-4 \\ \begin{vmatrix} 2 & 6-a \\ -4 & 9-a \end{vmatrix}=42-6a=0\rightarrow a=7 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6-a \\ b-2 & 9-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}=0$$

La solución es $a=7$ y $b=-4$.

69. Página 106

Formamos dos vectores, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, con origen un punto y extremos los otros dos.

$\overrightarrow{PQ}=(1,a-5,4)$ $\overrightarrow{PR}=(b-3,-12,c+7)$

Si los puntos están alineados, los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son linealmente dependientes y el rango de la matriz de sus coordenadas debe ser menor que 2.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & a-5 & 4 \\ b-3 & -12 & c+7 \end{pmatrix}<2\rightarrow\left.\begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & a-5 \\ b-3 & -12 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ b-3 & c+7 \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} a-5 & 4 \\ -12 & c+7 \end{vmatrix}=0 \end{matrix}\right\}$$

$$a=\frac{5\lambda-27}{\lambda-3},b=\lambda,c=4\lambda-19$$

La solución es $a=\dfrac{5b-27}{b-3}$ y $c=4b-19$.

70. Página 106

No existen valores de *a* y *b* para los que estos tres vectores sean paralelos.

Para que sean paralelos, el rango de la matriz formada por sus coordenadas debe ser 1, pero al menos es 2 ya que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & a & 5 \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix} = 2$$

71. Página 106

Dos vectores son paralelos si son linealmente dependientes, es decir, cuando sus coordenadas son proporcionales.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 2+m & 1 & 2 \\ 2 & 1+m & -4 \end{pmatrix} < 3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2+m & 1 \\ 2 & 1+m \end{vmatrix} = m^2 + 3m = 0 \rightarrow \{m=-3, m=0\} \\ \begin{vmatrix} 2+m & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4m - 12 \rightarrow m = -3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1+m & -4 \end{vmatrix} = -2m - 6 \rightarrow m = -3 \end{array}\right\}$$

Los vectores son linealmente dependientes para $m=-3$ porque es el único valor que verifica todas las ecuaciones del sistema.

72. Página 107

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(-2,1,\frac{1}{3}\right)\cdot(0,2,-3) = 1$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(-1,2,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(3,\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right) = -3$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\frac{3}{4},\sqrt{3},-5\right)\cdot\left(\frac{2}{3},-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right) = 0$

73. Página 107

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{\left(-2,1,\frac{1}{3}\right)\cdot(0,2,-3)}{\frac{\sqrt{46}}{3}\cdot\sqrt{13}} = \dfrac{3}{\sqrt{46}\cdot\sqrt{13}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{598}}\right) = 82{,}935^\circ$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{\left(-1,2,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(3,\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)}{\frac{\sqrt{22}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{-3}{\frac{3\sqrt{110}}{4}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(-\dfrac{4}{\sqrt{110}}\right) = 112{,}42^\circ$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{\left(\frac{3}{4},\sqrt{3},-5\right)\cdot\left(\frac{2}{3},-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{457}}{4}\cdot\frac{\sqrt{133}}{6}} = \dfrac{0}{\frac{\sqrt{457}}{4}\cdot\frac{\sqrt{133}}{6}} = 0 \rightarrow \alpha = \arccos(0) = 90^\circ$

74. Página 107

Calculamos el producto escalar utilizando su definición.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha = 3\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

75. Página 107

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,-1,-1)\cdot(0,2,1)=-3$

b) $cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{-3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}\rightarrow\alpha=arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)=140,77^{\circ}$

76. Página 107

a) $|\vec{u}|=\sqrt{14}$ y $|\vec{v}|=2$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,1,-3)\cdot(0,2,0)=2$

$cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{14}}\rightarrow\alpha=arc\,cos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)=74,5^{\circ}$

b) $|\vec{u}|=\sqrt{38}$ y $|\vec{v}|=\sqrt{3}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3,5,2)\cdot(1,1,-1)=0$

$cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{0}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{3}}\rightarrow\alpha=arc\,cos(0)=90^{\circ}$

77. Página 107

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,m,3)\cdot(0,2,-5)=2m-15$

$cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\rightarrow cos(120^{\circ})=-\frac{1}{2}=\frac{2m-15}{\sqrt{m^2+10}\cdot\sqrt{29}}$

Operamos: $30-4m=\sqrt{29m^2+290}\rightarrow 13m^2+240m-610=0\rightarrow m=-\frac{120}{13}\pm\frac{\sqrt{22\,330}}{13}$

78. Página 107

a) $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+p^2}=7\rightarrow p^2=49-4-9\rightarrow p=\pm\sqrt{36}=\pm6$

b) $|\vec{v}|=\sqrt{(-5)^2+p^2+6^2}=7\rightarrow p^2=49-25-36\rightarrow p=\pm\sqrt{-12}\rightarrow$ No hay solución.

c) $|\vec{w}|=\sqrt{p^2+(-1)^2+6^2}=7\rightarrow p^2=49-1-36\rightarrow p=\pm\sqrt{12}$

Podemos tener dos soluciones, una o ninguna.

79. Página 107

$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

Para que sean paralelos a $\vec{u}=(1,-1,-2)$ deben ser de la forma $\lambda\vec{u}=(\lambda,-\lambda,-2\lambda)$.

Los vectores unitarios tienen módulo 1.

Tomamos $\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\rightarrow\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\vec{w}=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ son vectores unitarios paralelos a $\vec{u}$.

