

# Límites y continuidad

## ACTIVIDADES

### 1. Página 162

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$$

### 2. Página 162

$$\left| \frac{3x}{x-5} - 3 \right| = \left| 3 \left( \frac{x}{x-5} - 1 \right) \right| = 3 \left| \frac{5}{x-5} \right| < \varepsilon \rightarrow \frac{15}{|x-5|} < \varepsilon \rightarrow 15 < \varepsilon |x-5| \rightarrow |x-5| > \frac{15}{\varepsilon} \rightarrow x > \frac{15}{\varepsilon} + 5$$

Para  $\varepsilon = 0,001$ :

$$x_0 = \frac{15}{0,001} + 5 = 15005$$

Tomando  $x = 15006$ :

$$|f(15006) - 3| \approx 0,00099 < 0,001$$

### 3. Página 163

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

### 4. Página 163

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a)  $f(x) = x^2 - x + 1$       d)  $f(x) = x^3 - x$

b)  $f(x) = x - x^2$       e)  $f(x) = \cos x$

c)  $f(x) = x^2 + x - 4$       f)  $f(x) = 1 - \operatorname{sen} 2x$

### 5. Página 164

a)  $2 + (+\infty) = +\infty$       c)  $2 \cdot (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

b)  $2 + (-\infty) = -\infty$       d)  $2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

### 6. Página 164

a)  $2^{+\infty} + (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

b)  $2^{-\infty} + (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

c)  $(+\infty)^2 + (+\infty) = +\infty$

d)  $(-\infty)^2 \cdot (+\infty) = +\infty$

7. Página 165

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -8 + \infty = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) : g(x)] = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) : \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = \frac{-8}{+\infty} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \sqrt[3]{-8} = -2$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{g(x)} = \sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \sqrt[4]{+\infty} = +\infty$

8. Página 165

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) - \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = -\infty - \frac{4}{9} = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = (-\infty) \cdot \left( \frac{4}{9} \right) = -\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[4]{f(x)} = \sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \sqrt[4]{-\infty}$  (No existe en  $\mathbb{R}$ )

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

9. Página 166

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = (+\infty)^5 = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = \frac{1}{-\infty} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = \frac{1}{+\infty} = 0$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = -\infty$

10. Página 166

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = 5^{+\infty} = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{\frac{1}{x}} = 5^{\frac{1}{+\infty}} = 5^0 = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5})^x = (\sqrt{5})^{+\infty} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = 5^{+\infty} = +\infty$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5})^{\frac{1}{x}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{+\infty}} = (\sqrt{5})^0 = 1$

11. Página 167

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 7}{x + 13} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{-2}{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x}{9 + 2x^2} = \frac{4}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 2$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1)^2 - x^2}{4 - x^2} = \frac{1}{-1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = -\infty$

12. Página 167

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 - x + 2}{5x - 1} \right)^2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2}{5x} \right)^2 = \frac{9}{25} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \frac{9}{25} \cdot (+\infty) = +\infty \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2}{2x^2 + 15} \right)^3 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 15}{x^2 - 2} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2}{x^2} \right)^3 = 2^3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6}{x^6} = 8 \cdot 1 = 8 \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - 3x}{2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{2x} = \frac{a}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases} \\
 \text{Si } a = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - 3x}{2x - 1} &= -\frac{3}{2} \\
 \text{d) Si } a \neq -2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x - (a+2)x^2} &= \frac{1}{-(a+2)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = -\frac{1}{a+2} \\
 \text{Si } a = -2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x - (a+2)x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x} = +\infty
 \end{aligned}$$

13. Página 168

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1} &= \frac{1}{2} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} &= +\infty \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} &= +\infty \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}} &= +\infty
 \end{aligned}$$

14. Página 168

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x} &= 1 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{6+x}}{2x+4} &= 1 \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \sqrt{3x-2}}{2x} &= \frac{7}{2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + 2x}{6x-3} &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

15. Página 169

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x}{x-3} - \frac{3x^2 - 1}{1+3x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 3x^3 + 2x + 6x^2 - (3x^3 - 9x^2 - x + 3)}{x + 3x^2 - 3 - 9x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{16x^2}{3x^2} \right) = \frac{16}{3} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \sqrt{4x^3 + x + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (4x^3 + x + 1)}{x + \sqrt{4x^3 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^3}{\sqrt{4x^3}} = -\infty \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2 + x + 1 - 4x^2)}{(\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2 - (x^2 - 2x)}{(\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = 1
 \end{aligned}$$

16. Página 169

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax - x^2}{\sqrt{x^2 + ax} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2 + ax} + x} = \frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + bx - 3} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + bx - 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + bx - 3} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx - 3}{\sqrt{4x^2 + bx - 3} + 2x} = \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \rightarrow b = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} - cx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 7 - c^2x^2}{\sqrt{9x^2 + 7} + cx} = 0 \rightarrow c = 3$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{dx^2 + x - 5} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{dx^2 + x - 5 - 4x^2}{\sqrt{dx^2 + x - 5} + 2x} = +\infty \rightarrow d > 4$$

17. Página 170

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{x+2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x+3}\right)(x+2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+4}{x+3}\right)} = e^2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{x^2-1}\right)^{x+2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{x^2-1}\right)(x+2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+4x}{x^2-1}\right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{4x}{2x+1}\right)^{x-3} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{4x}{2x+1}\right)(x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4x}{2x+1}\right)(x-3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{2x+1}\right)(x-3)} = e^1 = e$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3x^2-9}{6x^2+5}\right)^{2x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3x^2-9}{6x^2+5}\right)(2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2-9}{6x^2+5} + \frac{1}{2}\right)(2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-23}{12x^2+10}\right)(2x+1)} = e^0 = 1$$

18. Página 170

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2}{2-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^2}{2-x}\right)} = e^0 = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{\frac{x^3}{2-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{x^2-5}\right)\left(\frac{x^3}{2-x}\right)} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)^{\frac{x^4+x}{x^3-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^4+x}{x^3-1}\right)} = e^1 = e$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)^{\frac{x^2+x}{x^3-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+3x}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-7}{7+3x^2}\right)\left(\frac{x^2+x}{x^3-1}\right)} = e^0 = 1$$

19. Página 171

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$$

20. Página 171

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2$$

21. Página 172

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \frac{2}{-1} = -2 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \frac{3}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \frac{-2+2}{4-1} = 0 & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) &= \frac{\sqrt{2}+2}{1} = \sqrt{2}+2
 \end{aligned}$$

22. Página 172

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x). \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) &= 1+1=2 \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= 1+\frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 1+\infty = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 1-\infty = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x). \\
 \text{d) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)^{-1} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\operatorname{tg}(x)) = 1+0 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1
 \end{aligned}$$

23. Página 173

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1}. \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+4x+4)}{(x+2)(x^2-4x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4} = \frac{0}{16} = 0 \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2-x)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = \frac{2}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2-x)}{(x-2)} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}. \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-1}{x+1} = \frac{-1}{2} \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

24. Página 173

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x} \rightarrow \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{1/2}}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{-\sqrt{x-1}} \rightarrow \text{No existe.} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-\sqrt{x-1}} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{1-x}.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2+x}{\sqrt{2+x}\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} = \frac{0}{2} = 0$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x-3}} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x-3}} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)^{1/2}} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-3)^{1/2}}{(x-3)} = -\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^{1/2} = 0$$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3}\sqrt{x-3}}{-x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{6}}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}} \rightarrow \text{No existe.} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+3}}{-x\sqrt{x-3}} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x-x^2}.$$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(1+x)(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(1+x)(1+\sqrt{x})} = -\frac{1}{4}$$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{(x-2)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)(x-2)^{1/2}}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)(x-2)^{1/2} = 0$$

25. Página 174

$\nexists f(-2) = \frac{1}{0} \rightarrow$  La función no es continua en  $x = -2$ .

$\nexists f(2) = \frac{5}{0} \rightarrow$  La función no es continua en  $x = 2$ .

26. Página 174

Expresamos la función como una función definida a trozos:  $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ x+4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-1) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \rightarrow$  Existe  $f(-1)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x-4) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x) = -3 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3$$

$f(-1) = -3 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow$  La función es continua en  $x = -1$ .

$f(2) = 2 \cdot 3 - 0 = 6 \rightarrow$  Existe  $f(2)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+4) = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$$

$f(2) = 6 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow$  La función es continua en  $x = 2$ .

