1 Límites de funciones. Continuidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{3x^4-2x^2+6}{8}$

b) $f(x)=2x+\sqrt{3x-\dfrac{6}{5}}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x^3-3x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$

e) $f(x)=\log\left(x^2+3x-4\right)$

f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\ln x}}$

a) $D(f)=\mathbb{R}$ porque se trata de una función polinómica.

b) $3x-\dfrac{6}{5}\geq 0 \Rightarrow x\geq\dfrac{2}{5}\Rightarrow D(f)=\left[\dfrac{2}{5},+\infty\right)$

c) $x^3-3x^2=0\Rightarrow x^2(x-3)=0\Rightarrow x=0, x=3\Rightarrow D(f)=(-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,+\infty)$

d) $1-e^x=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0\Rightarrow D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

e) $x^2+3x-4>0\Rightarrow(x-1)(x+4)>0\Rightarrow D(f)=(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$

f) $\ln x>0\Rightarrow x>1\Rightarrow D(f)=(1,+\infty)$

4. Estudia el dominio de las funciones siguientes.

a) $f(x)=x|x+1|-3x^2$

b) $f(x)=\dfrac{|x+1|+x}{|x-1|-x}$

c) $f(x)=x+2\cos x$

d) $f(x)=\dfrac{2x}{1+\operatorname{sen} x}$

a) $D(f)=\mathbb{R}$

b) $|x-1|-x=0\Rightarrow\begin{cases}x-1-x=0 & \text{si } x\geq 1\\ -x+1-x=0 & \text{si } x<1\end{cases}$. Con solución en $x=\dfrac{1}{2}$. Por tanto, $D(f)=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

c) $D(f)=\mathbb{R}$

d) $1+\operatorname{sen} x=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x=-1 \Rightarrow$ La función existe en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

5. Encuentra el dominio y el recorrido de las funciones.

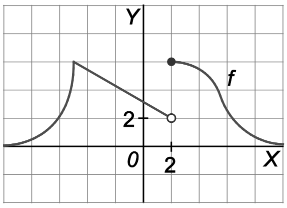
a) $f(x) = x^2 + 3$ **b)** $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$ $R(f) = [3, +\infty)$

b) $D(f) = [-1, +\infty)$ $R(f) = [2, +\infty)$

6. Ejercicio resuelto.

7. Calcula los siguientes límites a partir de la gráfica de $f(x)$.



a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$

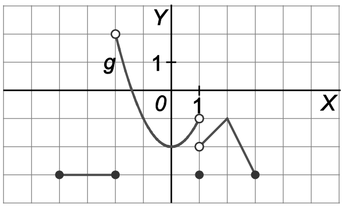
c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 6$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$ No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = 6$ $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = 6$ $\lim\limits_{x\to -5} f(x) = 6$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$

8. Dada la gráfica de $g(x)$ calcula los límites pedidos.



a) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$ $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$ $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

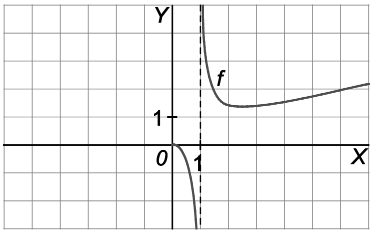
a) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = -3$ No existe $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -2$ $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -1$ No existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = -1$ $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = -1$ $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -1$

9 y 10. Ejercicios resueltos.

11. Dada la gráfica de $f(x)$, calcula:



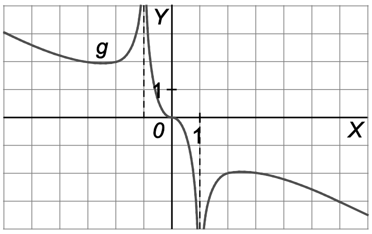
a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

12. Dada la gráfica de $g(x)$, calcula:



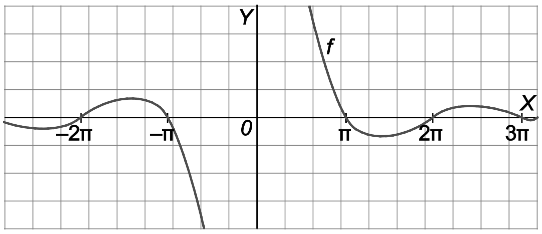
a) $\lim_{x\to -1} g(x)$

b) $\lim_{x\to 1} g(x)$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} g(x) = +\infty \\ \lim_{x\to -1^+} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1} g(x) = +\infty$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x) = -\infty$

13. Dada la gráfica de $f(x)$, calcula:



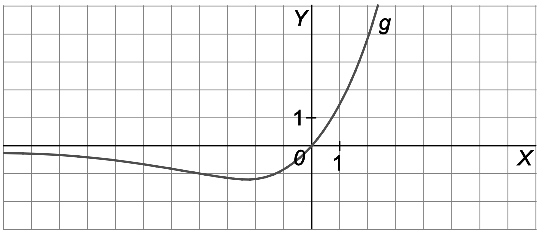
a) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

a) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

14. Dada la gráfica $g(x)$, calcula:



a) $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

b) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$

a) $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$

15 a 18. Ejercicios resueltos.

19. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-9x^2+6}{x+1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1-x}-e^x+e^{-x}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-9x^2+6}{x+1}=\frac{0}{2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2}=\frac{2}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2}=\frac{2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2}=\frac{2}{0^+}=+\infty\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)=+\infty+\infty=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1-x}-e^x+e^{-x}\right)=+\infty-0+\infty=+\infty$

20. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to a} h(x)=2$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to a}\left[2f(x)-2g(x)+h(x)\right]$ **c)** $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2}$

b) $\lim\limits_{x\to a}\frac{12}{f(x)+g(x)}$ **d)** $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}\right]$

a) $\lim\limits_{x\to a}\left[2f(x)-2g(x)+h(x)\right]=2\cdot(-2)-2\cdot 2+2=-6$

b) $\lim\limits_{x\to a}\frac{12}{f(x)+g(x)}=\frac{12}{-2+2}=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{\left[f(x)\right]^2+\left[g(x)\right]^2}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}\right]=\frac{-2}{2}-\frac{-2+2}{2}=-1-0=-1$

21 y 22. Ejercicios resueltos.

23. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4x^2+5x-2\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-2x^2+3\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^4-3x^3-x}{-3x^3-x^2+2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^3-3x^2+1}{3x^2-2x+5}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{2x^2+5}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{3x^2+6x-5}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{\sqrt{2x^4+x^3-1}}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-5}{\sqrt{x+5}+\sqrt[3]{1-x^2}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4x^2+5x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-2x^2+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^4-3x^3-x}{-3x^3-x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^4}{-3x^3}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^3-3x^2+1}{3x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3-3x^2+1}{3x^2+2x+5}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^3-3x^2+1}{3x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3}{3x^2}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{2x^2+5}\right)=+\infty+\infty=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{3x^2+6x-5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x-\sqrt{3x^2-6x-5}\right)=-\infty-\infty=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{\sqrt{2x^4+x^3-1}}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^4}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-5}{\sqrt{x+5}+\sqrt[3]{1-x^2}}=\dfrac{+\infty}{-\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-5}{\sqrt{x+5}+\sqrt[3]{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{-x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2}x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{-1}x^{\frac{2}{3}}}=-\sqrt[3]{2}$

24. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+x-1}\right)=+\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{4x^2+x-1}\right)\left(x+\sqrt{4x^2+x-1}\right)}{\left(x+\sqrt{4x^2+x-1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x^2-x+1}{x+\sqrt{4x^2+x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2-x+1}{x+\sqrt{4x^2+x-1}}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)\left(2x^2+\sqrt{4x^4-1}\right)}{\left(2x^2+\sqrt{4x^4-1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2+\sqrt{4x^4-1}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

25. Halla los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{1-\sqrt{3+x}}$

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} = \dfrac{0}{3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{1-\sqrt{3+x}} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\left(\sqrt{6+x}-2\right)\left(\sqrt{6+x}+2\right)\left(1+\sqrt{3+x}\right)}{\left(1-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{6+x}+2\right)\left(1+\sqrt{3+x}\right)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(6+x-4)\left(1+\sqrt{3+x}\right)}{(1-3-x)\left(\sqrt{6+x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(2+x)\left(1+\sqrt{3+x}\right)}{-(2+x)\left(\sqrt{6+x}+2\right)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\left(1+\sqrt{3+x}\right)}{-\left(\sqrt{6+x}+2\right)} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

26. Halla el valor de *m* para que $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(x-4)\left(3mx^2+2\right)}{x^3+3} = 1$**.**

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(x-4)\left(3mx^2+2\right)}{x^3+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(-x-4)\left(3mx^2+2\right)}{-x^3+3} = \dfrac{\infty}{\infty}$, indeterminación.