80. Página 107

Sea $\overrightarrow{MN}=(5,0,-1)-(2,3,-4)=(3,-3,3)\rightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+3^2}=3\sqrt{3}$

Los vectores en la dirección de $\overrightarrow{MN}$ son de la forma $\lambda\cdot\overrightarrow{MN}=(3\lambda,-3\lambda,3\lambda)$.

Los vectores unitarios tienen módulo 1.

Tomamos $\lambda=\frac{1}{3\sqrt{3}}\rightarrow\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es vector unitario en la dirección $\overrightarrow{MN}$.

81. Página 107

$\vec{u}+\vec{v}=(-2,3,4)+(1,-2,-3)=(-1,1,1)$

$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\vec{u}\right|=\left|(-2,3,4)\right|=\sqrt{29}\\ \left|\vec{v}\right|=\left|(1,-2,-3)\right|=\sqrt{14}\end{array}\right\}\rightarrow\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|=\sqrt{29}+\sqrt{14}$$

$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{3}\neq\sqrt{29}+\sqrt{14}=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\rightarrow$ En este caso: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\neq\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$.

82. Página 107

Elevamos al cuadrado y tenemos la condición equivalente $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\left(\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\right)^2=\left|\vec{u}\right|^2+2\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{v}\right|^2$

Aplicamos las propiedades y la definición del producto escalar.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\alpha\rightarrow\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos0^\circ=\left|\vec{u}\right|^2$

$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{v}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+\left|\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+2\left(\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\alpha\right)+\left|\vec{v}\right|^2$

Queremos que se cumpla $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\rightarrow\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\left(\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\right)^2=\left|\vec{u}\right|^2+2\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{v}\right|^2$.

Esto ocurre cuando $\left|\vec{u}\right|^2+2\left(\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\alpha\right)+\left|\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+2\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot1+\left|\vec{v}\right|^2\rightarrow\cos\alpha=1\rightarrow\alpha=0^\circ$.

Es decir, cuando los vectores son proporcionales y forman un ángulo de 0º.

83. Página 107

Si $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

$\overrightarrow{u+v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$ y $\overrightarrow{u-v}=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$

$$\left(\overrightarrow{u+v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u-v}\right)=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)\cdot(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)=$$

$$=(u_1+v_1)(u_1-v_1)+(u_2+v_2)(u_2-v_2)+(u_3+v_3)(u_3-v_3)=u_1^2-v_1^2+u_2^2-v_2^2+u_3^2-v_3^2=$$

$$=\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)-\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)=\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2$$

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|\rightarrow\left|\vec{u}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2\rightarrow\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2=0$.

Entonces, el producto escalar $\left(\overrightarrow{u+v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u-v}\right)=\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2=0\rightarrow\left(\overrightarrow{u+v}\right)\perp\left(\overrightarrow{u-v}\right)$.

84. Página 107

a) Tres vectores son base del espacio tridimensional si son linealmente independientes.

Los vectores son linealmente independientes si el rango de la matriz de sus coeficientes es 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ forman una base.}$$

Para que la base sea ortogonal, los vectores deben ser perpendiculares dos a dos.

$$\left.\begin{array}{l} (1,3,-1)\cdot(0,1,0) = 3 \\ (1,3,-1)\cdot(-1,0,2) = -3 \\ (0,1,0)\cdot(-1,0,2) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ no forman una base ortogonal.}$$

Para que la base sea ortonormal, los vectores deben formar una base ortogonal y ser unitarios.

$\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ no forman una base ortonormal.

b) $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ forman una base.}$$

$$\left.\begin{array}{l} (-2,1,1)\cdot(1,2,0) = 0 \\ (-2,1,1)\cdot(-2,1,-5) = 0 \\ (1,2,0)\cdot(-2,1,-5) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ forman una base ortogonal.}$$

Para que la base sea ortonormal, los vectores deben formar una base ortogonal y ser unitarios.

$$\left.\begin{array}{l} |(-2,1,1)| = \sqrt{6} \neq 1 \\ |(1,2,0)| = \sqrt{5} \neq 1 \\ |(-2,1,-5)| = \sqrt{30} \neq 1 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ no forman una base ortonormal.}$$

c) $$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ forman una base.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(1,0,0) = 0 \\ \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0 \\ (1,0,0)\cdot\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ forman una base ortogonal.}$$

Para que la base sea ortonormal, los vectores deben formar una base ortogonal y ser unitarios.

$$\left.\begin{array}{l} \left|\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = 1 \\ |(1,0,0)| = 1 \\ \left|\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right| = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ forman una base ortonormal.}$$

85. Página 107

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=|\vec{u}|^2+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$$

Las diagonales son iguales si se cumple:

$$|\vec{u}|^2+2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2\to 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}\to 4\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}=0\to\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Es decir, si los vectores son perpendiculares.

86. Página 107

Si llamamos *a, b* y *c* a los lados del triángulo:

$a=|\vec{u}-\vec{v}|$ $\qquad b=|\vec{u}|$ $\qquad c=|\vec{v}|$

Como $|\overline{u-v}|^2=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2\to a^2=b^2-2bc\cdot cosA+c^2$

Que es la expresión que conocemos como teorema del coseno.

87. Página 107

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\to(m,-1,-m)\cdot(m,4,-3)=m^2+3m-4=0\to\{m=-4,m=1\}$$

Los valores de *m* para los que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares son $m=-4$ y $m=1$.

88. Página 107

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\to(3,t,5)\cdot(2,-7,t)=6-2t=0\to t=3$$

El valor de *t* para el que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares es $t=3$.