**27. Página 175**

Si  $x < 0 \rightarrow f(x) = 1 - x^2 \rightarrow f(x)$  es continua en  $(-\infty, 0)$ .

Si  $0 < x < 2 \rightarrow f(x) = \sqrt{4x-1} \rightarrow f(x)$  no está definida en  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ . Es continua en  $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ .

Si  $x > 2 \rightarrow f(x) = x + 1 \rightarrow f(x)$  es continua en  $(2, +\infty)$ .

Si  $x = 0 \rightarrow f(0) = 1 - 0 = 1 \rightarrow$  Existe  $f(0)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4x-1} \rightarrow \text{No existe.} \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

La función no es continua en  $x = 0$ .

Si  $x = 2 \rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3 \rightarrow$  Existe  $f(2)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4x-1} = \sqrt{7} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La función no es continua en  $x = 2$ .

**28. Página 175**

Si  $x < 3 \rightarrow f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f(x)$  es continua en  $(-\infty, 3)$ .

Si  $x > 3 \rightarrow f(x) = \frac{x+m}{x} \rightarrow f(x)$  es continua en  $(3, +\infty)$ .

Si  $x = 3 \rightarrow f(3) = 9 - 4 = 5 \rightarrow$  Existe  $f(3)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4) = 5 \qquad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+m}{x} = 1 + \frac{m}{3}$$

$f(x)$  es continua en  $x = 3$  si:

$$f(3) = 5 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow 5 = 1 + \frac{m}{3} \rightarrow m = 12$$

**29. Página 176**

$f(x)$  es suma de funciones continuas en  $\mathbb{R}$ ; por lo tanto, es continua en  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) \text{ es continua en } [-\pi, 0]. \qquad f(-\pi) = 1 - \pi - 1 = -\pi < 0 \qquad f(0) = 1 + 0 + 1 = 2 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un  $c \in (-\pi, 0)$  tal que  $f(c) = 0$ , es decir, corta al eje de abscisas en  $x = c$ .

**30. Página 176**

$P(x)$  es continuo en  $\mathbb{R}$  por ser un polinomio.

$$\text{Si } a_n > 0: \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = -\infty < 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty > 0$$

$$\text{Si } a_n < 0: \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = +\infty > 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = -\infty < 0$$

Por ser  $n$  impar.

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $P(c) = 0$ , es decir,  $c$  es una solución de  $P(x) = 0$ .

**31. Página 177**

La función  $f(x)$  es suma de dos funciones continuas en  $\mathbb{R}$ ; por tanto, es continua en  $\mathbb{R}$ .

Entonces,  $f(x)$  es continua en el intervalo cerrado  $[0, 4]$  y, además:

$$f(0) = 1 \text{ y } f(4) = -1,41$$

Por el teorema de los valores intermedios, la función  $f(x)$  tomará en el intervalo  $(0, 4)$  todos los valores comprendidos entre 1 y  $-1,41$ , entre ellos el valor  $-1$ , es decir, existe  $x \in (0, 4)$  tal que  $f(x) = -1$ .

**32. Página 177**

La función  $f(x)$  es continua en  $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ ; por tanto,  $f(x)$  es continua, por ejemplo, en  $[0,1; 1]$ . Entonces, por el teorema de Weierstrass, existe al menos un punto en ese intervalo donde la función alcanza su valor máximo absoluto y otro donde toma su valor mínimo absoluto.

**SABER HACER**

**33. Página 178**

$$x^2(f(x+1) - f(x)) = x^2 \left( \frac{2x+2}{x+2} - \frac{2x}{x+1} \right) = \frac{2x^2}{x^2+3x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(f(x+1) - f(x))] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+3x+2} = 2$$

**34. Página 178**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) \rightarrow (+\infty - \infty) \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$$

**35. Página 178**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^4 + ax^3}{2 + x^4} \right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}} \rightarrow 1^{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^4 + ax^3}{2 + x^4} \right)^{\frac{3x^3+1}{x^2-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^4 + ax^3}{2 + x^4} - 1 \right) \left( \frac{3x^3+1}{x^2-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{ax^3 - 2}{2 + x^4} \right) \left( \frac{3x^3+1}{x^2-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3ax^6}{x^6}} = e^{3a}$$

$$e^{3a} = e^3 \rightarrow a = 1$$

**36. Página 179**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{3x} + 7e^{-5x}}{2e^{-5x} - 4e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{3x} + 7e^{-5x}}{e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + 7e^{-8x}}{2e^{-8x} - 4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{3x} + 7e^{-5x}}{2e^{-5x} - 4e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{3x} + 7e^{-5x}}{e^{-5x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{8x} + 7}{2 - 4e^{8x}} = \frac{7}{2}$$



37. Página 179

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^-} 2^{\frac{2x}{5x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^-} 2^{\frac{2}{5x+1}} = 2^\infty$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^-} \frac{2x}{5x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^-} \frac{2}{5x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^+} \frac{2x}{5x^2+x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^+} \frac{2}{5x+1} = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{2x}{5x^2+x} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} 2^{\frac{2x}{5x^2+x}}.$$

38. Página 179

a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x-25}{\sqrt{x-1}-2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} 5(\sqrt{x-1}+2) = 20$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{\sqrt{2-x}-1} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} [-(\sqrt{2-x}+1)] = -2$$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{3-x}-2} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{3-x}-2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{3-x}+2)}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1} [-(\sqrt{3-x}+2)] = -4$$

d)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{\sqrt{2x-6}-4} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{0}{-2} = 0$

39. Página 180

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} = \frac{14 - 2a}{0}$$

Si  $a > 7$ , entonces:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Si  $a < 7$ , entonces:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - ax + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Si  $a = 7$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{(x-2)(x^2-2x-8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-8} = -\frac{5}{8}$$

**40. Página 180**

Si  $x < 0 \rightarrow f(x) = ax^2 + b$

Por ser una función polinómica, es continua en  $\mathbb{R}$  y, por tanto, en el intervalo  $(-\infty, 0)$ .

Si  $0 \leq x < 1 \rightarrow f(x) = x - a$

Por ser una función polinómica, es continua en  $\mathbb{R}$  y, por tanto, en el intervalo  $(0, 1)$ .

Si  $x \geq 1 \rightarrow f(x) = \frac{a}{x} + b$

Es una función racional. No está definida en  $x = 0$ . Es continua en  $(1, +\infty)$ .

Para  $x = 0 \rightarrow f(0) = -a$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + b) = b \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - a) = -a$$

Para  $x = 1 \rightarrow f(1) = a + b$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - a) = 1 - a \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{a}{x} + b \right) = a + b$$

Para  $x = 0 \rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow b = -a$

Para  $x = 1 \rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow a + b = 1 - a$

$$\left. \begin{array}{l} b = -a \\ a + b = 1 - a \end{array} \right\} \rightarrow 0 = 1 - a \rightarrow a = 1, b = -1$$

**41. Página 181**

$f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ ; por tanto, es continua en el intervalo  $[0, \pi]$ , además:

- $f(0) = 2 + 1 = 3$
- $f(\pi) = -2 + 1 = -1$

La función es continua en el intervalo cerrado y toma valores de distinto signo en los extremos de ese intervalo; entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, \pi)$  tal que  $f(c) = 0$ .

**42. Página 181**

- $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$  y, por tanto, también en el intervalo  $[0, 1]$ .
- $g(x)$  es continua en el intervalo  $[-1, +\infty)$  y, por tanto, también en el intervalo  $[0, 1]$ .

$f(0) = 1; f(1) = 3 \quad g(0) = 2; g(1) = 2\sqrt{2}$

$f(0) = 1 < g(0) = 2$  y  $f(1) = 3 > g(1) = 2\sqrt{2}$ , es decir, en  $x = 0$ , la función  $f(x)$  está por debajo de la función  $g(x)$ , y en  $x = 1$ , la función  $f(x)$  está por encima de  $g(x)$ .

Por el teorema de los valores intermedios (Darboux), la función  $f(x)$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(0) = 1$  y  $f(1) = 3$ , y la función  $g(x)$  toma todos los valores comprendidos entre los valores  $g(0) = 2$  y  $g(1) = 2\sqrt{2}$ .

Entonces, las funciones se cortarán en algún punto del intervalo  $(0, 1)$ .

43. Página 181

$$3^{-x+2} - 4 = 1 \rightarrow 3^{-x+2} - 5 = 0 \rightarrow g(x) = 3^{-x+2} - 5$$

Demostrar que  $f(x)$  toma el valor 1 es equivalente a demostrar que la función  $g(x)$  toma el valor 0.