Considerando los términos de mayor grado:

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(x-4)\left(3mx^2+2\right)}{x^3+3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3mx^3-12mx^2+2x-8}{x^3+3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3mx^3}{x^3} = 3m \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \dfrac{1}{3}$

27. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x-3}{2x-1}\right)^{x^2+1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2+x}\right)^{\frac{2x}{2x+1}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x-3}{2x-1}\right)^{x^2+1} = \left(\dfrac{0}{5}\right)^{10} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2+x}\right)^{\frac{2x}{2x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2+x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{2x+1}} = 1^1 = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-2}\left(\frac{x-1}{2x-3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{2-x}{(2x-3)(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{-1}{(2x-3)}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

28. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2-x}\right)^{x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}=1^\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left(\frac{2x+2}{2x-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left(\frac{3}{2x-1}\right)}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+3}{2x-1}}=e^3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}x^2}=1^\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}x^2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left(\frac{3x^2+x-1}{3x^2-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2x}{6x^2-2}}=e^{+\infty}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2-x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}\right)^{x^2}=1^\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{x^2+3x}{x^2+x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 2x}{x^2+x}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$

29. Ejercicio resuelto.

30. Calcula los siguientes límites utilizando infinitésimos.

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}2x}$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$, ya que $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{x}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2$, ya que $\operatorname{sen}2x\sim2x$.

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$, ya que $\operatorname{sen}(x-1)\sim(x-1)$.

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}2x}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$, ya que $\operatorname{tg}5x\sim5x$ y $\operatorname{tg}2x\sim2x$.

31. Halla el valor de límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-8)}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-8)}{x-2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=12$, ya que $\operatorname{sen}(x^3-8)\sim(x^3-8)$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}x=0$, ya que $e^x-1\sim x$.

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, ya que $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

32. Ejercicio interactivo.

33. Ejercicio resuelto.

34. Dada la sucesión de término general $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$:

a) Calcula sus tres primeros términos.

b) Halla el lugar que ocupa el término $a_s = \dfrac{15}{17}$.

c) Demuestra que es creciente.

d) Halla una cota superior y razona si es o no convergente.

a) $a_1 = \dfrac{0}{2} = 0,\ a_2 = \dfrac{1}{3}, a_3 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

b) $a_s = \dfrac{15}{17} = \dfrac{s-1}{s+1} \Rightarrow 15(s+1) = 17(s-1) \Rightarrow s = 16$.

c) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{2}{n^2+3n+2} > 0$. Por tanto, $a_{n+1} > a_n$ y la sucesión es creciente.

d) $a_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$. Luego una cota superior es 1.

La sucesión es convergente porque es creciente y acotada superiormente.

35. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-n^2\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^3+2n+1}{2n^2+n+10}$

a) $-\infty$

b) $-\infty$

36. Halla los límites de las sucesiones siguientes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3-8n}{\sqrt{3}}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(2n^2+3n+5\right)\left(3n^2+5n-6\right)}{n\left(5n^3-n\right)}$

a) $+\infty$

b) $\dfrac{6}{5}$

37. Calcula el valor de los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{2n^2-5n+6}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{2n^2-5n+6}\right) = \infty - \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{2n^2-5n+6}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n-\sqrt{2n^2-5n+6}\right)\left(n+\sqrt{2n^2-5n+6}\right)}{n+\sqrt{2n^2-5n+6}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+5n-6}{n+\sqrt{2n^2-5n+6}} = -\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2+n\right)\left(\frac{2n+3}{2n-3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2+n\right)\left(\frac{6}{2n-3}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$

38. Ejercicio resuelto.

39. Indica si las siguientes funciones son o no continuas en el punto $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \\ \dfrac{2}{x} + 10 & \text{si } x \le 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 6}$

d) $f(x) = \ln(3 - 2x)$

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x} + 10\right) = 11 = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2 - 1\right) = 11$.

Por tanto, la función es continua en $x = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2 + 1\right) = 9 = f(2)$.

Por tanto, la función no es continua en $x = 2$.

c) El dominio es $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$, luego la función no existe en las proximidades de $x = 2$ y, en consecuencia, no tiene sentido hablar de continuidad o discontinuidad en $x = 2$.

d) El dominio es $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$, luego la función no existe en las proximidades de $x = 2$ y, en consecuencia, no tiene sentido hablar de continuidad o discontinuidad en $x = 2$.

40. En cada uno de los siguientes casos, señala el mayor conjunto de números reales para los que la función $f(x)$ es continua.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **d)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

a) Continua en todo el conjunto de los números reales.

b) Continua en todo el conjunto de los números reales excepto en $x = 1$.

c) Continua en $[-1, +\infty)$.

d) Continua en $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right)$.

41. Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x + 2 - x^2}}$ **b)** $f(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$ **c)** $f(x) = \sqrt{2 + |2x - 3|}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

a) $x + 2 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 2)$. Por tanto, es continua en $(-1, 2)$.

b) $x^2 + 1 > 0$, para cualquier x. Por tanto, siempre se puede hallar su logaritmo. La función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Para cualquier x, $2 + |2x - 3| \ge 0$ y, por tanto, siempre se puede calcular su raíz cuadrada.

d) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$. Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. En $x = 2$ la función tiene una discontinuidad evitable.

42. Halla el valor o los valores de *a*, si es que existen, para que $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} ax+a & \text{si } x\le -2 \\ \dfrac{x}{x+4} & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

a) Sea continua en $x=-2$.

b) Presente una discontinuidad evitable en $x=-2$.

c) Presente una discontinuidad de salto finito en $x=-2$.

d) Presente discontinuidad de salto infinito en $x=-2$.

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x+4}=-1$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(ax+a)=-a=f(-2)$. Por tanto, *f* es continua en $x=-2$ si $a=1$.

b) Para ningún valor de *a*, la función presenta una discontinuidad evitable en $x=-2$.

c) Para cualquier valor de *a* distinto de 1, la función presenta en $x=-2$ una discontinuidad de salto finito.

d) Para ningún valor de *a*, la función presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=-2$.

43 a 45. Ejercicios resueltos.

46. Comprueba que las siguientes funciones cortan al eje *X* y, en cada caso, establece un intervalo abierto donde esté incluido el punto de corte.

a) $f(x)=x^3+3x^2+4x-7$

b) $f(x)=2x-\cos x$

a) Es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1>0 \\ f(0)=-7<0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0,1) \text{ tal que } f(c)=0.$$

b) Es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser diferencia de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2-0{,}54=1{,}46>0 \\ f(0)=-1<0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0,1) \text{ tal que } f(c)=0.$$

47. Demuestra que la ecuación $x^4+x-1=0$ tiene una solución positiva. Halla dicha solución con una cifra decimal exacta.

Se considera la función $f(x)=x^4+x-1$ que, por ser polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0,\ 1) \text{ tal que } f(c)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0{,}5)=-0{,}4375<0 \\ f(1)=1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0{,}5;\ 1) \text{ tal que } f(c)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0{,}5)=-0{,}4375<0 \\ f(0{,}75)=0{,}066>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0{,}5;\ 0{,}75) \text{ tal que } f(c)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0{,}625)=-0{,}22<0 \\ f(0{,}75)=0{,}066>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0{,}625;\ 0{,}75) \text{ tal que } f(c)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0{,}71875)=-0{,}014<0 \\ f(0{,}75)=0{,}066>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0{,}71875;\ 0{,}75) \text{ tal que } f(c)=0$$

La raíz aproximada es $x=0{,}7$.

48. Para cada una de las funciones dadas encuentra un intervalo de longitud unidad en el que se anule al menos una vez.

a) $f(x)=\sqrt{x^3+x+1}-2$

b) $f(x)=x^2-2\text{sen}\,x$

c) $f(x)=x\ln x-1$

d) $f(x)=x\,\text{arctg}\,x-1$

a) $f(x)$ es continua en $[1,\ 2]$. $\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{3}-2<0 \\ f(2)=\sqrt{11}-2>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$

b) $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. $\left.\begin{array}{l} f(1)=1-2\text{sen}1<0 \\ f(2)=4-2\text{sen}2>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$

c) $f(x)$ es continua en $(0,+\infty)$. $\left.\begin{array}{l} f(1)=-1<0 \\ f(2)=2\ln 2-1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$

d) $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. $\left.\begin{array}{l} f(1)=\text{arctg}1-1<0 \\ f(2)=2\text{arctg}2-1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$

49. a) Aplica el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x=x^2-1$ tiene soluciones positivas.

b) ¿Tiene la ecuación $\cos x=x^2-1$ alguna solución negativa? Razona la respuesta.

a) Se considera la función $f(x)=x^2-1-\cos x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto, es continua en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Como $f(0)<0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$. Entonces, por el teorema de Bolzano, $\exists c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c)=0$.

b) Sí, porque aplicando el teorema de Bolzano a la función $f(x)=x^2-1-\cos x$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ se tiene que $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)>0$ y $f(0)<0$. Entonces $\exists c\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ tal que $f(c)=0$.

Se podría haber razonado diciendo que $f(x)=x^2-1-\cos x$ es par y por tanto $f(-c)=0$.

50. Dada la función $f(x)=\ln x$:

a) Comprueba que es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{n},1\right]$, para cualquier número natural *n*.

b) Halla un intervalo de la forma $\left[\frac{1}{n},1\right]$ en el que haya algún punto donde la función tome el valor –2.

a) La función $f(x)=\ln x$ es continua en todo su dominio $(0,+\infty)$ y en cualquier intervalo $\left[\frac{1}{n},1\right]$ con *n* cualquier número natural.

b) Para $n=8$, $f\left(\frac{1}{8}\right)=\ln\frac{1}{8}=-2{,}079$ y $f(1)=\ln 1=0$. Aplicando el teorema de los valores intermedios, la función toma en $\left[\frac{1}{8},1\right]$ todos los valores entre –2,079 y 0. En particular, existe un punto donde tome el valor –2.