Dos vectores son paralelos si son proporcionales.

$$\vec{u}=\lambda\vec{v}\to(3,t,5)=(2\lambda,-7\lambda,t\lambda)\to\left.\begin{array}{r}3=2\lambda\\ t=-7\lambda\\ 5=t\lambda\end{array}\right\}$$

Se resuelve el sistema formado por las dos primeras ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}3=2\lambda\\ t=-7\lambda\end{array}\right\}\to\lambda=\frac{3}{2},t=-\frac{21}{2}$$

Se verifica si se cumple la tercera ecuación.

$$t\lambda=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{21}{2}\right)=-\frac{63}{4}\neq 5$$

No se verifica. Por tanto, el sistema no tiene solución y no existe ningún valor de *t* para el que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

89. Página 107

a) Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(m+1,-1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(3,-m-2,4)\end{array}\right\}\rightarrow(m+1,-1,1)\cdot(3,-m-2,4)=4m+9=0\rightarrow m=\frac{-9}{4}$$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{13}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{34}}\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{13}{\sqrt{204}}\right)=24,469^{\circ}$

90. Página 107

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\rightarrow\left(1-m^2,-m,m\right)\cdot\left(m,2m^2,2\right)=-3m^3+3m=0\rightarrow\{m=-1,m=0,m=1\}$$

Los valores de *m* para los que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares son $m=0$, $m=1$ y $m=-1$.

91. Página 107

Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es nulo.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(m^3,-1,m^2-1\right)\cdot(2,-3,1-2m)=m^2+2m+2=0\rightarrow m=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$. No tiene solución.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares para ningún valor de *m*.

92. Página 107

Los vectores $\overrightarrow{BA}=(2,m+1,3)$ y $\overrightarrow{BC}=(3,6,0)$ deben ser perpendiculares.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(2,m+1,3)\cdot(3,6,0)=6+6m+6=0\rightarrow m=-2$$

93. Página 107

a) El perímetro es igual a la suma de los lados.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{CA}\right|=|(-1,5,1)|+|(-1,-1,-4)|+|(2,-4,3)|=\sqrt{27}+\sqrt{18}+\sqrt{29}=14,82\text{ u}$$

b) Utilizamos la definición del producto escalar para calcular la amplitud de los ángulos.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,5,1)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{27}\\ \overrightarrow{AC}=(-2,4,-3)\rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{29}\end{array}\right\}\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)=\arccos\left(\frac{19}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{29}}\right)=47,23^{\circ}$$

$\alpha=47,23^{\circ}$ es el ángulo en el vértice A .

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(-1,-1,-4)\rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{18}\\ \overrightarrow{BA}=(1,-5,-1)\rightarrow\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{27}\end{array}\right\}\rightarrow\beta=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}\right)=\arccos\left(\frac{8}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{27}}\right)=68,72^{\circ}$$

$\beta=68,72^{\circ}$ es el ángulo en el vértice B .

Calculamos el ángulo en el vértice *C*: $\delta=180^{\circ}-\alpha-\beta=180^{\circ}-47,23^{\circ}-68,72^{\circ}=64,05^{\circ}$.

94. Página 107

$$Proy_{\vec{u}}\vec{v}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u}=\frac{(2,-3,1)\cdot(4,2,-1)}{\sqrt{14}}(2,-3,1)=\frac{\sqrt{14}}{14}(2,-3,1)$$

95. Página 107

Aplicamos la definición de producto escalar:

$$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}\end{array}\right\}\rightarrow|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}\rightarrow\cos\alpha=\frac{Proy_{\vec{u}}\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}$$

96. Página 108

a) Sea $D(x,y,z)$:

Si $ABCD$ es un paralelogramo, sus diagonales se cortan en sus puntos medios.

M es el punto medio de $AC\rightarrow M\left(\frac{0+0}{2},\frac{-1-2}{2},\frac{2+0}{2}\right)=\left(0,-\frac{3}{2},1\right)$

M es el punto medio de $BD\rightarrow M\left(\frac{-1+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{0+z}{2}\right)=\left(\frac{x-1}{2},\frac{y+3}{2},\frac{z}{2}\right)$

$$\left(0,-\frac{3}{2},1\right)=\left(\frac{x-1}{2},\frac{y+3}{2},\frac{z}{2}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}0=\frac{x-1}{2}\rightarrow x=1\\ -\frac{3}{2}=\frac{y+3}{2}\rightarrow y=-6\\ 1=\frac{z}{2}\rightarrow z=2\end{array}\right\}\rightarrow D(1,-6,2)$$

b) Calculamos el perímetro como suma de la longitud de los lados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,4,-2)\rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{21}\\ \overrightarrow{BC}=(1,-5,0)\rightarrow|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{26}\end{array}\right\}\rightarrow|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{CD}|+|\overrightarrow{DA}|=2\left(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|\right)=19,36\text{ u}$$

c) Calculamos la longitud de las diagonales.

$|\overrightarrow{AC}|=|(0,-1,-2)|=2,23\text{ u}$ $\qquad$ $|\overrightarrow{BD}|=|(2,-9,2)|=9,43\text{ u}$

d) Utilizamos la definición del producto escalar para calcular la amplitud de los ángulos.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\alpha\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,4,-2)\rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{21}\\ \overrightarrow{AD}=(1,-5,0)\rightarrow|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{26}\end{array}\right\}\rightarrow\alpha=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}\right)=\arccos\left(\frac{-21}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{26}}\right)=153,98^\circ$$

$\alpha=153,98^\circ$ es el ángulo en el vértice A y, por las propiedades del paralelogramo, también en el vértice C.