La función  $g(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ ; por tanto, también lo es, por ejemplo, en el intervalo cerrado  $[0, 2]$ .

- $g(0) = 4 > 0$
- $g(2) = -4 < 0$

La función  $g(x)$  es continua en el intervalo  $[0, 2]$  y, además, toma valores de distinto signo en sus extremos; entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $x_0 \in (0, 2)$  tal que  $g(x_0) = 0$ .

ACTIVIDADES FINALES

44. Página 182

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$       |
| b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ | d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ |

45. Página 182

- |   |   |  |
|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$           | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$ | i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$       |
| b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$           | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$ | j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$ | g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = +\infty$     | k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{x^2} = +\infty$                    |
| d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$ | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x = 0$           | l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{x^2} = +\infty$                    |

46. Página 182

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty$      | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = -\infty$ | i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5} = 0$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty$      | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = -\infty$ | j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-2x+3}{-x^3-3x^2-5} = 0$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{1}{3}$ | g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = 1$     | k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x-2} = 0$               |
| d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{1}{3}$ | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = 1$     | l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16}{x-2} = 0$               |

47. Página 182

- |   |  |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$          | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+3}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$          |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+3}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$  | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+3}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2$  |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3+3}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2} = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3+3}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2} = -\infty$ |

48. Página 182

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+2}}{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x^2-x+2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2(2\sqrt{x^2})} = 2$$

49. Página 182

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,7)^{3x+2} = (0,7)^{+\infty} = 0$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 0,01x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,01x^2) = -\infty$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-7)^{2-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x)^{-x} = 0$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-2)^2 - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x+4) = -\infty$

50. Página 182

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 6x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{(x + \sqrt{x^2 - 6x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{(x + \sqrt{x^2})} = \frac{6}{2} = 3$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 6x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{(x + \sqrt{x^2 - 6x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{(x + \sqrt{x^2})} = \frac{6}{2} = 3$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^2 - 6x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 6x}{x^2 + \sqrt{x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = +\infty$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \sqrt{x^2 - 6x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - x^2 + 6x}{x^2 + \sqrt{x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2} = +\infty$

51. Página 182

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + 2x^2} - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4 + 2x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4} + x^2} = 1$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 + 2x^2} - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4 + 2x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4} + x^2} = 1$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - x^4}{\sqrt{x^2 + 3x} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4}{2x^2} = -\infty$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - x^4}{\sqrt{x^2 + 3x} + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4}{2x^2} = -\infty$

52. Página 182

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{x}} = e^3$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x}\right)^{(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x-3}{x}\right)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{(1-x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-3x}{x}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x}\right)^{(1-x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3+3x}{x}} = e^3$

53. Página 182

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 + x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 2}{2(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 + x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{2(2\sqrt{x^2})} = -1$$

54. Página 182

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3 - 5} - \sqrt{x^4 - 3x}}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5 + 3x}{(x + 4)(\sqrt{x^4 + 2x^3 - 5} + \sqrt{x^4 - 3x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x(2\sqrt{x^4})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x(2\sqrt{x^4})} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 3}} = 2$$

55. Página 182

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + 3x^2 - 2} - x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + 3x^2 - 2} - (x^2 - 3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 11}{\sqrt{x^4 + 3x^2 - 2} + (x^2 - 3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}$$

56. Página 182

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}}{\frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{4(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 2$$

57. Página 182

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x} - \frac{x^2 + 2x}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3 - 2x^3 + 6x^2}{(x^2 - 3x)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$$

58. Página 182

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x + \sqrt{2x}} - \sqrt{2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x + \sqrt{2x}} + \sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{2}$$

59. Página 182

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 8} - \sqrt{x^2 + mx + 7}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-m)x - 15}{\sqrt{x^2 + 3x - 8} + \sqrt{x^2 + mx + 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-m)x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{3-m}{2} = -1 \rightarrow m = 5$$

60. Página 182

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-mx^2 + 5}{2x^2 + \sqrt{4x^4 + mx^2 - 5}} = \frac{-m}{4} = 2 \rightarrow m = -8$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 4x} - 3x + m) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 4x} - (3x - m)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 4x - (9x^2 - 6mx + m^2)}{\sqrt{9x^2 + 4x} + (3x - m)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4 + 6m)x}{6x} = \frac{4 + 6m}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow m = -\frac{1}{6}$$

61. Página 182

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3+2x}{1+2x} \right)^{x-6} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{1+2x} \right)(x-6)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-12}{1+2x} \right)} = e^1 = e$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x} \right)^{\frac{x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-6x+2}{x^2+3x} \right) \left( \frac{x}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-6x^2}{2x^2} \right)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3-3x}{1+2x^3} \right)^{\frac{x^2-3}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3x-1}{1+2x^3} \right) \left( \frac{x^2-3}{3} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3x^3}{6x^3} \right)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+4x}{4x+7} \right)^{\frac{x^3+1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-6}{4x+7} \right) \left( \frac{x^3+1}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-6x^3}{4x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-3x}{2} \right)} = e^{-\infty} = 0$
- e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2+6}{6x+3x^2} \right)^{\frac{x}{4}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-6x}{6x+3x^2} \right) \left( \frac{x}{4} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-6x^2}{12x^2} \right)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^4-2}{(2x^2-1)^2+1} \right)^{\frac{x^3-3x}{x+2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^2-4}{4x^4-4x^2+2} \right) \left( \frac{x^3-3x}{x+2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x^5}{4x^5} \right)} = e^1 = e$

62. Página 183

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2+3}{mx+2x^2} \right)^{x+2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{+3-mx}{mx+2x^2} \right)(x+2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-mx^2}{2x^2} \right)} = \frac{1}{e} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-mx^2}{2x^2} \right) = -1 \rightarrow m = 2$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+3}{2+5x} \right)^{\frac{x^2-2}{8+mx}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2+5x} \right) \left( \frac{x^2-2}{8+mx} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{5mx^2} \right)} = e^{\frac{1}{5m}} = \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{1}{5m} = \ln\left(\frac{7}{10}\right) \rightarrow m = \frac{1}{5 \ln\left(\frac{7}{10}\right)}$

63. Página 183

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x+10}{3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3^x}{3^{x+1}} + \frac{10}{3^{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{10}{3^{x+1}} \right) = \frac{1}{3}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^x+10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 3}{3} = 3$

64. Página 183

- a)  $f(x) = \begin{cases} -x-2-(-x+2) & \text{si } x < -2 \\ x+2-(-x+2) & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x+2-(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 = -4$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4$
- b)  $f(x) = \begin{cases} x-(3-2x) & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ x-(-3+2x) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ -x+3 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-3) = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+3) = -\infty$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x-2} & \text{si } x < -\frac{3}{2} \\ -\frac{2x+3}{x-2} & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ \frac{2x+3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x-2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-2} = 2$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -\frac{x-3}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-3}{1-x} & \text{si } 1 < x < 3 \\ -\frac{x-3}{1-x} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{x-3}{1-x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x-3}{1-x} \right) = 1$$

65. Página 183

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

66. Página 183

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = 0,7$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2,9$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

67. Página 183

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} 2^{\ln x} = 2^{\ln 1} = 2^0 = 1$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} 3^{\ln(x-1)} = 3^{\ln 1} = 3^0 = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow e} 2^{\ln x} = 2^{\ln e} = 2^1 = 2$

e)  $\lim_{x \rightarrow e+1} 3^{\ln(x-1)} = 3^{\ln e} = 3^1 = 3$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} 2^{\ln x} = 2^{\ln \frac{1}{e}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{e+1}{e}} 3^{\ln(x-1)} = 3^{\ln \left( \frac{e+1-e}{e} \right)} = 3^{\ln \left( \frac{1}{e} \right)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

68. Página 183

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{4+1}{\sqrt{4-3}} = 5$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{-4+1}{\sqrt{4-3}} = -3$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{6+1}{\sqrt{9-3}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$

69. Página 183

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} (\log_2(x-3)+1) = \log_2 1 + 1 = 0 + 1 = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (\log_2(x-3)+1) = \log_2 \left( \frac{1}{2} \right) + 1 = -1 + 1 = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 11} (\log_2(x-3)+1) = \log_2(8) + 1 = 3 + 1 = 4$

d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{13}{4}} (\log_2(x-3)+1) = \log_2 \left( \frac{1}{4} \right) + 1 = -2 + 1 = -1$