51. Al hacer un recorrido continuo por una carretera con una pendiente muy pronunciada, un ciclista lleva una velocidad de 8 km/h cuando pasa por el kilómetro 125 y 6 km/h cuando pasa por el kilómetro 124.

a) ¿Existe algún punto entre los dos kilómetros donde el ciclista haya llevado una velocidad de 7 km/h?

b) ¿Puede asegurarse que no ha habido ningún momento entre los dos puntos donde el ciclista haya llevado una velocidad de 20 km/h?

a) Sí, se puede asegurar gracias al teorema de los valores intermedios.

b) No se puede asegurar que no exista.

52. Ejercicio resuelto.

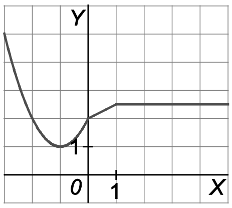
53. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{1}{2}x+2 & \text{si } 0<x\le 1 \\ \dfrac{5}{2} & \text{si } x>1 \end{cases}$**:**

a) Dibújala y estudia su acotación en los intervalos:

$[-1,1]$ $[2,-2]$ $[-3,3]$

b) Estudia si la función toma el valor $M = 3$ y, en caso afirmativo, indica un intervalo de longitud 1 donde haya un punto que verifique esta propiedad.

a)



La función es continua en todos los puntos.

En el intervalo $[-1,1]$ la función está acotada. El máximo vale $\frac{5}{2}$ y se alcanza en $x = 1$. El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$.

En el intervalo $[-2,2]$ la función está acotada. El máximo vale $\frac{5}{2}$ y se alcanza en cualquier punto del intervalo $[1,2]$ El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$.

En el intervalo $[-3,3]$ la función está acotada. El máximo vale 5 y se alcanza en $x = -3$. El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$.

b) Como $f(-3)=5$ y $f(-2)=2$, la función toma cualquier valor comprendido entre 5 y 2 en el intervalo $[-3,-2]$ y, por tanto, existe algún punto de $(-3,-2)$ donde la función vale 3.

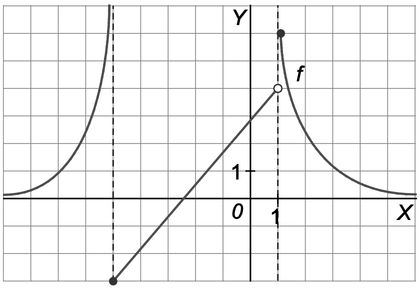
54 a 67. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

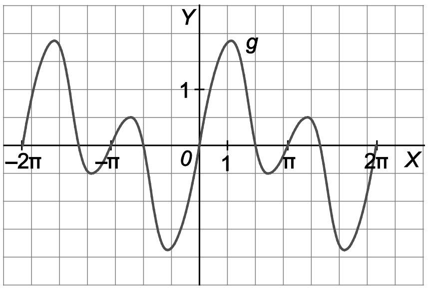
Dominio y recorrido de una función

68. *Halla el dominio y recorrido de las funciones:

a)



b)



a) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Recorrido: $R(f)=[-3,+\infty)$

b) Dominio: $D(g)=[-2\pi,\ 2\pi]$.

Recorrido: $R(g)=[-1{,}75;\ 1{,}75]$

69. Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x-1}{2x^3+x^2-20}$

b) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $f(x)=\dfrac{1+\log\sqrt{x}}{x^2-4}$

d) $f(x)=1-\ln(x-|x|)$

e) $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}$

f) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^{2x-1}+3}$

a) $2x^3+x^2-20=0\Rightarrow(x-2)\left(2x^2+5x+10\right)=0\Rightarrow x=2\Rightarrow D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

b) $\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2>1\end{cases}\Rightarrow D(f)=(1,+\infty)$.

c) $\begin{cases}x>0\\ x^2\neq 4\end{cases}\Rightarrow D(f)=(0,2)\cup(2,+\infty)$.

d) La función no existe ni para los x positivos ni para los negativos, entonces $D(f)=\varnothing$.

e) $\cos x=0\Rightarrow$ La función existe en todo $\mathbb{R}$ excepto en los $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$.

f) $x\geq 0\Rightarrow D(f)=[0,+\infty)$.

70. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Dominio: $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

Recorrido: $R(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

b) Dominio: $D(f)=(0,+\infty)$.

Recorrido: $R(f)=(0,+\infty)$.

71. Estudia el dominio de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\dfrac{1}{-1+\sqrt{x+1}}$

b) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

c) $f(x)=\sqrt{\left|x^2-1\right|}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x-1}}}$

a) $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ -1+\sqrt{x+1}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow D(f)=[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

b) $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq -2 \end{cases} \Rightarrow D(f)=[-1,+\infty)$.

c) Todos los valores del radicando son positivos.

Por tanto, el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

d) $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 1-\sqrt{x-1}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow D(f)=[1,\ 2)$.

Límites de funciones

72. Dada la gráfica de la función $y=f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.

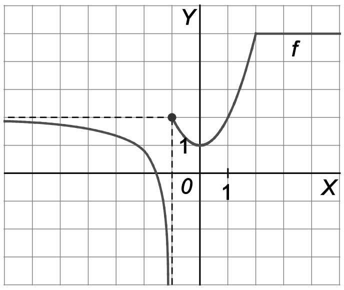
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



a) 2 **b)** 5 **c)** 1 **d)** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty \Rightarrow$ No existe. **e)** 5

73. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.

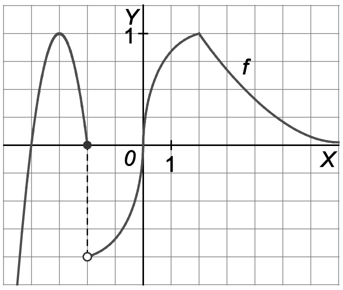
a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

d $\lim_{x\to -2} f(x)$

e) $\lim_{x\to 0} f(x)$



a) $-\infty$ **b)** 0 **c)** 1 **d)** $\lim_{x\to-2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -1 \Rightarrow$ No existe. **e)** 0

74. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.

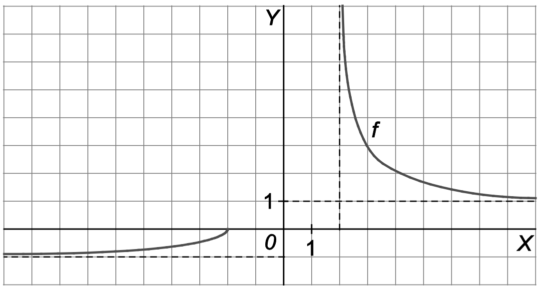
a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

d) $\lim_{x\to -2} f(x)$

e) $\lim_{x\to 0} f(x)$



a) -1

b) 1

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ no existe, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ No existe.

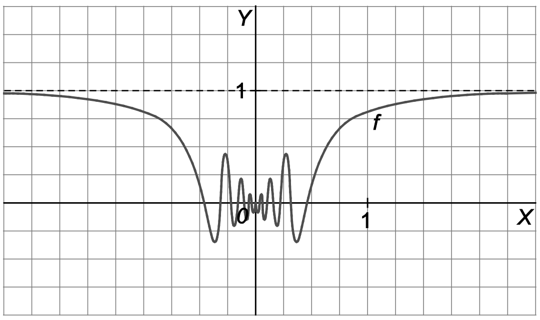
d) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ no existe $\Rightarrow$ No existe.

e) No existen los límites laterales, entonces no existe el límite.

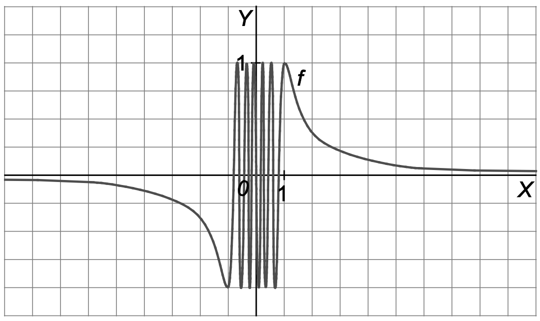
75. Dada la gráfica de las siguientes funciones, halla, si existen, los valores de los límites que se indican a continuación. En caso de que sea ese el caso, indica lo valores de los límites laterales.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to 0} f(x)$

a)



b)



a) 1, 1 y 0, respectivamente.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

76. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^3}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{0^+} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{0^-} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$, por tanto, no existe el límite.

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x^3} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x^3} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x^3} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x^3} = +\infty$, por tanto, no existe el límite.

77. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 16}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 16}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 16}}$

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 16}} = \frac{1}{0^+} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 16}} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 16}}$ no existe, ya que no están definidas las raíces de índice par de los números negativos.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 16}}$ no existe al no existir $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 16}}$.

78. Calcula, si existen, el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\ln x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\ln x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{\ln x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x}$

a) 0 **c)** No existe. **e)** No existe.

b) No existe. **d)** $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ **f)** No existe.

79. Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x}$

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} = \frac{-\infty}{0^-} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} = \frac{+\infty}{0^+} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} = +\infty$

80. Halla los límites que se indican a continuación.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x-3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+5x-3}}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+e^x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{3x^2+5x-3}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{3x^2+5x-3}}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-e^{-x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x-3}{4}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+5x-3}}{4}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+e^x\right)=+\infty+\infty=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x=2^{+\infty}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}=0$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{3x^2+5x-3}=0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{3x^2+5x-3}}=0$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-e^{-x}\right)=-\infty-\infty=-\infty$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}=2^{-\infty}=0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty}=+\infty$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=0$

81. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5x^3-7x^2-1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2x^5+5x-6\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3-x^2+x-1\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^5-\dfrac{1}{3}x^2\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^4+x^2-2x+1\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3}x^6+x^5-2\right)$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x^2-2x+5\right)$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-3x^4-\dfrac{1}{3}x\right)$

a) $+\infty$ **c)** $-\infty$ **e)** $+\infty$ **g)** $+\infty$

b) $-\infty$ **d)** $+\infty$ **f)** $-\infty$ **h)** $-\infty$

82. Halla el valor de los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+x^2-1}{-x^3+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+2x+3}{-x^2+3x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3+3}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^4+x^2}{3+x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x+3}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+3x+2}{-3x^2+3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+3x^2-2}{-3x+5}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^5+1}{5-x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+1}{x+3}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^2+1}{x^3+x}$

a) -2 **c)** $+\infty$ **e)** 0 **g)** $-\infty$ **i)** $-\infty$

b) $-\infty$ **d)** $+\infty$ **f)** $-\dfrac{2}{3}$ **h)** $-\infty$ **j)** 0

83. Determina los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+2x+3}}{2x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^3+3x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^6+2x^2}}{-2x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x+5}{\sqrt[3]{4x^6+x^2-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{-2x^2+5}}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x+3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x-1}{\sqrt{-x^3+2x}}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^6-2x^2}}{-x^2+2x-4}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{2x-3}}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3-x+3}}{2x^2}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $-\infty$ **e)** No existe. **g)** 0 **i)** $+\infty$

b) $+\infty$ **d)** $\sqrt[3]{2}$ **f)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **h)** $-\infty$ **j)** 0

84. Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x-2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x-3}-\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x-2}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2}{x^2-3x+2}\right)=-1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{2}{+\infty}-\dfrac{2}{+\infty}=0-0=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x^4+2x^3}{x^4-1}\right)=-4$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x-3}-\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}\right)=-\infty+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x-3}-\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{8x^2-4x+10}{x^2-x-6}\right)=8$

85. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+x-3}\right)}{2x+\sqrt{x^2+x-3}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-x^2-x+3}{2x+\sqrt{x^2+x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+3}{2x+\sqrt{x^2+x-3}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}\right)}{\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+4}{\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}}=-\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}\right)}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}}=\dfrac{3}{2}$

86. Determina los siguientes límites de funciones distinguiendo, si es necesario, los dos límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}$

e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+1}{x+3}$

h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$

j) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+1}=\dfrac{0}{2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{3-x}=\dfrac{7}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+1}{3-x}==\dfrac{7}{0^-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+1}{3-x}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x+1}{3-x}==\dfrac{7}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x+1}{3-x}=+\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe el límite.

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=\dfrac{60}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=\dfrac{60}{0^-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=\dfrac{60}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=+\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0^+}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0^+}=+\infty\end{cases}.$

Luego $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=+\infty$.

e) Si $a\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}=\dfrac{0}{2a^2}$ Si $a=0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{2}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{2}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{2}{0^-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{-5}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{-5}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x+1}{x+3}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{-5}{0^-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x+1}{x+3}=+\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4}=\dfrac{0}{5}=0$

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)^4}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -2}(x+1)^2=1$

j) Si $a=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ Si $a>0$, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^2}{0^+}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^2}{0^-}=-\infty\end{cases}$ Si $a<0$, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^2}{0^-}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^2}{0^+}=+\infty\end{cases}$

Por tanto, no existe límite si $a\neq 0$.

87. Calcula los siguientes límites, resolviendo los límites laterales en los casos en que sea necesario.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3-27}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^3+2x^2-x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+3x^2-24x-80}{x^2+x-12}$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^2-2x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+1)\dfrac{3x+2}{x^3+x^2}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+7)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x+7}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3-27}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3-27}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+6)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+6}{x^2+3x+9}=\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)^2(x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{7}{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{7}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{7}{0^-}=-\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^3(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{0^-}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=-\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^3+2x^2-x-2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\left(x^3-1\right)}{(x+2)\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{-8-1}{4-1}=-3$

f) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+3x^2-24x-80}{x^2+x-12}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)^2(x-5)}{(x+4)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-5)}{x-3}=\dfrac{0}{-7}=0$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^2-2x+1}=\dfrac{-8}{4}=-2$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+1)\dfrac{3x+2}{x^3+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(3x+2)}{x^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+2}{x^2}=-1$

88. Calcula:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ **c)** $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}$ **e)** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$ **d)** $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$ **f)** $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}$, $a>0$

a) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$

$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=$

$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+2)(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)=-24$

c) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}{\left(3-\sqrt{x+5}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}{(4-x)\left(2+\sqrt{x}\right)}=$

$\lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{x+5}}{2+\sqrt{x}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{\left(2-\sqrt{x+3}\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{4-x-3}=$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{1-x}=\lim_{x\to 1}-\left(2+\sqrt{x+3}\right)=-4$

e) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{\left(4-\sqrt{x+13}\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}=$

$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{(3-x)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{-(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{4+\sqrt{x+13}}{-\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$

f) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x^2+3a^2}-2a\right)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=$

$=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x+a}{\sqrt{x^2+3a^2}+2a}=\frac{2a}{4a}=\frac{1}{2}$

89. Halla los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3-2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)^{\frac{x^2}{2x-4}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x^2+5}\right)^{2\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1+x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{4-x}{x^2-1}\right)^{\frac{2x}{2x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2-3x}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos x+\cos^2 x}\right)^{\cos 2x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{3}\right)^{x}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3-2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+3}}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)^{\frac{x^2}{2x-4}}=\left(\dfrac{5}{0^+}\right)^{\frac{4}{0^+}}=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x^2+5}\right)^{2\sqrt{x}}=0^{+\infty}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1+x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen}x}}=1^1=1$

e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left(\dfrac{1}{0^+}\right)^{\frac{1}{0^+}}=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{4-x}{x^2-1}\right)^{\frac{2x}{2x+1}}=\left(\dfrac{5}{0^+}\right)^{2}=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x+1}{x}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}=\dfrac{1}{4}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2-3x}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}=0^{+\infty}=0$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos x+\cos^2 x}\right)^{\cos 2x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}=\dfrac{1}{2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{3}\right)^{x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}=1$

90. Determina el valor de los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+3x}\right)^{x^2+2x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2+3}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{e^x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2}\right)^{2x-4}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}}\right)^{\sqrt{-x}}$

h) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{-x}}{2-e^{-x}}\right)^{x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\left(\frac{x+4}{x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\left(\frac{1}{x+3}\right)}=e^1=e$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+3x}\right)^{x^2+2x}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+3x}\right)^{x^2+2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x\right)\left(\frac{2x^2+5x}{2x^2+3x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x\right)\left(\frac{2x}{2x^2+3x}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x+3}{-2x-3}\right)^{x^2+3}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2+3}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3\right)\left(\frac{-2x+3}{-2x-3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3\right)\left(\frac{6}{-2x-3}\right)}=$

$=e^{-\infty}=0$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{e^x}}=1^1=1$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2}\right)^{2x-4}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2}\right)^{2x-4}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)\left(\frac{x^3+4x}{x^3+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)\left(\frac{4x-2}{x^3+2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^2-20x+8}{x^3+2}}=e^0=1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\right)\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x-\sqrt{x}}\right)}=e^4$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}}\right)^{\sqrt{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}}\right)^{\sqrt{-x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=e^1=e$

h) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{-x}}{2-e^{-x}}\right)^{x}=1^0=1$

91. Utilizando infinitésimos, halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2+2x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\ln(1+x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2\cdot\operatorname{cotg}^2 x$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x^2}{\left[\ln(1+x)\right]^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2x^2-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$, ya que $x \sim \operatorname{sen} x$ si $x \to 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2+2x+5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{x^2+2x+5} = \dfrac{0}{5} = 0$, ya que $2x \sim \operatorname{tg} 2x$ si $x \to 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x} = 4$, ya que $x \sim \ln(1+x)$ si $x \to 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$, ya que $1+x \sim 1+\operatorname{sen} x$ si $x \to 0$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(1+\operatorname{sen} x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\operatorname{sen} x)} = e^1 = e$, ya que $1+x \sim 1+\operatorname{sen} x$ si $x \to 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2}(1+\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

ya que $\dfrac{x^2}{2} \sim 1-\cos x$ si $x \to 0$

g) $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2\cdot\operatorname{cotg}^2 x = 0\cdot\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} 2x^2\cdot\operatorname{cotg}^2 x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$, ya que $x \sim \operatorname{tg} x$ si $x \to 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x^2}{\left[\ln(1+x)\right]^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x^2}{x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, ya que $x \sim \ln(1+x)$ si $x \to 0$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1-\frac{x^2}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{2-x^2}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$, ya que $\cos x \sim 1-\dfrac{x^2}{2}$ si $x \to 0$

j) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

ya que $\dfrac{x^2}{2} \sim 1-\cos x$ si $x \to 0$

92. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-b\cos x}{x}$ es finito:

a) Calcula el valor de *b*.

b) Para ese valor de *b*, calcula el valor del límite.

a) $b = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2} = 0$

Límites de sucesiones

93. Estudia la monotonía y la acotación de las siguientes sucesiones.

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2} \qquad b_n = \frac{2n^2-3}{n^2} \qquad c_n = \frac{2n+3}{2^n}$$

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(n+1)+3}{(n+1)^2} - \dfrac{2n+3}{n^2} = -\dfrac{2n^2+8n+3}{n^2(n+1)} < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$a_n = \dfrac{2n+3}{n^2} > 0 \Rightarrow$ Acotada superiormente por $a_1 = 5$ e inferiormente por 0.