Calculamos el ángulo en los vértices B y D teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un paralelogramo es 360°.

$$\beta=\frac{360^\circ-2\alpha}{2}=180^\circ-153,98^\circ=26,01^\circ$$

97. Página 108

Si el ángulo en B es recto, el producto escalar $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(2,4,-2m+1)\\ \overrightarrow{BA}=(m-1,2,2)\end{array}\right\}\rightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=2(m-1)+8+2(-2m+1)=-2m+8$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0\rightarrow -2m+8=0\rightarrow m=4$$

Para $m=4$, la longitud de los lados es:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|(-3,-2,-2)\right|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}=4,12\text{ u}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|(-1,2,-9)\right|=\sqrt{1+4+81}=\sqrt{86}=9,27\text{ u}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|(2,4,-7)\right|=\sqrt{4+16+49}=\sqrt{69}=8,3\text{ u}$$

Para $m=4$, la amplitud del ángulo en B es $\beta=90^\circ$ por ser ángulo recto.

La amplitud del ángulo en A es el ángulo α formado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha\rightarrow\alpha=arc\cos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)=arc\cos\left(\frac{17}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{86}}\right)=63,6^\circ$$

Calculamos la amplitud del ángulo δ en C con la propiedad de la suma de ángulos de un triángulo:

$$\delta=180^\circ-\alpha-\beta=180^\circ-90^\circ-63,6^\circ=26,4^\circ$$

98. Página 108

Un triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales. Calculamos la longitud de los lados.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|(-4,3,-1)\right|=\sqrt{16+9+1}=\sqrt{26}=5,09\text{ u}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|(0,0,-2)\right|=\sqrt{0+0+4}=2\text{ u}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|(4,-3,-1)\right|=\sqrt{16+9+1}=\sqrt{26}=5,09\text{ u}$$

Como dos de los lados son iguales, el triángulo es isósceles.

99. Página 108

$$\vec{u}\times\vec{v}=(3,2,0)\times(3,6,-2)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&0\\3&6&-2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+6\vec{j}+12\vec{k}=(-4,6,12)$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=(3,6,-2)\times(3,2,0)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&6&-2\\3&2&0\end{vmatrix}=4\vec{i}-6\vec{j}-12\vec{k}=(4,-6,-12)$$

$\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{v}\times\vec{u}$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos.

100. Página 108

a) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -5\end{vmatrix}=-14\vec{i}+\vec{j}-8\vec{k}=(-14,1,-8)$

b) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -4 & \frac{1}{3}\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=-7\vec{i}-\frac{17}{3}\vec{j}-5\vec{k}=\left(-7,-\frac{17}{3},-5\right)$

c) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & 0\\ 1 & \sqrt{2} & -1\end{vmatrix}=-\sqrt{3}\vec{i}+\sqrt{6}\vec{j}+\sqrt{3}\vec{k}=\left(-\sqrt{3},\sqrt{6},\sqrt{3}\right)$

101. Página 108

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot sen\,\alpha=\sqrt{2}\cdot 5\cdot sen\left(45^{\circ}\right)=5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5$$

102. Página 108

Consideramos los vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$.

$$\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1+w_1 & v_2+w_2 & v_3+w_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$

103. Página 108

a) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\vec{w}=(-1,0,2)\times(-3,-3,4)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 2\\ -3 & -3 & 4\end{vmatrix}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}=(6,-2,3)$

b) $\vec{u}\times\left(\vec{v}-\vec{w}\right)=(0,1,0)\times(2,2,-2)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{k}=(-2,0,-2)$

c) $\vec{v}\times\left(2\vec{u}-\vec{w}\right)=(-1,-1,2)\times(3,5,-4)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 2\\ 3 & 5 & -4\end{vmatrix}=-6\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}=(-6,2,-2)$

d) $\left(\vec{v}-\vec{u}\right)\times 2\vec{w}=(-1,-2,2)\times(-6,-6,8)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 2\\ -6 & -6 & 8\end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}=(-4,-4,-6)$

e)
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(2,0,1)\\ \vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 2\\ -3 & -3 & 4\end{vmatrix}=(2,-2,0)\end{array}\right\}\rightarrow(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}=(2,2,-4)$$

f) $$2\vec{u}\times(\vec{w}\times 3\vec{v})=2\vec{u}\times\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -3 & 4\\ -3 & -3 & 6\end{vmatrix}=(0,2,0)\times(-6,6,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & 0\\ -6 & 6 & 0\end{vmatrix}=(0,0,12)$$

104. Página 108

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -4 & 5\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-19\vec{i}-13\vec{j}+\vec{k}=(-19,-13,1)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=3\sqrt{59}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{9+16+25}=5\sqrt{2} \qquad |\vec{v}|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})=-13\rightarrow(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=169$$

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=5\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}-169=10\sqrt{7}-169$$

Como $3\sqrt{59}\neq 10\sqrt{7}-169\rightarrow$ No se verifica la igualdad.

105. Página 108

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}-\vec{v}\times\vec{u}-\vec{v}\times\vec{v}$$

Sabemos que: $\left.\begin{array}{l}\vec{u}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{v}=0\\ \vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}\end{array}\right\}\rightarrow(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=2(\vec{u}\times\vec{v})$

106. Página 108

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & m & 0\\ -m & 0 & 1\end{vmatrix}=m\vec{i}+\vec{j}+m^2\vec{k}=(m,1,m^2)$$

Queremos que $(m,1,m^2)=\lambda\left(1,-\frac{1}{2},-2\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}m=\lambda\\ 1=-\frac{\lambda}{2}\\ m^2=-2\lambda\end{array}\right\}$

Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones.