70. Página 183

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \left( \frac{1}{x-2} + \log_{\frac{1}{2}} x \right) = \frac{1}{-\frac{7}{4}} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{7} + 2 = \frac{10}{7}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{1}{x-2} + \log_{\frac{1}{2}} x \right) = \frac{1}{6} + \log_{\frac{1}{2}} 8 = \frac{1}{6} - 3 = -\frac{17}{6}$$

71. Página 183

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = \frac{-18}{0} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x-12}{x^2-3x-4} = \frac{12}{0} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 4} f(x).$$

72. Página 183

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} (m(x) + n(x) + p(x)) = +\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{p(x)}{m(x)} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 5} (m(x) \cdot n(x) - p(x)) = -\infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{n(x)}{p(x)} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} (m(x) \cdot p(x)) = +\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 5} (m(x))^{n(x)} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{n(x)}{m(x)} = 0$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 5} (m(x))^{p(x)} = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{m(x)}{n(x)} = \frac{4}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 5} (n(x))^{p(x)} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 5} (n(x) \cdot p(x)) = 0 \cdot (+\infty) \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 5} (p(x))^{n(x)} = (+\infty)^0 \rightarrow \text{Indeterminación}$$

73. Página 183

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x) = +\infty$$



74. Página 184

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$       b)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$       c)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$

75. Página 184

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -1$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -\infty$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9} = -\infty$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -1$   
 f)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9} = +\infty$   
 h)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

76. Página 184

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{4x^2-4x+1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{0} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{4x^2-4x+1}.$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{(x-3)^2}.$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{3x^2+x-10}{9x^2-30x+25} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{(3x-5)(x+2)}{(3x-5)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{x+2}{3x-5} = \frac{11}{0} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^-} \frac{x+2}{3x-5} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^+} \frac{x+2}{3x-5} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{3x^2+x-10}{9x^2-30x+25}.$

77. Página 184

- a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{2}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x-2x^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{x} = -2$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^3 - x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2x+3} = \frac{1}{5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+2} = -\frac{6}{5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} \frac{3x^2 + x - 10}{9x - 15} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} \frac{(3x-5)(x+2)}{3(3x-5)} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} \frac{x+2}{3} = \frac{11}{9}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{x^3 - 2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{x^3(1-2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{1-2x} = 5$$

78. Página 184

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-3} = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x} = \frac{-2}{0} = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x} = -\infty \left\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2 - 1}{x^2}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3x^2}{3x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(4-3x)}{x(3+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-3x}{3+x} = \frac{4}{3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{4+2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4+2x} = -\frac{1}{4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^3-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^3-3} = \frac{4}{5}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)^2 - x - 5}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x - 4}{(x-3)(x-1)} = \frac{-4}{0} = \infty \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x - 4}{(x-3)(x-1)} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{(x-3)(x-1)} = -\infty \left\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4x+3} \right).$$

79. Página 184

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{3x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{3(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{6}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2}+2) = 4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1 + \sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (2\sqrt{x}+2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x+3)(x-3)(1 + \sqrt{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x+3)(1 + \sqrt{x-2})} = -\frac{1}{12}$$

80. Página 184

- a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2} = 24$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+5}{8x-\sqrt{9x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5(x+1)(8x+\sqrt{9x^2+1})}{55x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{55x^2}{55x^2} = 1$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)}{(x+4)(x-4)(1+\sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(x+4)(1+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{16}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(x-1)\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} [(1-x)\sqrt{x+1}] = 0$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -1$
- f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{3}{4}$
- g)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{13-4x} - \sqrt{28+x}}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-5(x+3)}{\sqrt{x+3}(\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-5(x+3)\sqrt{x+3}}{(x+3)(\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x})} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-5\sqrt{x+3}}{\sqrt{13-4x} + \sqrt{28+x}} = 0$
- h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{x\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{x+2}}{x} \right) = 1$

81. Página 184

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \frac{12}{-4} = -3$
- c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - 7x - 3)}{(x+2)^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 7x - 3}{(x+2)(x-3)} = \frac{19}{0} = \infty \rightarrow$   
 $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 - 7x - 3}{(x+2)(x-3)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 7x - 3}{(x+2)(x-3)} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x^3 + x^2 - 8x - 12}.$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2)(x-3)(2x-1)}{(x+2)^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x+2} = 1$
- e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$
- f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = 2$

82. Página 184

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x^2)}{x^2 + 3 - 4x^4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x^2)}{(x-1)(x+1)(-4x^2 - 3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(\sqrt{x^2 + 3} + 2x^2)}{-4x^2 - 3} = \frac{4}{7} \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x^2)}{x^2 + 3 - 4x^4} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2x^2)}{(x-1)(x+1)(-4x^2 - 3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(\sqrt{x^2 + 3} + 2x^2)}{-4x^2 - 3} = -\frac{4}{7} \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x^2} &= \frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x^2} &= \frac{6}{\sqrt{7} - 8} = \frac{6(\sqrt{7} + 8)}{-57} = -\frac{2\sqrt{7} + 16}{19} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-2} = -\infty \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-2} = +\infty
 \end{aligned}$$

83. Página 184

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[6]{x} = 0 \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \rightarrow \text{No existe.} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[6]{x}}. \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-1}} = 0 \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= -\frac{\sqrt{2} - 2}{2} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} + 3) = 6
 \end{aligned}$$

84. Página 184

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 + \frac{1}{x^4} \right) = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 2 + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2 + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^{x-3} = (4)^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{x^2} = 1^0 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x-2}{4x-3} \right)^{4x^2-1} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4x-3} \right) (4x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x^2-1}{4x-3} \right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x+3}{3x} \right)^{3x} = \left( \frac{4}{3} \right)^{+\infty} = +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x+5} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-5}{x+5} \right) x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{x+5}} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

85. Página 184

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-2}{x+2} \right)^{-x^2+3} = 3^{-\infty} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-2}{x^2+3x} \right)^{x^2+4} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-2-3x}{x^2+3x} \right) (x^2+4)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-3x^3}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x)} = e^{-\infty} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2+1}{3x^2-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3x^2-1} \right) \left( \frac{x^2+1}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{3x^3} \right)} = e^0 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-3}{3+2x} \right)^{\frac{2x^2-1}{1+3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-6}{3+2x} \right) \left( \frac{2x^2-1}{1+3x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-12x^2}{6x^2} \right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+x^2}{x^2-6x-2} \right)^{\frac{1-x^3}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{8x+2}{x^2-6x-2} \right) \left( \frac{1-x^3}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-8x^4}{x^4} \right)} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\frac{7x^2+1}{2+7x^2}} \right)^{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{7x^2+1}{2+7x^2} \right)^{\frac{x^2+3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2+7x^2} \right) \left( \frac{x^2+3}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-x^2}{7x^3} \right)} = e^0 = 1$$

86. Página 184

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( (\cos^2 x) - 1 \right) \left( \frac{1}{\sin x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x) - 1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin x)} = e^0 = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} (2x+1)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (2x) \left( \frac{1}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x}{x} \right)} = e^2$$

87. Página 184

Si  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - ax + 3}{x - 3} \neq \infty \rightarrow (x - 3) \text{ divide a } x^2 - ax + 3 \rightarrow 3^2 - 3a + 3 = 0 \rightarrow a = \frac{12}{3} = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 2$$

88. Página 185

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - ax + 3}{x^2 + 1} = \frac{7 + 2a}{5} = 5 \rightarrow 2a = 25 - 7 \rightarrow a = 9$$

89. Página 185

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1 + 2x}{x + 4} \right)^{\frac{m}{3-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x-3}{x+4} \right) \left( \frac{m}{3-x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{-m}{x+4} \right)} = e^{-\frac{m}{7}} = e \rightarrow m = -7$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 2}{3x - 4} \right)^{\frac{m}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{3x - 4} \right) \left( \frac{m}{x-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-2)(x-1)}{(3x-4)(x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-1)}{3x-4}} = e^{\frac{m}{2}} = e^2 \rightarrow m = 4$

90. Página 185

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - ax} - \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ax - 2}{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ax}{2\sqrt{x^2}} = \frac{-a}{2} = 3 \rightarrow a = -6$$

91. Página 185

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{mx+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1-m)x - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{mx+6})} \neq \infty \rightarrow 2 \text{ es raíz de } (1-m)x - 4.$$

$$(1-m)2 - 4 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{-x+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{-x+6})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{-x+6}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

92. Página 185

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} x = 0$

93. Página 185

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (-x^2 + 1) = -3$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} = 1$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+1} = \sqrt{3}$

b)  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x^2 + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (\sqrt{x+1}) = 0 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$

f)  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 7) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

94. Página 185

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + 1) = 1$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} (-3x + 2) = -1$

b)  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (2^x + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-3x + 2) = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

e)  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x}{x-1} = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x + 2) = -4 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} (2^x + 1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x-1} = -2$

95. Página 185

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2} = -1$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2} = \frac{-3}{0} = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{(x+1)(-x+2)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{(x+1)(-x+2)} = -\infty \end{cases} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2}.$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{-(x+1)} = -\frac{4}{3}$

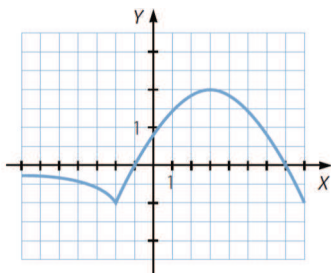
$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{-(x+1)} = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{Por lo tanto, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{4}{3}.$

e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2} = -\frac{5}{4}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{-x^2 + x + 2} = -1$

96. Página 185

Respuesta abierta, por ejemplo:



97. Página 185

a)  $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow$  La función es continua en  $x = 0$ .