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{2(n+1)^2-3}{(n+1)^2} - \dfrac{2n^2-3}{n^2} = \dfrac{2n^2+4n-1}{(n+1)^2} - \dfrac{2n^2-3}{n^2} = \dfrac{3(2n+1)}{n^2(n+1)^2} > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

$b_n = \dfrac{2n^2-3}{n^2} = 2 - \dfrac{3}{n^2} < 2 \Rightarrow$ Acotada superiormente por 2 e inferiormente por $b_1 = -1$.

$c_{n+1} - c_n = \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} - \dfrac{2n+3}{2^n} = \dfrac{2n+5-4n-6}{2^{n+1}} = -\dfrac{2n+1}{2^{n+1}} < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$c_n = \dfrac{2n+3}{2^n} > 0 \Rightarrow$ Acotada superiormente por $c_1 = \dfrac{5}{2}$ e inferiormente por 0.

94. Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-3}{n^3+n^2}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+3}{4n+3}}$ **g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$ **j)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n^2-3}{n^2-2n+3}$ **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}}$ **h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n^2-1}\cdot\dfrac{n+1}{5}\right)$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)$ **i)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-3}{n^3+n^2}=\dfrac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-3}{n^3+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{0}{1}=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n^2-3}{n^2-2n+3}=\dfrac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n^2-3}{n^2-2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n^2-1}\cdot\dfrac{n+1}{5}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+3}{5n^2-5n}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+3}{5n^2-5n}\right)=\dfrac{2}{5}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+3}{4n+3}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{4n+3}}=\sqrt{\dfrac{\infty}{\infty}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+3}{4n+3}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{3}{n}}{4+\frac{3}{n}}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{2n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{2n^2+1}+n\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1-n^2}{\sqrt{2n^2+1}+n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{\sqrt{2n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{+\infty}{\sqrt{2}+1}=+\infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}\right)}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{+\infty}{2}=+\infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1}=1^{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\left(\frac{2n-3}{2n+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\left(\frac{-6}{2n+3}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-12n-6}{2n+3}}=e^{-6}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1}=1^{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+2n+1\right)\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+2n+1\right)\left(\frac{-n-1}{n^2+1}\right)}=e^{-\infty}=0$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}}=1^{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2n}{2n^2-n-3}\right)}=e^{3}$

Continuidad de una función

95. Indica si las siguientes funciones son o no continuas en el punto o puntos que se indican.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+2}$ en $x=2$

b) $f(x)=\dfrac{x}{2-\sqrt{3-2x}}$ en $x=\dfrac{3}{2}$

c) $f(x)=\ln\left(2x^2+4x-6\right)$ en $x=-3$

d) $f(x)=\ln\left(2x^2+4x-6\right)$ en $x=0$

e) $f(x)=\ln\left|2x^2+4x-6\right|$ en $x=0$

f) $f(x)=\operatorname{tg}x$ en $x=\pi$ y en $x=\dfrac{\pi}{2}$

a) No es continua en $x=2$ porque $f(x)$ no está definida en $x=2$, ya que en dicho punto, el denominador se anula.

b) Es continua por la izquierda porque $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\sqrt{3-2\cdot\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$ y $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\sqrt{3-2\cdot\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{4}$, pero no por la derecha porque $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\sqrt{0^-}}$ que no existe.

c) No es continua en $x=-3$ que no existe el logaritmo de cero.

d) No es continua ni discontinua en $x=0$ ya que no hay función en $[-3,1]$ porque no existe el logaritmo de los números negativos.

e) Sí, es continua en $x=0$ ya que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ln|-6|=\ln 6$.

f) Sí, es continua en $x=\pi$ ya que $f(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=\operatorname{tg}\pi=0$.

No es continua en $x=\dfrac{\pi}{2}$ porque no existe la $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ y además $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg}x=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x=+\infty$.

96. Traza la gráfica de las siguientes funciones definidas a trozos, indica su dominio y estudia su continuidad, especificando, en su caso, el tipo de discontinuidad.

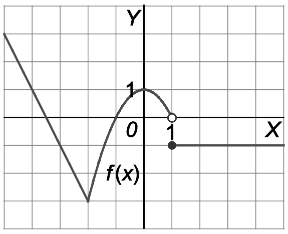
a) $f(x)=\begin{cases}-2x-7 & \text{si } x\le -2\\ 1-x^2 & \text{si } -2<x<1\\ -1 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & \text{si } x<-1\\ x^2 & \text{si } -1\le x\le 2\\ -x+6 & \text{si } x>2\end{cases}$

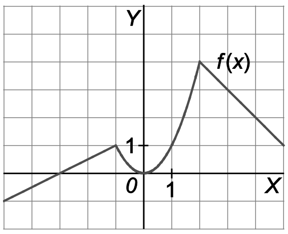
c) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<-1\\ x^3 & \text{si } -1\le x\le 1\\ -x^2+4x-2 & \text{si } x>1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & \text{si } x<-1\\ 5-x^2 & \text{si } -1\le x\le 2\\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x>2\end{cases}$

a) Es continua en todos los puntos excepto en $x=1$ donde presenta un punto de discontinuidad no evitable de salto finito.



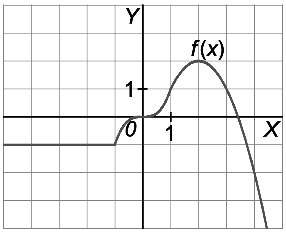
b) Es continua en todo el conjunto de los números reales.



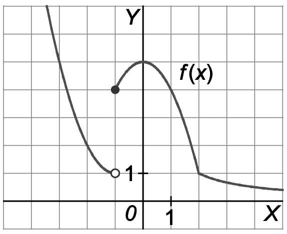
c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1,\ f(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1,\ f(1)=1$

La función es continua en 1 y –1, luego, en todo $\mathbb{R}$.



d) Es continua en todos los puntos excepto en $x=-1$ donde se presenta un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.



97. Estudia la continuidad de las siguientes funciones estableciendo en cada caso el subconjunto de números reales más amplio posible donde la función sea continua.

a) $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^4+x^2+4}$ **e)** $f(x)=\dfrac{2x+x^2}{3-\sqrt{x+4}}$ **i)** $f(x)=xe^x$ **m)** $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^3-x-6}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x^3-3x+2}$ **j)** $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ **n)** $f(x)=\dfrac{1}{1-2\cos^2 x-\operatorname{sen} x}$

c) $f(x)=e^{-x^2}+x\cos x$ **g)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x+2}}$ **k)** $f(x)=x^2\ln(x-1)$

d) $f(x)=e^{2x^2}+2xe^x+3$ **h)** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ **l)** $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$ excepto en aquellos puntos en que se anula el denominador.

$x^4+x^2+4=0\Rightarrow x^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{-15}}{2}\Rightarrow$ No existe ningún real que anule el denominador, es continua en $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en $\mathbb{R}$ excepto en aquellos puntos en que se anula el denominador.

$x^3-x-6=0\Rightarrow(x-2)(x^2+2x+3)=0\Rightarrow x=2$. Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

c) La función es continua en $\mathbb{R}$ ya que es suma y producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

d) La función es continua en $\mathbb{R}$ ya que es suma y producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

e) $3-\sqrt{x+4}=0\Rightarrow\sqrt{x+4}=3\Rightarrow x+4=9\Rightarrow x=5$

$\begin{cases}x+4\ge 0\\ 3-\sqrt{x+4}\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -4\\ x\ne 5\end{cases}\Rightarrow$ Es continua en $(-4,5)\cup(5,+\infty)$. Además es continua en $x=-4$ por la derecha.

f) Solo existe la raíz cuadrada de los números positivos o nulos. Por tanto:

$x^3-3x+2\ge 0\Rightarrow(x+2)(x-1)^2\ge 0\Rightarrow x+2\ge 0\Rightarrow x\ge -2\Rightarrow$ La función es continua en $(-2,+\infty)$. Además, es continua en $x=2$ por la derecha.

g) $\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x+2}\ge 0\\ x\ne -2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x+2}\ge 0\\ x\ne -2\end{cases}\Rightarrow$ La función es continua en $(-2,1]\cup[2,+\infty)$.

Además, es continua en $x=1$ por la izquierda y en $x=2$ por la derecha.

h) Las raíces cúbicas están definidas tanto para números positivos como para números negativos. La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

i) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que es producto de funciones continua en todo $\mathbb{R}$.

j) $\begin{cases}x>0\\ \ln x\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x\ne 1\end{cases}\Rightarrow$ Continua en $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

k) La función es continua en todo el dominio de definición del logaritmo neperiano, que, dado que $x-1>0$, implica que $x>1$, es, en este caso, el intervalo $(1,+\infty)$.

l) $\begin{cases}x>0\\ 1+\ln x\ne 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x\ne\dfrac{1}{e}\end{cases}\Rightarrow$ La función es continua en $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

m) $\cos x\ne 0\Rightarrow$ La función es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en los puntos de la forma $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$.

n) $1-2\cos^2 x-\operatorname{sen} x=0\Rightarrow -2+2\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x+1=0\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x-1=0\Rightarrow\operatorname{sen} x=1,\operatorname{sen} x=-\dfrac{1}{2}$

Por tanto, la función es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en los puntos $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

98. Calcula el valor o los valores que se deben dar a *k* para que las siguientes funciones sean continuas en todo el conjunto de números reales.

