1 Movimientos de los cuerpos celestes

E S Q U E M A D E L A U N I D A D

Cuestiones previas (página 36)

1. ¿Se mueve nuestro planeta a la misma velocidad en todos los puntos de su órbita alrededor del Sol?

No, porque según la segunda ley de Kepler cuanto mayor sea la distancia entre el Sol y la Tierra, menor será la velocidad. La Tierra se mueve más deprisa en el perihelio que en el afelio, pero barre áreas iguales en tiempos iguales.

2. ¿Por qué razón la mayoría de los cuerpos que componen el sistema solar orbitan en torno al Sol casi en el mismo plano?

Porque el momento angular de traslación de un planeta alrededor del Sol permanece constante en dirección.

3. ¿Por qué el eje de rotación terrestre se mantiene paralelo a sí mismo mientras la Tierra orbita en torno al Sol?

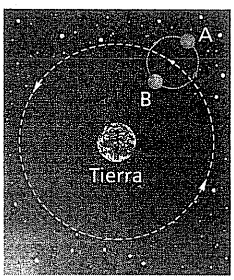
Por la ausencia de momentos de fuerza netos actuando sobre la Tierra. Esto explica la secuencia regular de las estaciones.

4. Se afirma que la fusión de los casquetes polares por un aumento de la temperatura planetaria produciría un ligero alargamiento de los días. ¿Sabes por qué?

La distribución de masa varía, y por tanto el momento de inercia. La conservación del momento angular exige que varíe la velocidad angular.

Actividades (páginas 37/57)

1 A la vista de la figura, ¿en qué punto del epiciclo se vería más brillante el planeta desde la Tierra? ¿En qué zona del epiciclo parecería retrogradar el planeta si el centro del epiciclo no se moviera?



Se vería más brillante en el punto B, y parecería retrogradar también cuando el planeta estuviera recorriendo el tramo de epiciclo próximo a B. Obsérvese que ambos giros se producen en sentido antihorario.

2 ¿Qué observaciones realizó Galileo para comprobar la ausencia de paralajes?

Galileo comprobó que las estrellas no parecían aumentar a través del telescopio, lo cual le hizo pensar que estaban muy lejos, tanto que no era posible detectar ningún paralaje.

3 Los seis meses transcurridos entre el 21 de marzo y el 21 de septiembre tienen más días que los comprendidos entre el 21 de septiembre y el 21 de marzo. ¿Se te ocurre alguna razón? ¿Entre qué fechas estará más próxima la Tierra al Sol?

En efecto, el tiempo comprendido entre el equinoccio de septiembre y el de marzo es menor que el que transcurre entre el equinoccio de marzo y el de septiembre. La razón es que ni la órbita terrestre es un círculo perfecto ni el Sol está en su centro. En consecuencia, y de acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad orbital de la Tierra es algo mayor cuanto más próxima está al Sol, cosa que ocurre durante el invierno boreal.

4 PAU A partir de los datos orbitales terrestres con respecto al Sol (T = 365 días y $r_{\text{Sol-Tierra}} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m), determina cuánto tarda Júpiter en completar una órbita alrededor del Sol (en segundos y años terrestres) sabiendo que su distancia al Sol es de $7{,}78 \cdot 10^{11}$ m.

Dato: el valor de la constante de Kepler, *k*, es el mismo para todos los planetas que orbitan alrededor del Sol.

De la tercera ley de Kepler sabemos que:

$$T^2 = kR^3 \Rightarrow \frac{T^2_{\text{Júpiter}}}{R^3_{\text{Júpiter}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}}$$

Por tanto:

$$T^2_{\text{Júpiter}} = T^2_{\text{Tierra}}\left(\frac{R_{\text{Júpiter}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3 = 1{,}87 \cdot 10^7$$

$$T_{\text{Júpiter}} = 4\,328{,}77 \text{ días} = 11{,}86 \text{ años} = 3{,}74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

5 Si una partícula se mueve a lo largo de una recta, ¿tendrá momento angular cero con respecto a un origen cualquiera elegido al azar? ¿Tendrá momento angular cero con respecto a algún origen específico? Razona tu respuesta.

Su momento angular no será cero, salvo que el origen elegido se encuentre en la recta del movimiento, en cuyo caso $\vec{r}$ y $\vec{p}$ serían paralelos.

6 Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve a lo largo de una recta con una velocidad constante $\vec{v} = 3\vec{j}$ m/s. Determina su momento angular con respecto al origen (0, 0) cuando el cuerpo está en los puntos (2, 0), (2, 1) y (2, 2) de la misma recta. ¿Qué conclusión obtienes respecto del momento angular de un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme?