$f(2) = 4 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow$  La función es continua en  $x = 2$ .

b) No existe  $f(0)$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,5 \rightarrow$  Existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,5$ .

La función no es continua en  $x = 0$ ; tiene una discontinuidad evitable.

$f(2) = 2,5 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

La función es continua en  $x = 2$ .

c) No existe  $f(1)$ .

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow$  No existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

La función no es continua en  $x = 1$ ; tiene una discontinuidad de salto finito.

d)  $f(-1) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow$  La función es continua en  $x = -1$ .

$f(2) = 1,5$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2,5 \rightarrow$  Existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2,5$ .

$f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2,5$

La función no es continua en  $x = 2$ ; tiene una discontinuidad evitable.

e) No existe  $f(-2)$ .

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow$  No existe  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .

La función no es continua en  $x = -2$ ; tiene una discontinuidad de salto infinito.

$f(2) = 3$ .

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow$  No existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

La función no es continua en  $x = -2$ ; tiene una discontinuidad de salto finito.

f)  $f(1) = -1$ .

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5 \end{array} \right\} \rightarrow$  No existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

La función no es continua en  $x = 1$ ; tiene una discontinuidad de salto finito.



98. Página 185

a) La función es polinómica; por tanto, es continua en  $\mathbb{R}$ .

b) La función es continua en  $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ . Estudiamos la discontinuidad en los ceros del denominador,  $x = 2$  y  $x = 3$ .

No existe  $f(2)$ . Además: 
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La función no es continua en  $x = 2$ ; tiene una discontinuidad de salto infinito.

No existe  $f(3)$ . Además: 
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La función no es continua en  $x = 3$ ; tiene una discontinuidad de salto infinito.

c)  $x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow (x + 2)(x - 2) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

La función es continua en su dominio, el intervalo  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ .

d)  $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow (2 + x)(2 - x) \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

La función es continua en su dominio, el intervalo  $[-2, 2]$ .

e) No existe  $f(0)$ . Además: 
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

La función es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 0$ .

f)  $2 - x > 0 \rightarrow x < 2$

La función es continua en su dominio, el intervalo  $(-\infty, 2)$ .

g)  $y = 2|x - 1| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - 2x & \text{si } x < 1 \end{cases} \rightarrow \text{Es continua en todos los puntos salvo, quizás, en } x = 1:$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2|x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - 2x) = 0; \lim_{x \rightarrow 1^+} 2|x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2|x - 1| = 0 = y(0)$$

La función es continua en  $\mathbb{R}$ .

g)  $y = |x - 3| + |x + 3| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -3 \\ 6 & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  Es continua en todos los puntos salvo, quizás, en  $x = -3$  o  $x = 3$ .

En  $x = -3$ :

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} (|x - 3| + |x + 3|) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (-2x) = 6; \lim_{x \rightarrow -3^+} (|x - 3| + |x + 3|) = \lim_{x \rightarrow -3^+} 6 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (|x - 3| + |x + 3|) = 6 = y(-3) \rightarrow \text{La función es continua en } x = -3.$$

En  $x = 3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (|x - 3| + |x + 3|) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (6) = 6; \lim_{x \rightarrow 3^+} (|x - 3| + |x + 3|) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (|x - 3| + |x + 3|) = 6 = y(3)$$

La función es continua en  $x = 3$  y, por tanto, en todo  $\mathbb{R}$ .

99. Página 185

a) Estudiamos la continuidad en  $x = 2$ , ya que la función es continua en el resto de puntos.

$$\text{No existe } f(2). \text{ Además: } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 2$ .

b)  $x^2 - 2x + 3 \neq 0$  para cualquier  $x$  real  $\rightarrow$  La función es continua en  $\mathbb{R}$ .

c) Estudiamos la continuidad en  $x = 1$ , que es el único cero del denominador.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

La función tiene en  $x = 1$  una discontinuidad de salto infinito.

d) Estudiamos la continuidad en  $x = -1$  y  $x = 3$ , que anulan el denominador.

No existe  $f(-1)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en  $x = -1$ .

$$\text{No existe } f(3). \text{ Además: } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 3$ .

e) Estudiamos la continuidad en  $x = -3$  y  $x = 1$ , que anulan el denominador.

$$\text{No existe } f(-3). \text{ Además: } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = -3$ .

No existe  $f(1)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

La función tiene una discontinuidad evitable en  $x = 1$ .

f) Estudiamos la continuidad en  $x = 0$  y  $x = 1$ , que anulan el denominador.

No existe  $f(0)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 0$ .

No existe  $f(1)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 1$ .

100. Página 185

$$a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \frac{(x+1)(x-2)}{-(x-2)}$$

El único punto donde  $f(x)$  puede ser discontinua es  $x = 2$ :

No existe  $f(2)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (-x-1) = -3$$

$f(x)$  tiene una discontinuidad evitable en  $x = 2$ .

$$b) \text{ Si definimos } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} & \text{si } x \neq 2 \\ -3 & \text{si } x = 2 \end{cases}, g(x) \text{ contiene a } f(x) \text{ y, además, es continua en } \mathbb{R}.$$

101. Página 186

a) El dominio de la función es  $[-5, 4) \cup (4, +\infty)$ ;  $f(x)$  presenta una discontinuidad evitable en  $x = 4$ .

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{18 - 6\sqrt{x+5}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6(3 - \sqrt{x+5})}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-6(x-4)}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-6}{3 + \sqrt{x+5}} = -1$$

$$b) \text{ Respuesta abierta. Por ejemplo: } g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -5 \\ f(x) & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ -1 & \text{si } x = 4 \\ f(x) & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

102. Página 186

a)  $f(x)$  presenta una discontinuidad evitable en  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x^2 - 2x + 1)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

103. Página 186

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)} \rightarrow \text{La función es continua en } \mathbb{R} - \{-2, -1\}.$$

$$\text{En } x = -2: \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x-2)}{x+1} = -4$$

$f(x)$  es discontinua evitable en  $x = -2$ .

$$\text{En } x = -1: \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - x^2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 - x^2}{(x+2)(x+1)} = \frac{3}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4 - x^2}{(x+2)(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4 - x^2}{(x+2)(x+1)} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$f(x)$  es discontinua de salto infinito en  $x = -1$ .

**104. Página 186**

Las funciones tienen la misma gráfica salvo en el punto  $x = -2$ . La primera es una recta y es continua, y la segunda está formada por dos semirrectas y no es continua en  $x = -2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x-1)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (2x-1) = -5$$

La discontinuidad de la segunda función en  $x = -2$  es evitable.

$$\text{Así, la segunda función es: } g(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < -2 \\ 2x-1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

**105. Página 186**

a) En  $x = -1$ , la función  $f(x) = -x$ ; por tanto, es continua.

En  $x = 0$ , existe  $f(0) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2$$

$f(x)$  tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 0$ .

En  $x = 3$ , no existe  $f(3)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+2) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 5 = 5$$

$f(x)$  tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 3$ .

b) En  $x = -1$ , existe  $f(-1) = -3$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (5x+2) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{x+6}{x^2} \right) = 5$$

$f(x)$  tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = -1$ .

En  $x = 0$ , no existe  $f(0)$ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+6}{x^2} = \frac{6}{0} = \infty \rightarrow & \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+6}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+6}{x^2} = +\infty \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$f(x)$  tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 0$ .