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1 & \text{si } x\le -2\\ 2x+k & \text{si } x>-2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2k & \text{si } x\le 1\\ x^2-3x-k & \text{si } x>1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2+kx & \text{si } x<3\\ \ln(x-2) & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}kx^2-1 & \text{si } x\le 3\\ e^{x^2-9} & \text{si } x>3\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} & \text{si } x\ne 3\\ 2k-3 & \text{si } x=3\end{cases}$

a) $\frac{1}{2}\cdot(-2)^2+1=2\cdot(-2)+k\Rightarrow k=7$.

Para $k=7$: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)=3$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(2x+7)=3$ y $f(-2)=3$. Luego la función es continua en $x=-2$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$

b) $1-2k=-2-k\Rightarrow k=3$.

Para $k=3$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-6\right)=-5$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-3x-3\right)=-5$ y $f(1)=-5$. Luego la función es continua en $x=1$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

c) $9+3k=\ln 1=0\Rightarrow k=-3$.

Para $k=-3$: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2-3x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\ln(x-2)=0$ y $f(3)=0$. Luego la función es continua en $x=3$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

d) $9k-1=e^0=1\Rightarrow k=\frac{2}{9}$.

Para $k=\frac{2}{9}$: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{2}{9}x^2-1\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} e^{x^2-9}=1$ y $f(3)=1$. Luego la función es continua en $x=3$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{x+1}=\frac{1}{4}$. Por tanto, $2k-3=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\frac{13}{8}$.

99. Expresa las siguientes funciones como funciones definidas a trozos y estudia su continuidad.

a) $f(x)=|x-2|$

b) $f(x)=2x+|x-2|$

c) $f(x)=|x-2|+|x+1|$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x+1|}$

e) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2+|x+1|}$

f) $f(x)=e^{2|x|+1}$

a) $f(x)=|x-2|=\begin{cases}2-x & \text{si } x<2\\ x-2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $f(x)=2x+|x-2|=\begin{cases}2x-x+2 & \text{si } x<2\\ 2x+x-2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}=\begin{cases}x+2 & \text{si } x<2\\ 3x-2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

c) $f(x)=|x-2|+|x+1|=\begin{cases}-2x+1 & \text{si } x<-1\\ 3 & \text{si } -1\leq x\leq 2\\ 2x-1 & \text{si } x>2\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

d) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x+1|}=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{-(x+1)} & \text{si } x<-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x+1} & \text{si } x>-1\end{cases}=\begin{cases}-x & \text{si } x<-1\\ x & \text{si } x>-1\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x=-1$.

e) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2+|x+1|}=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ 0 & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x>0\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

f) $f(x)=e^{2|x|+1}=\begin{cases}e^{-2x+1} & \text{si } x<0\\ e^{2x+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano y teorema de los valores intermedios

100. Comprueba que las siguientes funciones cortan al eje *X* en al menos un punto, e indica un intervalo de extremos de números enteros consecutivos al cual pertenezca dicho punto.

a) $f(x)=2x^4-x^3+x^2-1$

b) $f(x)=\cos x-x+1$

c) $f(x)=xe^x-x-16$

d) $f(x)=x^3+x^2-\cos\pi x+2$

a) $f(0)=-1<0, f(1)=1>0\Rightarrow$ La función corta al eje X en un punto del intervalo $(0,1)$.

b) $f(1)=\cos 1>0, f(2)=\cos 2-1<0\Rightarrow$ La función corta al eje X en un punto del intervalo $(1,2)$.

c) $f(2)=2e^2-18<0, f(3)=3e^3-19>0\Rightarrow$ La función corta al eje X en un punto del intervalo $(2,3)$.

d) $f(-2)=-4-1+2<0, f(-1)=3>0\Rightarrow$ La función corta al eje X en un punto del intervalo $(-2,-1)$.

101. Comprueba que las siguientes funciones toman el valor *M* indicado en algún punto del intervalo propuesto.

a) $f(x)=x^5-x^3-x+5$; $M=-1$ en $(-2,-1)$

b) $f(x)=xe^{-x}+3$; $M=\dfrac{3}{2}$ en $(-1,0)$

c) $f(x)=\operatorname{sen}x-\cos x+2$; $M=3$ en $(1,2)$

a) $f(-2)=-17, f(-1)=6$. En $(-2,-1)$ toma todos los valores comprendidos entre –17 y 6.

En particular, toma el valor –1.

b) $f(-1)=0,2817, f(0)=3$. En $(-1,0)$ toma todos los valores comprendidos entre 0,2817 y 3.

En particular, toma el valor 1,5.

c) $f(1)=2,3, f(2)=3,32$. En $(1,2)$ toma todos los valores comprendidos entre 2,3 y 3,32.

En particular, toma el valor 3.

De otra forma y sin calculadora: $\dfrac{\pi}{2}\in(1,\ 2)$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-0+2=3=M$

102. Para cada una de las siguientes funciones, y considerando el intervalo señalado, estudia, si es acotada, e indica el valor del supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si es que existen.

a) $f(x)=-x^2+5x-6$ en $[1,3]$

b) $f(x)=-x^2-2x-1$ en $[-1,0]$

c) $f(x)=\dfrac{x}{2x-4}$ en $[-2,1]$

d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ en $[-2,0]$

e) $f(x)=x^2+5x-6$ en $(-3,0)$

f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ en $(0,1]$

a) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo. Supremo y máximo en $x=2,5$ y vale $M=0,25$. Ínfimo y mínimo en $x=1$ y vale $m=-2$.

b) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo. Supremo y máximo en $x=-1$ y vale $M=0$. Ínfimo y mínimo en $x=0$ y vale $m=-1$

c) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo. Supremo y máximo en $x=-2$ y vale $M=0,25$. Ínfimo y mínimo en $x=1$ y vale $m=-0,5$.

d) La función no es acotada ni superiormente ni inferiormente. Por tanto, no posee ni ínfimo, ni mínimo, ni supremo ni máximo.

e) La función es acotada. Ínfimo y mínimo en $x=-2,5$ y vale $m=-12,25$. Sin máximo pero supremo $M=-6$.

f) La función no es acotada superiormente pero sí inferiormente. No tiene, pues, supremo ni máximo. El ínfimo y mínimo se alcanza en $x=1$ y vale $m=1$.

103. a) Comprueba que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.

b) Calcula dicha solución con aproximación a las centésimas.

a) $f(x) = sen\, x - 2x + 3$ es continua y $f(1) > 0, f(2) < 0 \Rightarrow$ Por Bolzano tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.

b) Como $f(1)f(2) < 0 \Rightarrow$ Puede aplicarse el método de la bisección.

	Intervalo $[a_n, b_n]$		Punto medio	Valor de $f(c_n)$
Paso	a_n	b_n	c_n	
1	1	2	1,5	0,9975
2	1,5	2	1,75	0,4840
3	1,75	2	1,875	0,2041
4	1,875	2	1,9375	0,0585
5	1,9375	2	1,9687	−0,0156
6	1,9375	1,9687	1,9531	0,0216
7	1,9531	1,9687	1,9609	0,0031
8	1,9609	1,9687	1,9648	0,0062

Síntesis

104. Calcula el valor de *k* para que se verifique, en cada caso, que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)=\dfrac{5}{2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}\right)}{\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+3)x-8}{\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}}=\frac{k+3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{k+3}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow k=2$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{5+k}{0}$. Para que el límite pueda valer 2, es necesario que $5+k=0\Rightarrow k=-5$.

Efectivamente, en este caso:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1}=\frac{4}{2}=2$$

105. Calcula los valores de *a* y *b* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}+an+b\right)=0$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+3}{2n+1}+an+b\right)=0$

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}+an+b\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1+an^2+bn+an+b}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+a)n^2+(a+b)n+1+b}{n+1}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}1+a=0\\a+b=0\end{cases}$$

Luego $a=-1$ y $b=1$.

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+3}{2n+1}+an+b\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+2a)n^2+(a+2b+2)n+3+b}{2n+1}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}1+2a=0\\a+2b+2=0\end{cases}.$$

Luego $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{4}$.

106. Dada la sucesión $a_n = 3 + \dfrac{1}{n}$:

a) Demuestra que es decreciente y acotada inferiormente. Calcula su límite.

b) Averigua a partir de qué término los siguientes se aproximan a 3, con un error menor de $\varepsilon = 0{,}001$.

a) $a_{n+1} - a_n = 3 + \dfrac{1}{n+1} - 3 - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n^2+n} < 0$. La sucesión es decreciente. Una cota inferior de la sucesión es 3.

El límite es: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right) = 3 + \dfrac{1}{+\infty} = 3 + 0 = 3$

b) $|a_n - 3| < 0{,}001 \Rightarrow \left|3 + \dfrac{1}{n} - 3\right| < 0{,}001 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < 0{,}001 \Rightarrow n \geq 1001$. A partir del término 1001.