Punto (2, 0): $\vec{r} = 2\vec{i}$ m

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Punto (2, 1): $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j}$ m

$$\vec{L} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Punto (2, 2): $\vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ m

$$\vec{L} = 12\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

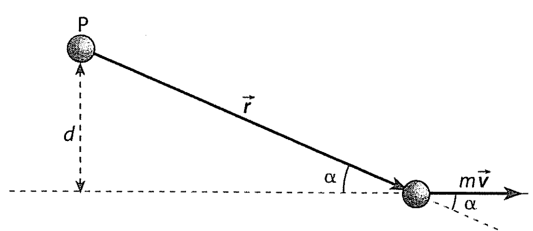
En consecuencia, el momento angular de un cuerpo con movimiento rectilíneo uniforme es constante.

7 Demuestra que el momento angular de una partícula de masa *m*, que se mueve con velocidad *v* a lo largo de una recta cuya distancia mínima al origen es *d*, es constante y tiene por valor $L = mvd$ en cualquier punto de la trayectoria.

El módulo del momento angular viene dado por la expresión:

$$L = rmv \operatorname{sen} \alpha$$

donde α es el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Sin embargo, como puede comprobarse en la figura:



$$r \operatorname{sen} \alpha = d$$

Por lo que:

$$L = mvd = \text{constante}$$

8 **PAU** **¿Permanece constante el momento angular de un electrón en una órbita determinada según el modelo de Bohr? Explícalo.**

El segundo postulado de Bohr establece, efectivamente, la constancia de dicha magnitud como consecuencia del carácter central de la fuerza electrostática entre núcleo y electrón. De ahí también que el modelo de Bohr supusiera órbitas planas para el movimiento de los electrones.

9 **Teniendo en cuenta tu respuesta a la actividad anterior, ¿puede usarse el valor del momento angular para caracterizar una determinada órbita? ¿Conoces algún número cuántico referido al momento angular?**

Efectivamente, al tener valor constante para cada órbita, el momento angular sirve para caracterizar las órbitas del átomo de Bohr. El número cuántico referido al momento angular es *n*, el número cuántico principal.

10 **¿Qué significado físico tiene el postulado de Bohr según el cual $mvr = \frac{nh}{2\pi}$?**

La formulación del segundo postulado de Bohr es:

$$L = m_e vr = n\hbar$$

Luego el momento angular caracteriza las distintas órbitas de Bohr a través del número cuántico principal, *n*.

11 **PAU** **Una pelota unida a una cuerda se hace girar en círculos horizontales alrededor de un eje, permitiendo que la cuerda se vaya arrollando en torno a dicho eje. ¿Permanece constante, aumenta o disminuye la velocidad de la pelota a medida que la cuerda se arrolla? ¿Cómo lo explicarías en términos del momento angular?**

Suponiendo que el efecto del peso es pequeño en el lapso de tiempo considerado, puede afirmarse que el momento angular es constante, es decir:

$$L = mvr = \text{constante}$$

Puesto que el radio disminuye al ir enrollándose la cuerda, para mantener *L* constante es preciso que la velocidad vaya aumentando progresivamente.

12 **PAU** **Teniendo en cuenta que la masa de la Tierra es de $6 \cdot 10^{24}$ kg, que su distancia media al Sol es de $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m y que su período orbital es de 365 días, determina:**

a) El valor de su momento angular de traslación respecto al Sol.

b) La velocidad areolar del movimiento de traslación terrestre (expresando sus unidades).

c) A partir del valor anterior y dando por cierto que la distancia al Sol permanece invariable en el transcurso de un día, determina qué distancia recorre la Tierra en un día durante su movimiento orbital. Compáralo con el que se obtendría al dividir la longitud orbital entre los 365 días.

a) El momento angular de traslación es:

$$L = mrv = mr^2\omega =$$
$$= 6 \cdot 10^{24} \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \cdot \frac{2\pi}{(365 \cdot 24 \cdot 3\,600)}$$
$$L = 2{,}675 \cdot 10^{40} \text{ kg m/s}^2$$

b) La velocidad areolar del movimiento de traslación es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{1}{2}(1{,}496 \cdot 10^{11})^2 \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3\,600} =$$
$$= 2{,}23 \cdot 10^{15} \text{ m}^2\text{/s}$$

c) A partir de la velocidad areolar podemos determinar el área que barre la Tierra en un día:

$$A_{\text{día}} = v_{\text{areolar}} \cdot 24 \cdot 3\,600 = 1{,}926 \cdot 10^{20} \text{ m}^2$$