$\left.\begin{array}{l}m=\lambda\\ 1=-\frac{\lambda}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\lambda=m=-2\rightarrow$ Verificamos si se cumple la tercera ecuación: $\left.\begin{array}{l}m^2=4\\ -2\lambda=4\end{array}\right\}\rightarrow m^2=-2\lambda$.

107. Página 108

Calculamos un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 6 & -3 & 2\end{vmatrix}=-3\vec{i}-10\vec{j}-6\vec{k}=(-3,-10,-6)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{9+100+36}=\sqrt{145}$$

Los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 5 son:

$$\vec{w}_1=\frac{5}{\sqrt{145}}(-3,-10,-6)=\left(-\frac{3\sqrt{145}}{29},-\frac{10\sqrt{145}}{29},-\frac{6\sqrt{145}}{29}\right)$$

$$\vec{w}_2=-\frac{5}{\sqrt{145}}(-3,-10,-6)=\left(\frac{3\sqrt{145}}{29},\frac{10\sqrt{145}}{29},\frac{6\sqrt{145}}{29}\right)$$

108. Página 108

Calculamos un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 4\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2\vec{i}-13\vec{j}-6\vec{k}=(-2,-13,-6)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{4+169+36}=\sqrt{209}$$

Tomamos $\vec{w}=\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\dfrac{1}{\sqrt{209}}(-2,-13,-6)=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{209}},-\dfrac{13}{\sqrt{209}},-\dfrac{6}{\sqrt{209}}\right)$.

109. Página 108

Calculamos un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 3\\ -3 & -1 & 6\end{vmatrix}=9\vec{i}-21\vec{j}+\vec{k}=(9,-21,1)$$

Cualquier vector $\vec{w}=\lambda(\vec{u}\times\vec{v})$ es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Tomamos $\lambda=\dfrac{1}{9}\rightarrow\vec{w}=\lambda(\vec{u}\times\vec{v})=\dfrac{1}{9}(9,-21,1)=\left(1,-\dfrac{7}{3},\dfrac{1}{9}\right)$

110. Página 108

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+10\vec{j}-\vec{k}=(-4,10,-1)$$

$$2\vec{a}-3\vec{u}=\vec{b}\times\vec{c}\rightarrow\vec{u}=\frac{1}{3}\left(2\vec{a}-\vec{b}\times\vec{c}\right)\rightarrow\vec{u}=\frac{1}{3}[2(3,5,1)-(-4,10,-1)]=\left(\frac{10}{3},0,1\right)$$

111. Página 108

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 1 & 1\\ -2 & -3 & -5\end{vmatrix}=-2\vec{i}-22\vec{j}+14\vec{k}=(-2,-22,14)$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-4,1,1)\cdot(-2,-3,-5)=0\rightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

$B_1=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es base del espacio tridimensional, y es ortogonal porque $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

Para que sea ortonormal los vectores deben ser unitarios.

$|\vec{u}|=|(-4,1,1)|=\sqrt{16+1+1}=3\sqrt{2}$

$|\vec{v}|=|(-2,-3,-5)|=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$

$|\vec{w}|=|(-2,-22,14)|=\sqrt{4+484+196}=6\sqrt{19}$

$B_2=\left\{\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6}\right),\left(-\frac{\sqrt{38}}{19},-\frac{3\sqrt{38}}{38},-\frac{5\sqrt{38}}{38}\right),\left(-\frac{\sqrt{19}}{57},-\frac{11\sqrt{19}}{57},\frac{7\sqrt{19}}{57}\right)\right\}$ es base ortonormal.

112. Página 108

El triángulo está definido por los vectores $\overrightarrow{AB}=(3,2,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,6,-1)$.

Calculamos el área $A=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3,2,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(2,6,-1)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 6 & -1\end{vmatrix}=4\vec{i}+\vec{j}+14\vec{k}=(4,1,14)$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{16+1+196}=\sqrt{213}\rightarrow A=\frac{\sqrt{213}}{2}=7{,}3\ \text{u}^2$$

113. Página 108

Utilizamos la fórmula del área del triángulo: $A=\frac{b\cdot h}{2}\rightarrow h=\frac{2A}{b}$

El triángulo está definido por los vectores $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-5)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,2,-4)$.

Calculamos el área $A=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3,4,-5)\\ \overrightarrow{AC}=(2,2,-4)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -5\\ 2 & 2 & -4\end{vmatrix}=-6\vec{i}-22\vec{j}-14\vec{k}=(-6,-22,-14)$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{36+484+196}=\sqrt{716}\rightarrow A=\frac{\sqrt{716}}{2}=13{,}37\ \text{u}^2$$

Como se pide la altura correspondiente al vértice B, la base será $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$.

Entonces $h=\frac{2A}{b}=\frac{2\cdot 13{,}37}{2\sqrt{6}}=5{,}46\ \text{u}$.

114. Página 108

Los lados del triángulo están definidos por los vectores $\overrightarrow{AB}=(2,-3,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{CA}=(-3,2,0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(2,-3,-1)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{14}\\ \overrightarrow{BC}=(1,1,1)\rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3}\\ \overrightarrow{AC}=(3,-2,0)\rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{13}\end{array}\right\}$$

Es un triángulo escaleno porque no tiene dos lados iguales.

a) El perímetro es igual a la suma de la longitud de los lados.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|=9{,}07\text{ u}$$

b) Utilizamos la definición de producto escalar para calcular la amplitud de los ángulos.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\alpha\rightarrow\alpha=arc\,cos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

El ángulo en el vértice A será $\alpha=arc\,cos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)=arc\,cos\left(\frac{12}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{13}}\right)=27{,}19^{\circ}$.