En  $x = 3$ , existe  $f(3) = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+6}{x^2} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2x - 2) = 1$$

$f(x)$  es continua en  $x = 3$ .

**106. Página 186**

Existe  $f(2)$ :  $f(2) = -\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(2-x)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{2}{3} = f(2) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

**107. Página 186**

Las tres funciones son polinómicas y, por tanto, continuas en su dominio.

Estudiamos la continuidad en  $x = 0$  y  $x = 2$ :

En  $x = 0$ , existe  $f(0) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

En  $x = 2$ , existe  $f(2) = 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3$$

$f(x)$  presenta una discontinuidad de salto finito en  $x = 2$ .

**108. Página 186**

No existe  $f(0)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

La función tiene una discontinuidad evitable en  $x = 0$ .

$$f(3) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 3$ .

**109. Página 186**

Estudiamos la continuidad de la función en  $x = 0$ ,  $x = 2$  y  $x = 3$ :

En  $x = 0$ , existe  $f(0) = e^0 = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$$

$f(x)$  es continua en  $x = 0$ .

En  $x = 2$ , existe  $f(2) = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^x = e^2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{3-x} = 2$$

$f(x)$  presenta una discontinuidad de salto finito en  $x = 2$ .

En  $x = 3$ , no existe  $f(3)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{3-x} = \frac{2}{0} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{3-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{3-x} = -\infty \end{array} \right\}$$

$f(x)$  presenta una discontinuidad de salto infinito en  $x = 3$ .

110. Página 186

$$a) f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Las funciones de ambos trozos son continuas en  $\mathbb{R}$ , por lo que solo puede ser discontinua en  $x = 0$ .

$$f(0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow \text{Es continua en } x = 0.$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x < -5 \\ x + 5 & \text{si } x \geq -5 \end{cases}$$

Las funciones de ambos trozos son continuas en  $\mathbb{R}$ , por lo que solo puede ser discontinua en  $x = -5$ .

$$f(-5) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = f(-5) \rightarrow \text{Es continua en } x = -5.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Las funciones de ambos trozos son continuas en  $\mathbb{R}$ , por lo que solo puede ser discontinua en  $x = \frac{3}{2}$ .

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow \text{Es continua en } x = \frac{3}{2}.$$

$$d) x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = -2; x = 3 \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 < x \leq 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Las funciones de cada trozo son continuas en  $\mathbb{R}$ . Solo puede ser discontinua en  $x = -2$  o en  $x = 3$ .

$$f(-2) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \rightarrow \text{Es continua en } x = -2.$$

$$f(3) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \rightarrow \text{Es continua en } x = 3.$$

$$e) 6 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{si } x \leq -\sqrt{6} \\ 6 - x^2 & \text{si } -\sqrt{6} < x \leq \sqrt{6} \\ x^2 - 6 & \text{si } x > \sqrt{6} \end{cases}$$

Las funciones de cada trozo son continuas en  $\mathbb{R}$ . Solo puede ser discontinua en  $x = -\sqrt{6}$  o en  $x = \sqrt{6}$ .

$$f(-\sqrt{6}) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}} f(x) = f(-\sqrt{6}) \rightarrow \text{La función es continua en } x = -\sqrt{6}.$$

$$f(\sqrt{6}) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}} f(x) = f(\sqrt{6}) \rightarrow \text{La función es continua en } x = \sqrt{6}.$$

111. Página 186

La función será continua en  $x = 2$  si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

Entonces la función es continua en  $x = 2$  si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

112. Página 186

a)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = 4$ :

Existe  $f(4) = 12$ .  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 4) = 12$   $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + a) = 4 + a$

$f(x)$  es continua  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 12 = 4 + a = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow a = 8$

b)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = 1$ :

Existe  $f(1) = 3 - a$ .  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - ax) = 3 - a$   $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + \ln x) = 2$

$f(x)$  es continua  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 - a = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow a = 1$

c)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = -2$ .

Existe  $f(-2) = 2$ .  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{2-x} = 2$   $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 3x + a) = 10 + a$

$f(x)$  es continua  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2 = 10 + a = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \rightarrow a = -8$

d)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = -1$ .

Existe  $f(-1) = -a$ .  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a}{x} = -a$   $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1) = 2$

$f(x)$  es continua  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -a = 2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \rightarrow a = -2$

e)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = 2$ .

Existe  $f(2) = 3a^2$ .  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3a^x = 3a^2$   $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{12}{x-1} = 12$

$f(x)$  es continua  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3a^2 = 12 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow a = 2$

f)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = 0$  o  $x = 2$ .

Existe  $f(0) = 1$ .  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a^2) = a^2$

$f(x)$  es continua  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = a^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow a = \pm 1$

Existe  $f(2) = 2a + 1$ .  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + a^2) = 2 + a^2$   $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + 1) = 2a + 1$

$f(x)$  es continua  $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 + a^2 = 2a + 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow a = 1$

Por tanto,  $f(x)$  será continua si  $a = 1$ .

g)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = a$ .

$$\text{Existe } f(a) = 2^a + 1. \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (2^x + 1) = 2^a + 1 \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 5 = 5$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2^a + 1 = 5 = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \rightarrow a = 2$$

h)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = 0$ .

$$\text{Existe } f(0) = 2 + a. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + a \cdot \cos x) = 2 + a \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2^{-x} + 6x - 3) = -2$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 + a = -2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow a = -4$$

i)  $f(x)$  es continua salvo, quizás, en  $x = 4$ .

$$\text{Existe } f(4) = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (\cos(x - 4)) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 2^{x-2a} = 2^{4-2a}$$

$$f(x) \text{ es continua} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 = 2^{4-2a} = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow a = 2$$

### 113. Página 186

a) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en  $x = 0$  y  $x = 3$ .

$$\text{En } x = 0, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\text{Existe } f(0) = b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x - 1) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b$$

$$\text{Por tanto, } b = -1.$$

$$\text{En } x = 3, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\text{Existe } f(3) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + b) = 3a - 1 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (1) = 1$$

$$\text{Por tanto, } a = \frac{2}{3}.$$

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en  $x = -1$  y  $x = 2$ .

$$\text{En } x = -1, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\text{Existe } f(-1) = a - 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 + 3x) = a - 3 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - a) = -1 - a$$

$$\text{Por tanto, } a = 1.$$

$$\text{En } x = 2, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\text{Existe } f(2) = 8 - a = 7.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - a) = 8 - a = 7 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 3) = 2b - 3$$

$$\text{Por tanto, } b = 5.$$



114. Página 186

a) La función  $\frac{2}{2-x}$  no es continua en  $x=2$ , sean cuales sean los valores de  $a$  y  $b$ .

b) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en  $x=-1$  y  $x=1$ .

En  $x=-1$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

Existe  $f(-1) = -a + 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax + 3) = -a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (bx^2 + 5) = b + 5$$

Por tanto,  $b = -a - 2$ .

En  $x=1$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Existe  $f(1) = b + 5$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx^2 + 5) = b + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2\sqrt{x+3} + a) = 4 + a$$

Por tanto,  $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ .

c) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en  $x=0$  y  $x=\pi$ .

En  $x=0$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Existe  $f(0) = 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 2x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a \cdot \text{sen } x + b) = b$$

Por tanto,  $b = 3$ .

En  $x=\pi$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi)$

Existe  $f(\pi) = b = 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (a \cdot \text{sen } x + b) = b = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} ((x-\pi)^2 + a) = a$$

Por tanto,  $a = 3$ .

d) Como las funciones por separado son continuas en los intervalos en los que están definidas, la función será continua si lo es en  $x=-2$  y  $x=2$ .

En  $x=-2$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

Existe  $f(-2) = -7$ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x - 1) = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax^2 + bx) = 4a - 2b$$

En  $x=2$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Existe  $f(2) = 4a + 2b$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + bx) = 4a + 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2^x - 5) = -1$$

Entonces:  $\begin{cases} 4a - 2b = -7 \\ 4a + 2b = -1 \end{cases} \rightarrow a = -1, b = \frac{3}{2}$

115. Página 187

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ -1+2x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 3 \\ a^x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por tanto,  $f(x)$  será continua si lo es en  $x = \frac{1}{2}$  y  $x = 3$ .

En  $x = \frac{1}{2}$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

Existe  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (1-2x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (-1+2x) = 0$$

$f(x)$  es continua en  $x = \frac{1}{2}$ .

En  $x = 3$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

Existe  $f(3) = a^3 - 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1+2x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (a^x - 3) = a^3 - 3$$

Entonces,  $a = 2$ .