107. Calcula el valor de *a* para que el límite de la sucesión $a_n = \left(\dfrac{n^2+an+2}{n^2+n+2}\right)^n$ sea 2.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}\right)^n = 1^{+\infty} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}-1\right)}.$$

Calculamos el límite del exponente:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(a-1)n}{n^2+n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(a-1)n^2}{n^2+n+2}\right) = a-1.$$

Entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = e^{a-1} = 2 \Rightarrow a-1 = \ln 2 \Rightarrow a = 1 + \ln 2.$$

108. Calcula los valores de *a* y *b* para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-1}+ax & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2-2x-2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 1+b = e^{1-1}+a \\ e^{3-1}+3a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1-e^2}{3}$$

109. Calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{3x^2+x+2}\right)^{-x^2+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{3x^2+x+2}\right)^{-x^2+1} = 1^{-\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{3x^2+x+2}\right)^{-x^2+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+1)\left(\frac{3x^2}{3x^2+x+2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+1)\left(\frac{-x-2}{3x^2+x+2}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+1)\left(\frac{-x-2}{3x^2+x+2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{3x^2+x+2}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

Cuestiones

110. Pon un ejemplo de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que exista $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-g(x)]$, pero que no exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

$f(x)=\begin{cases}-1 \text{ si } x<0\\ 1 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x<0\\ -1 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$ $\quad f(x)+g(x)=0$

111. a) Escribe una sucesión monótona creciente, acotada superiormente, con todos sus términos negativos.

b) Escribe una sucesión que no sea creciente ni decreciente, y que sea acotada superiormente y acotada inferiormente.

c) Escribe una sucesión que sea creciente y decreciente a la vez.

d) Escribe una sucesión acotada superiormente, decreciente y no convergente.

a) $a_n=-\frac{1}{n}\rightarrow -1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},-\frac{1}{5},...$

b) $a_n=(-1)^n \rightarrow -1,1,-1,1,-1,...$ Es oscilante. Además solo toma dos valores, por lo que está acotada.

c) $a_n=1\rightarrow 1,1,1,1,...$ Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez.

d) $a_n=-n\rightarrow -1,-2,-3,...$

112. Da una explicación de por qué no existen los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}\frac{1}{x}$

Los límites correspondientes a los apartados a), c) y e) no existen, ya que las funciones son periódicas y, por tanto, no se acercan a ningún número ni a infinito cuando x se hace cada vez más grande. Oscilan de forma indefinida.

Los límites correspondientes a los apartados b), d) y f) son equivalentes a los anteriores haciendo el cambio de variable $t=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty} \operatorname{sen} t$$

$$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty} \cos t$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty} \operatorname{tg} t$$

113. Escribe la expresión de una función continua en todo $\mathbb{R}$ tal que coincida con $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1}$ en todos los puntos del dominio de esta última.

$$\frac{x^4-1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}$$

Por tanto, $g(x)=x^2+1$ coincide con $f(x)$ en todos los puntos del dominio de esta.

Problemas

114. Una empresa presta servicios de asesoramiento mediante consultas telefónicas. La función que expresa el coste total anual, en euros, de prestar *x* consultas telefónicas, teniendo en cuenta todos los gastos es:

$$\boldsymbol{f(x)=7{,}5x+6500}$$

a) Escribe la expresión de la función que facilita el coste por asesoramiento cuando se han contestado *x* consultas telefónicas y halla el coste aproximado de cada servicio telefónico cuando se presta una gran cantidad de ellos.

b) Si se decide cobrar por cada servicio prestado un 25 % más del coste hallado en el apartado anterior, ¿cuál es el beneficio obtenido al resolver 8000 consultas?

a) Coste por asesoramiento: $C(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{7{,}5x+6500}{x}$.

Coste aproximado de asesoramiento cuando se presta gran cantidad de ellos: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7{,}5x+6500}{x}=7{,}5$ €

b) Se cobrará $7{,}5\cdot1{,}25=9{,}375$ € por servicio. Luego el beneficio es de 1,875 €.

Al resolver 80 000 consultas el beneficio obtenido será de 15 000 €.

115. La población de insectos en una laguna centroamericana evoluciona con el paso de x días según la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{15\,000x+\sqrt{\frac{20\,000x+8000}{3}}}{x+1}}$$

a) Indica la población que existe al comienzo del período considerado y cuando han pasado 5,7 y 10 días.

b) Si la población siguiese la ley indicada de forma indefinida, ¿en qué valor aproximado se estabilizará?

a) La población al comienzo: $f(0)=51{,}6$. Aproximadamente 52 insectos.

A los 5 días: $f(5)=12\,532$ insectos.

A los 7 días: $f(7)=13\,153$ insectos.

A los 10 días: $f(10)=13\,660$ insectos.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{15\,000x+\sqrt{\frac{20\,000x+8000}{3}}}{x+1}=\frac{15\,000}{1}=15\,000$ insectos.

116. El tiempo, en segundos, que tarda un atleta en correr 100 m lisos viene dado por la función $\boldsymbol{f(x)=9+e^{-x}}$ donde *x* es el número de días que ha entrenado previamente. Calcula el tiempo que tardará en realizar la carrera tras un largo período de entrenamiento.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(9+e^{-x}\right)=9$, entonces tardará 9 segundos en realizar la carrera.

117. Un equipo de investigación ha estimado que el número de bacterias, en miles, de un cultivo, en función del tiempo *t* que ha pasado desde un instante inicial *t* = 0 horas, viene dado por la función:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{9}t^2+1 & \text{si } 0\le t\le 3\\[2mm] \dfrac{4t}{t+1} & \text{si } t>3\end{cases}$$

a) Comprueba que la función es continua en todo su dominio.

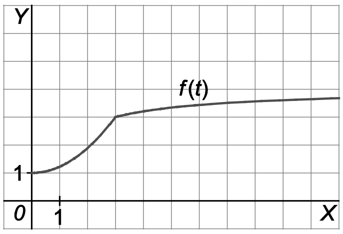
b) Haz una representación de la función.

c) Demuestra que existe algún instante en el que el número de bacterias es de 3500. Da un intervalo de tiempo de longitud menor a 30 minutos en el que esté incluido dicho instante.

a) $\lim\limits_{t\to 3^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 3}\left(\dfrac{2}{9}t^2+1\right)=3$, $\lim\limits_{t\to 3^+}\dfrac{4t}{t+1}=\dfrac{12}{4}=3$ y $f(3)=3$

La función es continua en $t=3$ y, por tanto, en todo su dominio $[0,+\infty)$.

b)



c) $3{,}5=\dfrac{4t}{t+1}\Rightarrow 3{,}5t+3{,}5=4t\Rightarrow 0{,}5t=3{,}5\Rightarrow t=7$ horas.

En el intervalo $(6\text{h } 45\text{min}, 7\text{h } 15\text{min})$, en $t=7$, en el que el número de bacterias es de 3500 (3,5 miles).

Para profundizar

118. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+1)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$

119. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^x}{e^x}+\dfrac{e^{-x}}{e^x}}{\dfrac{e^x}{e^x}-\dfrac{e^{-x}}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}{1-\dfrac{1}{e^{2x}}}=\dfrac{1}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^{-x}}{e^x}+\dfrac{e^x}{e^x}}{\dfrac{e^{-x}}{e^x}-\dfrac{e^x}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{e^{2x}}+1}{\dfrac{1}{e^{2x}}-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$

120. Calcula el siguiente límite, estudiando previamente los límites laterales. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}}{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}-\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{1}{e^{\frac{2}{x}}}}{1-\frac{1}{e^{\frac{2}{x}}}}=\frac{1}{1}=1$$

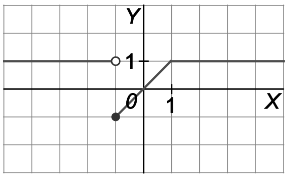
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}+\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}}{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}-\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}+1}{e^{\frac{2}{x}}-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

Como los límites laterales no coinciden, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$ no existe.

121. Representa gráficamente la función y estudia su continuidad.

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } |x|\le 1\\ 1 & \text{si } |x|>1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<-1\\ x & \text{si } -1\le x\le 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$



Es discontinua en x = -1 ya que: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1\neq -1=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ y continua en los demás números reales.