El ángulo en B será $\beta=arc\,cos\left(\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}\right)=arc\,cos\left(\frac{(1,1,1)\cdot(-2,3,1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}}\right)=arc\,cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}}\right)=72{,}02^{\circ}$.

Por las propiedades del triángulo, el ángulo en C será $\delta=180^{\circ}-\alpha-\beta=180^{\circ}-27{,}18^{\circ}-72{,}02^{\circ}=80{,}8^{\circ}$.

c) Calculamos el área: $A=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&-1\\3&-2&0\end{vmatrix}=-2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}=(-2,-3,5)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}\rightarrow A=\frac{\sqrt{38}}{2}=3{,}08\text{ u}^2$$

115. Página 108

a) Sea $D(x,y,z)$:

Si $ABCD$ es un paralelogramo, sus diagonales se cortan en sus puntos medios.

M es el punto medio de $AC\rightarrow M\left(\frac{0+0}{2},\frac{2+1}{2},\frac{0+4}{2}\right)=\left(0,\frac{3}{2},2\right)$

M es el punto medio de $BD\rightarrow M\left(\frac{1+x}{2},\frac{0+y}{2},\frac{0+z}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right)$

$$\left(0,\frac{3}{2},2\right)=\left(\frac{x+1}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{l}0=\frac{x+1}{2}\rightarrow x=-1\\ \frac{3}{2}=\frac{y}{2}\rightarrow y=3\\ 2=\frac{z}{2}\rightarrow z=4\end{array}\right\}\rightarrow D(-1,3,4)$$

b) El perímetro es igual a la suma de la longitud de los lados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,-2,0)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5}\\ \overrightarrow{BC}=(-1,1,4)\rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=3\sqrt{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{CD}\right|+\left|\overrightarrow{DA}\right|=2\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|\right)=12,95\text{ u}$$

El área viene dada por el módulo del producto escalar de los lados formados por los vectores con origen en un mismo punto.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,-2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-1,4)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&0\\0&-1&4\end{vmatrix}=-8\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}=(-8,-4,-1)\rightarrow\text{Área}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=9\text{ u}^2$$

116. Página 108

$$\vec{u}\times\vec{v}=(1,2m,-1)\times(3,-1,5)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2m&-1\\3&-1&5\end{vmatrix}=(10m-1)\vec{i}-8j+(-6m-1)\vec{k}=(10m-1,-8,-6m-1)$$

$$\text{Área}=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{(10m-1)^2+64+(-6m-1)^2}=\sqrt{136m^2-8m+66}$$

Para que la superficie del paralelogramo sea $\sqrt{66}\text{ u}^2\rightarrow\sqrt{136m^2-8m+66}=\sqrt{66}$

Es decir: $136m^2-8m=0\rightarrow m=0, m=\frac{1}{17}$

Obtenemos dos valores para m porque existen dos paralelogramos simétricos respecto de $\vec{v}$ que cumplen esa condición.

117. Página 108

Sabemos que el área es $\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,1,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,6,m-1)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&0\\0&6&m-1\end{vmatrix}=(m-1)\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=(m-1,0,0)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(m-1)^2}\rightarrow\text{Área}=\frac{\sqrt{(m-1)^2}}{2}=\frac{1}{2}\text{u}^2\rightarrow(m-1)^2=1\rightarrow\{m=0,m=2\}$$

Las soluciones son $m=0$ y $m=2$.

118. Página 108

a) Si el triángulo tiene un ángulo recto en $A\rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,4,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,-m+1,1)\end{array}\right\}\rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2+4(1-m)-4=2-4m$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\rightarrow 2-4m=0\rightarrow m=\frac{1}{2}$$

b) Utilizamos la fórmula del área del triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2} \to h = \frac{2A}{b}$

Calculamos el área: $\frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)\end{array}\right\} \to \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -4 \\ -2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 9\vec{j} + \frac{15}{2}\vec{k} = \left(6, 9, \frac{15}{2}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{36 + 81 + \frac{225}{4}} = \frac{3\sqrt{77}}{2} \to \text{Área} = \frac{3\sqrt{77}}{4} = 6{,}58 \text{ u}^2$$

Como se pide la altura correspondiente al vértice A, la base será el lado $\overrightarrow{BC}$.

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\left(-1, \frac{-7}{2}, 5\right)} = \frac{3\sqrt{17}}{2} = 6{,}18 \text{ u}$$

Entonces, $h = \frac{2A}{b} = \frac{2 \cdot 6{,}58}{6{,}18} = 2{,}12 \text{ u}$.

119. Página 109

a) Si están alineados, el ángulo α formado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ será cero.

Utilizamos la definición de producto escalar para comprobarlo.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha \to \alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (15, 30, 45) \\ \overrightarrow{AC} = (10, 20, 30)\end{array}\right\} \to \alpha = \arccos\left(\frac{2\,100}{15\sqrt{14} \cdot 10\sqrt{14}}\right) = \arccos(1) = 0^\circ$$

b) Los extremos serán los puntos que estén a mayor distancia.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{AB}\right| = 15\sqrt{14} \\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = 10\sqrt{14} \\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = 5\sqrt{14}\end{array}\right\} \to \text{Los extremos serán los puntos } A \text{ y } B\text{. Por tanto, } C \text{ se encuentra entre ellos.}$$

c) Sea la fórmula del área del triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

La altura será la distancia del punto D, la llamamos h.