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 4-3x & \text{si } x < \frac{4}{3} \\ 3x-4 & \text{si } \frac{4}{3} \leq x < 2 \\ a^x - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto,  $f(x)$  será continua si lo es en  $x = \frac{4}{3}$  y  $x = 2$ .

En  $x = \frac{4}{3}$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right)$

Existe  $f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^-} (4-3x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} (3x-4) = 0$$

$f(x)$  es continua en  $x = \frac{4}{3}$ .

En  $x = 2$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

Existe  $f(2) = a^2 - 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x-4) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (a^x - x) = a^2 - 2$$

Entonces,  $a = 2$ .

$$c) f(x) = \begin{cases} 4-5x & \text{si } x < \frac{4}{5} \\ 5x-4 & \text{si } \frac{4}{5} \leq x < 1 \\ |a-2| & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto,  $f(x)$  será continua si lo es en  $x = \frac{4}{5}$  y  $x = 1$ .

En  $x = \frac{4}{5}$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} f(x) = f\left(\frac{4}{5}\right)$

$$\text{Existe } f\left(\frac{4}{5}\right) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^-} (4-5x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}^+} (5x-4) = 0$$

$f(x)$  es continua en  $x = \frac{4}{5}$ .

En  $x = 1$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\text{Existe } f(1) = |a-2|. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x-4) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |a-2| = |a-2|$$

Entonces,  $a = 1$  o  $a = 3$ .

$$d) \text{ Supongamos que } a \leq 4, \text{ entonces: } f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si } x < a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto,  $f(x)$  será continua si lo es en  $x = a$ .

En  $x = a$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Existe  $f(a) = a^2 - 6a + 8$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (-x+4) = -a+4 \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (x^2-6x+8) = a^2-6a+8$$

$$-a+4 = a^2-6a+8 \rightarrow a^2-5a+4=0 \rightarrow a=4 \text{ o bien } a=1$$

$$\text{Supongamos que } a > 4, \text{ entonces: } f(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{si } x < 4 \\ x-4 & \text{si } 4 \leq x < a \\ x^2-6x+8 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Cada una de las funciones es continua en su dominio.

$f(x)$  es continua en  $x = 4$  porque proviene del valor absoluto;  $f(x)$  será continua si lo es en  $x = a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (x-4) = a-4 \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (x^2-6x+8) = a^2-6a+8$$

$$a-4 = a^2-6a+8 \rightarrow a^2-7a+12=0 \rightarrow a=3 \text{ o } a=4, \text{ pero hemos supuesto que } a \text{ es mayor que } 4.$$

Se deduce que la función es continua para  $a = 1$  y  $a = 4$ .

e) Cada una de las funciones son continuas en su dominio; por lo tanto,  $f(x)$  será continua si lo es en  $x = a$ .

En  $x = a$ , la función será continua si:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Existe  $f(a) = \text{sen}^2 a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \text{sen}^2(x) = \text{sen}^2 a \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (-\cos^2(x) + x) = -\cos^2(a) + a$$

$$\text{sen}^2 a = -\cos^2(a) + a \rightarrow \text{sen}^2 a + \cos^2 a = a \rightarrow a = 1$$

116. Página 187

a) La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ ; por tanto, es continua en el intervalo  $[0, 3]$ .

$$f(0) = -1 < 0 \quad f(3) = 749 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ .

b) La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ; por tanto, es continua en el intervalo  $[0, 3]$ .

$$f(0) = -3 < 0 \quad f(3) = \frac{15}{7} > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ .

c) La función  $f(x)$  es continua en  $(-1, +\infty)$ ; por tanto, es continua en el intervalo  $[0, 3]$ .

$$f(0) = 3 > 0 \quad f(3) = \ln 4 - 3 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ .

d) La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ ; por tanto, es continua en el intervalo  $[0, 3]$ .

$$f(0) = -1 < 0 \quad f(3) = \operatorname{sen}\left(3 - \frac{\pi}{2}\right) + 3 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ .

e) La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , si es continua en  $x = 1$ :

$$\text{En } x = 1, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\text{Existe } f(1) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 2) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0$$

Entonces la función es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, también en el intervalo  $[0, 3]$ .

$$f(0) = -2 < 0 \quad f(3) = 8 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ .

f) La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , si es continua en  $x = 1$ :

$$\text{En } x = 1, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\text{Existe } f(1) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + x - 2) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 - 2) = 0$$

Entonces la función es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, también en el intervalo  $[0, 3]$ .

$$f(0) = -2 < 0 \quad f(3) = 16 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ .

g) La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , si es continua en  $x = 1$ :

$$\text{En } x = 1, \text{ la función será continua si: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\text{Existe } f(1) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\log_2(x+1) + x - 2) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 - 3x + 1) = 0$$

Entonces la función es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, también en el intervalo  $[0, 3]$ .

$$f(0) = -2 < 0 \quad f(3) = 10 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un  $c \in (0, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ .

**117. Página 187**

La función  $f(x)$  es continua en el intervalo  $(0, +\infty)$ ; por tanto, también será continua, por ejemplo, en el intervalo  $[1, e^2]$ .

$$f(1) = -1 < 0 \qquad f(e^2) = e > 0$$

Por el teorema de Bolzano, existe  $a \in (1, e^2)$  tal que  $f(a) = 0 \rightarrow$  Existe un punto de coordenadas  $(a, 0)$ .

**118. Página 187**

La función  $f(x)$  es continua en  $[0, +\infty)$ ; por tanto, también es continua, por ejemplo, en el intervalo  $\left[\frac{11}{8}, \frac{13}{8}\right]$ ,

de amplitud  $\frac{1}{4}$ :

$$f\left(\frac{11}{8}\right) = -0,28 < 0 \qquad f\left(\frac{13}{8}\right) = 0,37 > 0$$

Por el teorema de Bolzano, existe  $c \in \left(\frac{11}{8}, \frac{13}{8}\right)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, corta al eje  $X$  en el punto  $(c, 0)$ .

**119. Página 187**

La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ ; por tanto, también es continua, por ejemplo, en el intervalo  $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ ,

de amplitud  $\frac{1}{2}$ :

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{5}{2} < 0 \qquad f(3) = e - 2 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$  tal que  $f(c) = 0$ .

**120. Página 187**

La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ ; por tanto, también es continua, por ejemplo, en el intervalo  $[-4, -2]$ , de amplitud 2:

$$f(-4) = -7 < 0 \qquad f(-2) = 1 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (-4, -2)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto,  $c$  es raíz del polinomio.

**121. Página 187**

La función  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ ; por tanto, también es continua en el intervalo  $[-3, -2]$ .

$$f(-3) = -3 < 0 \qquad f(-2) = 2 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (-3, -2)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto,  $c$  es raíz del polinomio.

Acotamos la solución:  $f(-3) = -3 < 0 \qquad f(-2,5) = 0,63 > 0$

Por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (-3, -2,5)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto,  $c$  es raíz del polinomio.

$$f(-2,7) = -0,51 < 0 \qquad f(-2,5) = 0,63 > 0$$

Por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (-2,7, -2,5)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto,  $c$  es raíz del polinomio.

$$f(-2,7) = -0,51 < 0 \qquad f(-2,6) = 0,1 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un  $c \in (-2,7, -2,6)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto,  $c$  es raíz del polinomio. Escogiendo cualquier número de este intervalo, obtendremos una aproximación de la raíz de la ecuación con un error menor que una décima.

**122. Página 187**

Consideramos la función  $f(x) = 2x^2 - 3x^4 + 3 - x(\sin x + \cos x) - \cos x + \sin x$ , que es continua en  $\mathbb{R}$ ; por tanto, la función es continua, por ejemplo, en el intervalo  $[-\pi, 0]$  y en el intervalo  $[0, \pi]$ , y además:

$$f(-\pi) = -271,63 < 0$$

$$f(0) = 2 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c_1 \in (-\pi, 0)$  tal que  $f(c_1) = 0$ ; por tanto,  $c_1$  es raíz de la ecuación.

$$f(0) = 2 > 0$$

$$f(\pi) = -265,35 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c_2 \in (0, \pi)$  tal que  $f(c_2) = 0$ ; por tanto,  $c_2$  es raíz de la ecuación.