122. Determina los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+8+\ldots+2n}{n^2+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)+\ldots+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)n}{2\cdot 2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{4n^2}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+8+\ldots+2n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+2n)n}{2\left(n^2+1\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n}{2n^2+2}=\dfrac{2}{2}=1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)+\ldots+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}+1+\frac{n}{n}\right)n}{2}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n}=\dfrac{3}{2}$

123. Dada la sucesión por recurrencia $a_1 = 1$ $a_n = \dfrac{1}{1+a_{n-1}}$:

a) Calcula sus primeros términos.

b) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

a) $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3},\ a_4 = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3}{5},\ a_5 = \dfrac{1}{1+\dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{8},\ a_6 = \dfrac{1}{1+\dfrac{5}{8}} = \dfrac{8}{13}$

b) Como la sucesión es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = L$. Por tanto:

$$L = \frac{1}{1+L} \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, L = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

La sucesión a_n es de términos positivos entonces la solución válida es $L = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el dominio de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{(x-5)^2\left(4x^4+1\right)}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2-9}}$

c) $f(x) = \log_3 \sqrt{x^2-x}$

a) $(x-5)^2\left(4x^4+1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ 4x^4+1=0 \end{cases} \Rightarrow$ La única solución real es $x = 5$. Por tanto, la función existe en todo el conjunto de los números reales excepto en $x = 5$. Luego $D(f) = (-\infty,5) \cup (5,+\infty)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-9} \geq 0 \\ x^2-9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-3,0] \cup (3,+\infty)$. Luego $D(f) = (-3,0] \cup (3,+\infty)$.

c) Para que exista $\log_3 \sqrt{x^2-x}$ debe ocurrir que $x^2 - x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$. Luego $D(f) = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

2. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^4-3x+5}{-3x^3+x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}-5}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x}$

e) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18}$

h) $\lim\limits_{x\to 3^-} \left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right]$

i) $\lim\limits_{x\to-4} \left(\dfrac{2x-3}{-11}\right)^{\frac{x+4}{3}}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+3}\right)^{\frac{-x^3}{x^3+1}}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^4-3x+5}{-3x^3+x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^4}{-3x^3} = \dfrac{-\infty}{+\infty} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}-5}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{2\sqrt[5]{x^2}} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right) = \infty-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2-x}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-\left(4x^2-x\right)}{2x+\sqrt{4x^2-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4x} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left(2-\sqrt{x+2}\right)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x-2}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x+2}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2x\left(2+\sqrt{x+2}\right)} = \dfrac{1}{16}$

e) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{36}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{36}{0^+} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{36}{0^+} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$ No existe límite.

g) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18} = \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2(4x+4)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2(4x+8)} = \dfrac{-6+4}{-6+8} = -1$

h) $\lim\limits_{x\to 3^-} \left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right] = \infty-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} \left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right] = \lim\limits_{x\to 3^-} \left[\dfrac{x+3-3}{x^2-9}\right] = \lim\limits_{x\to 3^-} \left[\dfrac{x}{x^2-9}\right] = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x\to-4} \left(\dfrac{2x-3}{-11}\right)^{\frac{x+4}{3}} = 1^0 = 1$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+3}\right)^{\frac{-x^3}{x^3+1}} = 1^{-1} = 1$

3. **a)** Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{2n-3}{n+5}$ es monótona creciente y acotada superiormente.

b) Calcula su límite.

a) Monótona creciente. Se debe demostrar que $a_{n+1} - a_n \geq 0$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-3}{n+1+5} - \frac{2n-3}{n+5} = \frac{2n^2+10n-n-5+2n^2-12n+3n+18}{(n+6)(n+5)} = \frac{13}{(n+6)(n+5)} > 0$$

Acotada superiormente por 2. Se debe demostrar que $a_n - 2 \leq 0$.

$$a_n - 2 = \frac{2n-3}{n+5} - 2 = \frac{2n-3-2n-10}{n+5} = -\frac{13}{n+5} < 0$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2n-3}{n+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2n}{n} = 2$

4. **Calcula el valor de a para que el siguiente límite valga e^2.**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+1)\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+1)\left(\frac{2x+2}{3x^2-1}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2ax^2}{3x^2}} = e^{\frac{2a}{3}} \Rightarrow \frac{2a}{3} = 2 \Rightarrow a = 3$$

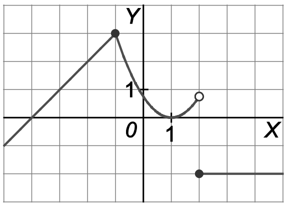
5. **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -1 \\ a(x-1)^2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ -2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$**:**

a) Calcula el valor de a para que sea continua en el punto $x = -1$.

b) Para este valor de a hallado, dibuja la función e indica el tipo de discontinuidad que presenta en $x = 2$.

a) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}(x+4) = 3$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(a(x-1)^2\right) = 4a = f(-1)$. Luego $4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

b)



Como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{3}{4}(x-1)^2\right) = \frac{3}{4}$ y $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}(-2) = -2$, la función presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

6. ***Con la ayuda del teorema de Bolzano y de forma razonada, indica tres intervalos, sin puntos comunes entre ellos, en los que la ecuación $-2x^3+3x^2+x-1=0$ tenga una solución.**

$f(x)=-2x^3+3x^2+x-1$ Es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, en cualquier intervalo cerrado.

$$\begin{cases} f(-1)=2+3-1-1=3>0 \\ f(0)=-1<0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_1 \in (-1,0) \text{ tal que } f(c_1)=0$$

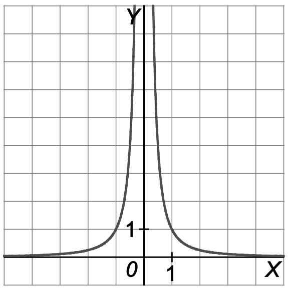
$$\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f(1)=-2+3+1-1=1>0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_2 \in (0,1) \text{ tal que } f(c_2)=0$$

$$\begin{cases} f(1)=1>0 \\ f(2)=-16+12+2-1=-3<0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_3 \in (1,2) \text{ tal que } f(c_3)=0$$

7. **Estudia si la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ es acotada e indica, si existe, su supremo, ínfimo, máximo y mínimo en:**

a) Toda la recta real $\mathbb{R}$.

b) El intervalo $[-2,-1]$.



a) En $\mathbb{R}$, la función es acotada inferiormente, pero no superiormente.

El ínfimo es $m=0$, pero no tiene mínimo. No tiene ni máximo ni supremo.

b) En el intervalo cerrado $[-2,-1]$ la función es acotada superiormente e inferiormente.

El máximo absoluto (y supremo) lo alcanza en $x=-1$ y vale 1 y el mínimo absoluto (e ínfimo) lo alcanza en $x=-2$ y vale 0,25.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **El valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}\log_2\left(\dfrac{2-2^x}{2}\right)$ vale:**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 1 **D.** 0

La solución es D. Calculando el límite: $\lim\limits_{x\to-\infty}\log_2\left(\dfrac{2-2^x}{2}\right)=\log_2\left(\dfrac{2-0}{2}\right)=\log_2 1=0$

2. **Calcula a y b para que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=-5$**

A. $a=8$, $b=-12$ **B.** $a=-8$, $b=12$ **C.** $a=8$, $b=12$ **D.** $a=-8$, $b=-12$

La solución es B. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=\dfrac{8-4+2a+b}{0}$. Para que este límite sea finito, es necesario que $4+2a+b=0$.

En este caso, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+x+a+2)}{(x-2)(x^2-5x+6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+a+2}{x^2-5x+6}=\dfrac{8+a}{0}\Rightarrow a=-8, b=12$

Se comprueba que para estos valores el límite vale: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-7x^2+16x-12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-2}{6x-14}=\dfrac{10}{-2}=-5$

3. **La función $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$:**

A. Es continua en $x=3$

B. Presenta una discontinuidad evitable en $x=3$.

C. Presenta una discontinuidad de salto finito en $x=3$.

D. Presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=3$.

La solución es B. En x = 3, la función no está definida pero tomando límites se tiene:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(x+2)=5$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+2)=5$$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **La ecuación $x^5+ax^3+b=0$:**

A. Tiene al menos una solución.

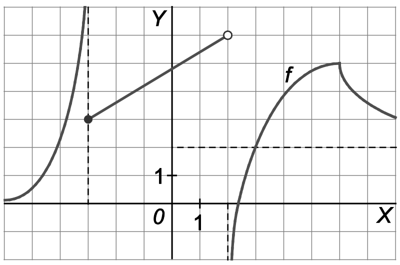
B. Tiene al menos dos soluciones.

C. Puede no tener solución.

D. Puede tener más de una solución.

Las soluciones son A y D. Por tener grado impar sus límites en $\pm\infty$ son $\pm\infty$, respectivamente, y por ser además continua, la función debe cortar al menos una vez al eje de abscisas, es decir, tener al menos una solución. Puede que solo corte una vez o puede que lo corte hasta 5 veces, dependerá de si las soluciones son reales o complejas.

5. **Dada la gráfica de $f(x)$:**



A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

B. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=3$

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Las soluciones son A, C y D. Observando la gráfica, se aprecia que B no es cierta porque $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **El dominio de la función f es el intervalo $[3,7]$ y es continua en dicho dominio.**

1. **$f(x)=0$ tiene una raíz en $(3,7)$.**

2. **$f(3)f(7)<0$**

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$.

D. 1 y 2 no se pueden dar a la vez.

La solución es C. Esta relación es clara por el teorema de Bolzano, que asegura al menos una raíz si hay cambio de signo en los extremos. Las respuestas A y B no son correctas, porque por ejemplo la función constante cero verifica 1, pero no 2. Finalmente, la respuesta D sería un contraejemplo del teorema de Bolzano.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se desea estudiar si la ecuación $f(x)=6$ tiene o no solución en el intervalo $[-3,3]$. ¿Qué dato es innecesario?**

A. $D(f)=\mathbb{R}$

B. $f(x)$ es continua en $[-3,3]$

C. $2<f(-3)<4$

D. $8<f(3)<10$

No es necesario conocer que el dominio de la función sea $\mathbb{R}$, porque es suficiente conocer el comportamiento de la función definida por esa ecuación $h(x)=f(x)-6$ en el intervalo $[-3,3]$. Por tanto, el dato innecesario es A.