Para el triángulo $DAB \to A = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot h}{2} = \frac{15\sqrt{14} \cdot h}{2} \text{ u}^2$

Para el triángulo $DAC \to A = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot h}{2} = \frac{10\sqrt{14} \cdot h}{2} \text{ u}^2$

Para el triángulo $DBC \to A = \frac{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot h}{2} = \frac{5\sqrt{14} \cdot h}{2} \text{ u}^2$

El triángulo DAB tiene mayor superficie.

120. Página 109

a) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-34$

b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}=34$

c) $[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]=\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -11 \\ 12 & 6 & 0 \end{vmatrix}=0$

121. Página 109

El producto mixto de los tres vectores definidos como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ -2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Esto ocurre porque los tres vectores son linealmente dependientes y están en el mismo plano. Por tanto, no se forma ningún paralelepípedo y el volumen es cero.

122. Página 109

Sea $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$[\vec{a},\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}]=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 6-b_1 & -10-b_2 & 4-b_3 \end{vmatrix}=0$$

Para cualquier vector $\vec{b}$ que elijamos, $2\vec{a}-\vec{b}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Como el producto mixto de vectores linealmente dependientes es cero: $[\vec{a},\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}]=0$.

123. Página 109

$$\vec{u}\times\vec{v}=(3,-4,5)\times(-2,3,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-19\vec{i}-13\vec{j}+\vec{k}=(-19,-13,1)$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=3\sqrt{59}$$

$$|\vec{u}|=|(3,-4,5)|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$|\vec{v}|=|(-2,3,1)|=\sqrt{14}$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=(-13)^2=169$$

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=5\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}-169=10\sqrt{7}-169$$

Como $3\sqrt{59}\neq 10\sqrt{7}-169 \rightarrow$ No se verifica la igualdad.

124. Página 109

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}-\vec{u}\times\vec{v}-\vec{v}\times\vec{v}$$

Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{v}=0\\ \vec{u}\times\vec{v}=-\vec{u}\times\vec{v}\end{array}\right\}\rightarrow(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=2(\vec{u}\times\vec{v})$$

125. Página 109

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+10\vec{j}-\vec{k}=(-4,10,-1)$$

$$2\vec{a}-3\vec{u}=\vec{b}\times\vec{c}\rightarrow\vec{u}=\frac{1}{3}\left(2\vec{a}-\vec{b}\times\vec{c}\right)=\frac{1}{3}[(6,10,2)-(-4,10,-1)]=\left(\frac{10}{3},0,1\right)\rightarrow\vec{u}=\left(\frac{10}{3},0,1\right)$$

126. Página 109

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 4 & -7 & 0\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=-6$$

$$\text{Volumen }=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=|-6|=6\text{ u}^3$$

127. Página 109

$$\text{Volumen }=\frac{\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|}{6}$$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}3 & 0 & -2\\ 5 & -6 & 5\\ 7 & 0 & -7\end{vmatrix}=42$$

$$\text{Volumen }=\frac{|42|}{6}=7\text{ u}^3$$

128. Página 109

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-4,-2,5)\\ \overrightarrow{AC}=(0,-6,0)\\ \overrightarrow{AD}=(-3,-10,9)\end{array}\right\}\rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-4 & -2 & 5\\ 0 & -6 & 0\\ -3 & -10 & 9\end{vmatrix}=126$$

$$\text{Volumen }=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{126}{6}=21\text{u}^3$$

129. Página 109

Los puntos podrán ser vértices de un paralelepípedo cuando no están en el mismo plano y, por tanto, los vectores que determinan tampoco son coplanarios. Es decir, cuando $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\neq 0$.

a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-4,-1,-6)\\ \overrightarrow{AC}=(0,3,6)\\ \overrightarrow{AD}=(-3,2,6)\end{array}\right\}\rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-4 & -1 & -6\\ 0 & 3 & 6\\ -3 & 2 & 6\end{vmatrix}=-60$

Pueden ser vértices de un paralelepípedo.

b) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,3,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(3,1,2)\\ \overrightarrow{AD}=(-1,-3,1)\end{array}\right\}\rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=0$

No pueden ser vértices de un paralelepípedo.

130. Página 109

Los puntos podrán ser vértices de un tetraedro cuando no están en el mismo plano y, por tanto, los vectores que determinan tampoco son coplanarios. Es decir, cuando $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(6,-3,4)\\ \overrightarrow{AC}=(5,-4,3)\\ \overrightarrow{AD}=(-2,0,0)\end{array}\right\}\rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}6 & -3 & 4\\ 5 & -4 & 3\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=-14$$

Pueden ser vértices de un tetraedro.

131. Página 109

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}1 & m-2 & -1\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & m & 1\end{vmatrix}=14-4m$$

Volumen $=\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right|=|14-4m|=6\ \text{u}^3$

$$\begin{cases}14-4m=6\\ 14-4m=-6\end{cases}\rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=5\end{cases}$$

132. Página 109

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,0,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,-2,-6)\\ \overrightarrow{AD}=(3,-1,1)\end{array}\right\}\rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & -6\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$$

Volumen $=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\dfrac{0}{6}=0\,\text{u}^3$

Los cuatro puntos no determinan un paralelepípedo. Los puntos son coplanarios.