**123. Página 187**

Consideramos la función  $h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2 + \log(x^4 + 2)$  que es continua en  $\mathbb{R}$ . Entonces, la función  $h(x)$  es continua en los intervalos  $[-2, -1]$  y  $[1, 2]$ , de amplitud 1. Además:

$$h(-2) = 1,49 > 0$$

$$h(-1) = -0,11 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c_1 \in (-2, -1)$  tal que  $h(c_1) = 0$ ; por tanto, las funciones  $f$  y  $g$  se cortan en  $x = c_1$ .

$$h(1) = -0,112 < 0$$

$$h(2) = 1,49 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c_2 \in (1, 2)$  tal que  $h(c_2) = 0$ ; por tanto, las funciones  $f$  y  $g$  se cortan en  $x = c_2$ .

**124. Página 187**

Consideramos la función  $h(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x - x^4 + 3x^2 - x + 1$ , que es continua en  $\mathbb{R}$ . Entonces, la función  $h(x)$  también es continua en los intervalos  $\left[-\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}\right]$  y  $\left[\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$ , de amplitud  $\frac{1}{2}$ . Además:

$$h\left(-\frac{9}{4}\right) = -8,95 < 0 \quad h\left(-\frac{7}{4}\right) = 2,2 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c_1 \in \left(-\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}\right)$  tal que  $h(c_1) = 0$ ; por tanto, las funciones  $f$  y  $g$  se cortan en  $x = c_1$ .

$$h\left(\frac{7}{4}\right) = 1,76 > 0 \quad h\left(\frac{9}{4}\right) = -8,9 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c_2 \in \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$  tal que  $h(c_2) = 0$ ; por tanto, las funciones  $f$  y  $g$  se cortan en  $x = c_2$ .

## 125. Página 187

a) Consideramos la función  $f(x) = x + 1 - e^{x-1}$ , que es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, también lo es en el intervalo cerrado  $[2, 3]$ . Además:

$$f(2) = 3 - e > 0 \quad f(3) = 4 - e^2 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (2, 3)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, tiene un punto de corte en  $x = c$ .

$$f(2) = 3 - e > 0 \quad f(2,5) = -0,98 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (2; 2,5)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, tiene un punto de corte en  $x = c$ .

$$f(2) = 3 - e > 0 \quad f(2,2) = -0,12 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (2; 2,2)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, tiene un punto de corte en  $x = c$ . Escogiendo  $x = 2,1$ , obtenemos una aproximación del punto de corte con el eje  $X$  con un error menor que una décima.

b) Consideramos la función  $f(x) = x + 1 - x^3 - 3x$ , que es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, también lo es en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Además:

$$f(0) = 1 > 0 \quad f(1) = -2 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ .

$$f(0) = 1 > 0 \quad f(0,5) = -0,12 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0; 0,5)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ .

$$f(0,3) = 0,37 > 0 \quad f(0,5) = -0,12 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0,3; 0,5)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ . Escogiendo  $x = 0,4$ , obtenemos una aproximación del punto de corte con el eje  $X$  con un error menor que una décima.

c) Consideramos la función  $f(x) = x + 1 - \ln x - 3$ , que es continua en  $(0, +\infty)$  y, por tanto, también lo es en el intervalo cerrado  $[0,1; 1]$ . Además:

$$f(0,1) = 0,4 > 0 \quad f(1) = -1 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0,1; 1)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ .

$$f(0,1) = 0,4 > 0 \quad f(0,5) = -0,81 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0,1; 0,5)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ .

$$f(0,1) = 0,4 > 0 \quad f(0,3) = -0,5 < 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (0,1; 0,3)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ . Escogiendo  $x = 0,2$ , obtenemos una aproximación del punto de corte con el eje  $X$  con un error menor que una décima.

d) Consideramos la función  $f(x) = x + 1 - \operatorname{sen} x$ , que es continua en  $\mathbb{R}$  y, por tanto, también lo es en el intervalo cerrado  $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ . Además:

$$f(-\pi) = -\pi + 1 < 0 \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1 + 1 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ .

$$f(-2) = -0,09 < 0 \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1 + 1 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in \left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ .

$$f(-2) = -0,09 < 0 \quad f(-1,8) = 0,17 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in (-2; -1,8)$  tal que  $f(c) = 0$ ; por tanto, la función tiene un punto de corte en  $x = c$ . Escogiendo  $x = -1,9$ , obtenemos una aproximación del punto de corte con el eje  $X$  con un error menor que una décima.

### 126. Página 187

Consideramos la función  $h(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3x - 1$ , continua en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, también en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Además:

$$h(0) = -1 < 0 \quad h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \frac{3\pi}{2} - 1 > 0$$

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe  $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  tal que  $h(c) = 0$ ; por tanto, las funciones  $y$   $g$  se cortan en  $x = c$ .

### 127. Página 187

Consideramos la función  $h(x) = x \operatorname{sen} x - \ln x$ .

$f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$  y  $g(x)$  es continua en  $(0, +\infty)$ ; por tanto,  $h(x)$  es continua en  $[2, 3]$ .

$$h(2) = 1,125 > 0 \quad h(3) = -0,675 < 0$$

Aplicamos el teorema de Bolzano  $\rightarrow$  Existe  $c \in (2, 3)$  tal que  $h(c) = 0$ , es decir, la función se anula en algún punto del intervalo  $(2, 3)$ ; por tanto,  $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$ .

### 128. Página 187

La función  $f(x)$  es continua en el intervalo  $[-6, +\infty]$  y, por tanto, también lo es en el intervalo  $[-2, 3]$ . Por otro lado,  $f(-2) = 2$  y  $f(3) = 3$ . Entonces, por el teorema de los valores intermedios,  $f(x)$  toma todos los valores entre 2 y 3 en el intervalo  $(-2, 3)$ .



**129. Página 187**

La función  $f(x)$  es continua en el conjunto  $\mathbb{R} - \{2\}$ ; por tanto, es continua en el intervalo  $[3, 5]$ . Además, como  $f(3) = 9$  y  $f(5) = 5$ , por el teorema de los valores intermedios, la función toma todos los valores entre 9 y 5, incluido el valor 6, en el intervalo  $(3, 5)$ , que está contenido en el intervalo  $(1, 5)$ .

**130. Página 187**

La función  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ ; por tanto, también es continua en el intervalo  $[0, 1]$ . Además, como  $f(0) = 0$  y  $f(1) = 3$ , por el teorema de los valores intermedios, la función toma todos los valores entre 0 y 3, incluido el 2, en el intervalo  $(0, 1)$ .

Aproximamos su valor:

$$f(0,5) = 0,96 \text{ y } f(1) = 3$$

$$f(0,75) = 1,82 \text{ y } f(1) = 3$$

$$f(0,75) = 1,82 \text{ y } f(0,8) = 2,03$$

$$f(0,78) = 1,95 \text{ y } f(0,8) = 2,03$$

Como la función también es continua en el intervalo  $[0,78; 0,8]$ , tomará el valor 2 en algún  $x \in (0,78; 0,8)$ . Eligiendo  $x = 0,79$ , conseguimos una aproximación de ese número con un error menor que una centésima.

**131. Página 187**

La función  $f(x)$  será continua en el intervalo  $[0, 5]$  si es continua en  $x = 1$ :

Existe  $f(1) = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{x} + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x + 2) = 2$$

Entonces, la función es continua en  $x = 1$  y, por tanto, es continua en el intervalo  $[0, 5]$  y, por el teorema de Weierstrass, la función  $f(x)$  alcanza en  $[0, 5]$  su máximo y su mínimo absolutos.

**MATEMÁTICAS EN TU VIDA****1. Página 188**

No, el ejemplo anterior se trata de un caso concreto, son términos de una serie geométrica con razón  $\frac{1}{2}$ , por eso la suma de sus términos es un valor finito.

Si elegimos, por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares, su suma no es un valor finito:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \dots = +\infty$$

**2. Página 188**

Sí, si trabajamos con un recorrido de cualquier distancia  $d > 0$ , las distancias recorridas en cada zancada serían los términos de la siguiente sucesión:

$$\left\{ a_1 = \frac{d}{2}, a_2 = \frac{d}{4}, a_3 = \frac{d}{8}, a_4 = \frac{d}{16}, \dots, a_n = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots \right\} \rightarrow \text{Serie geométrica con } r = \frac{1}{2}.$$

**3. Página 188**

Se trata de un límite cuando  $n$  tiende a infinito.

**4. Página 188**

El término general de la sucesión es  $a_n = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

Tal y como se ha estudiado en cursos anteriores, podemos sumar los infinitos términos de una serie geométrica usando la siguiente fórmula, si  $0 < r < 1$ :

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{d}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{1}{2}} = d$$