133. Página 109

El volumen del paralelepípedo está definido como el producto del área de la base por la altura. Calculamos dicho volumen.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}-3 & 9 & 2\\ 1 & 5 & -1\\ 6 & 7 & -6\end{vmatrix}=23$$

$$V=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=23\text{ u}^3$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 9 & 2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=-19\vec{i}-\vec{j}-24\vec{k}=(-19,-1,-24)$$

El área de la base: $A_b=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{19^2+1^2+24^2}=\sqrt{938}\text{ u}^2$

La altura viene dada por $V=A_b\cdot h\rightarrow h=\dfrac{V}{A_b}=\dfrac{23}{\sqrt{938}}\text{ u}$.

134. Página 109

Tomamos el paralelepípedo generado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-8$$

Volumen del paralelepípedo: $V_P=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right|=8\text{ u}^3=6V_T$

Calculamos la superficie de dicho paralelepípedo como suma de las áreas de las caras.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(-7,2,-1)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{49+4+1}=3\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(1,2,-1)\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=5\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}=(5,2,-5)\rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{25+4+25}=3\sqrt{6}$$

Superficie: $S_A=2\cdot\left[\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}\right|\right]=14\sqrt{6}=34,24\text{ u}^2$

a) Necesitamos tres vectores para generar un paralelepípedo. Dependiendo de los vectores elegidos, podemos obtener diferentes paralelepípedos.

b) Calculamos la superficie del paralelepípedo generado por los vectores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ y $\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(1,2,-1)\rightarrow\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right|=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 2\end{vmatrix}=5\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}=(5,2,-5)\rightarrow\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\right|=3\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 2\end{vmatrix}=-3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}=(-3,2,-5)\rightarrow\left|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC}\right|=\sqrt{38}$$

Superficie: $S_B=2\cdot\left[\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right|+\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\right|+\left|\overrightarrow{DB}\times\overrightarrow{DC}\right|\right]=2\cdot\left[\sqrt{6}+3\sqrt{6}+\sqrt{38}\right]=31{,}92\ \text{u}^2$

$S_B\neq S_A\rightarrow$ Los diferentes paralelepípedos con vértices en A, B, C y D pueden tener distinta superficie.

Elijamos los vectores que elijamos para generar nuestro paralelepípedo, deben ser aristas del tetraedro con vértices en A, B, C y D. Calculamos el volumen de dicho tetraedro.

Volumen del tetraedro: $V_T=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=1{,}33\ \text{u}^3$

Volumen del paralelepípedo: $V_P=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=8\ \text{u}^3=6V_T$

Por un lado, esta relación entre volúmenes se cumple en todos los casos. Por otro lado, el volumen del tetraedro es el mismo independientemente de los vectores que usemos para calcularlo. Por tanto, el volumen del paralelepípedo será siempre $6V_T=8\ \text{u}^3$.

135. Página 109

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -4 & 0 & 2\\ m & -1 & 3\end{vmatrix}=2m+12$$

$$V=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=|2m+12|=30\rightarrow\begin{cases}2m+12=30\rightarrow m=9\\ 2m+12=-30\rightarrow m=-21\end{cases}$$

136. Página 109

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}0 & m & m\\ m-3 & m+4 & 0\\ m & 4 & -m\end{vmatrix}=-3m^2-12m$$

$$V=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=|-3m^2-12m|=9\rightarrow\begin{cases}-3m^2-12m=9\rightarrow\{m=-3,m=-1\}\\ -3m^2-12m=-9\rightarrow\{m=-2-\sqrt{7},m=-2+\sqrt{7}\}\end{cases}$$

137. Página 109

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2,-5,-8)\\ \overrightarrow{AC}=(4,-6,-3)\\ \overrightarrow{AD}=(m-3,-1,-13)\end{array}\right\}\rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-2 & -5 & -8\\ 4 & -6 & -3\\ m-3 & -1 & -13\end{vmatrix}=-33m-279$$

$$V=\frac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right|}{6}=\frac{|-33m-279|}{6}=107\rightarrow\begin{cases}-33m-279=642\rightarrow m=-\dfrac{307}{11}\\ -33m-279=-642\rightarrow m=11\end{cases}$$

138. Página 109

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2-6,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-4,2,2)\\ \overrightarrow{AD}=(5,4,-2)\end{array}\right\}\rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 0\\ -4 & 2 & 2\\ 5 & 4 & -2\end{vmatrix}=12$$

$$\text{Volumen }=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{12}{6}=2\,\text{u}^3$$

Efectivamente, los cuatro vértices forman un tetraedro.

Se calcula el centro de gravedad: $C_G=\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\dfrac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$

$$C_G=\left(\frac{2+0-2+7}{4},\frac{3-3+5+7}{4},\frac{5+5+7+3}{4}\right)=\left(\frac{7}{4},3,5\right)$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Página 110

Sí, puede haber más de un punto. Podemos elegir, por ejemplo, dos polos opuestos de la esfera. En el caso del pelo, lo vemos claramente en las personas que se peinan con raya.

2. Página 110

El módulo sería la longitud del pelo, la dirección vendría definida por la posición del mismo y el sentido sería desde la raíz hasta la punta.

3. Página 110

Un círculo sí lo podremos cubrir completamente porque es una superficie plana.

4. Página 110

Tomamos la superficie terrestre que podemos considerar similar a una esfera. Los vectores son la dirección que lleva el viento en cada punto de dicha superficie en un momento determinado y esta cambia según sopla el viento.

Según el teorema, siempre habrá un punto donde no hay viento, llamado ojo del huracán, y siempre hay un huracán en algún punto de la Tierra.

5. Página 110

Los tornados y la formación de nubes.