Para desplazamientos pequeños comparados con la órbita completa, como es el recorrido de un día, se puede aproximar el área barrida al área del triángulo (figura 1.21):

$$A = \frac{Rd}{2} = 1{,}926 \cdot 10^{20} \text{ m}^2$$

De donde resulta que el desplazamiento *d* de un día es:

$$d = 2{,}575 \cdot 10^9 \text{ m} = 2{,}575 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Por otro lado, sabemos que la Tierra describe aproximadamente una circunferencia, luego la distancia recorrida en un día será la longitud de dicha circunferencia dividida por 365:

$$d = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}{365} = 2{,}575 \cdot 10^6 \text{ km}$$

13 **Demuestra que la constancia del momento angular orbital es coherente con la segunda ley de Kepler. Razona si dicha constancia es también coherente con la primera ley.**

Como sabemos, la velocidad areolar es equivalente a *L*/2*m*. Si el momento angular es constante, lo será la velocidad areolar. Esta constancia es la que establece la segunda ley de Kepler.

Por otro lado, si el momento angular es constante, la órbita debe quedar siempre forzosamente en el mismo plano, que es lo que afirma la primera ley de Kepler.

14 **Determina la posición del centro de masas del sistema constituido por tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, y $m_3 = 6$ kg, situadas, respectivamente, en los puntos (0, 3, 1), (4, 1, 2) y (5, 0, 0). Expresa su posición en notación vectorial.**

Hacemos uso de la expresión **1.12**:

$$m_{\text{total}}\vec{r}_{\text{CM}} = 2(0\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) + 4(4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + 6(5\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})$$
$$m_{\text{total}}\vec{r}_{\text{CM}} = 46\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$$
$$\vec{r}_{\text{CM}} = 3{,}83\vec{i} + 0{,}83\vec{j} + 0{,}83\vec{k}$$

15 **Una partícula de 4 kg se mueve en la dirección del eje *X* con una velocidad de 3 m/s, y otra de 2 kg lo hace en la misma dirección con una velocidad de −2 m/s. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas? ¿Y el momento lineal total del sistema?**

Aplicando la expresión **1.14**:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot (-2)}{4+2}\vec{i} = \frac{8}{6}\vec{i} = \frac{4}{3}\vec{i} \text{ m/s}$$

Y, por tanto:

$$\vec{p}_{\text{CM}} = 8\vec{i} \text{ kg m/s}$$

16 **Tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, y $m_3 = 1$ kg, se mueven según las trayectorias $\vec{r}_1 = t^2\vec{i} - 2t\vec{j}$ m, $\vec{r}_2 = 3t^3\vec{i} - t\vec{j} + t^2\vec{k}$ m y $\vec{r}_3 = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}$ m, respectivamente. Calcula:**

a) $\vec{r}_{\text{CM}}$ en función del tiempo y en $t = 1$ s.

b) El momento lineal del sistema en $t = 1$ s.

c) La fuerza neta que opera sobre el sistema.

d) La aceleración del centro de masas.

a) Aplicando la expresión **1.12**, se obtiene:

$$\vec{r}_{\text{CM}}(t) = \frac{(1{,}5t^3 + 2t^2 + 2t)\vec{i} - 2{,}5t\vec{j} + (0{,}5t^2 + t)\vec{k}}{3{,}5}$$

Por lo que:

$$\vec{r}_{\text{CM}}(1) = 1{,}57\vec{i} - 0{,}71\vec{j} + 0{,}43\vec{k} \text{ m}$$

b) Teniendo en cuenta que:

$$\vec{p}_{\text{CM}} = m_{\text{total}}\vec{v}_{\text{CM}} = m_{\text{total}}\frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt}$$

se obtiene:

$$\vec{p}_{\text{CM}} = (4{,}5t^2 + 4t + 2)\vec{i} - 2{,}5\vec{j} + (t + 1)\vec{k} \text{ kg m/s}$$

Y, por tanto, en $t = 1$ s:

$$\vec{p}_{CM}(1) = 10{,}5\vec{i} - 2{,}5\vec{j} + 2\vec{k} \text{ kg m/s}$$

c) Como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

entonces:

$$\vec{F} = (9t + 4)\vec{i} + \vec{k} \text{ N}$$

d) La aceleración del centro de masas será:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{m_{total}} = \frac{9t+4}{3{,}5}\vec{i} + \frac{1}{3{,}5}\vec{k} \text{ m/s}^2$$

17 **¿Crees que puede considerarse el momento de inercia una propiedad fundamental de la materia del mismo modo que la masa?**

El momento de inercia **no** es una propiedad de la materia. La masa es una propiedad inherente a todo cuerpo material, y su valor es característico de cada cuerpo o partícula; es decir, a cada cuerpo le corresponde una **única masa.** Por el contrario, un mismo cuerpo puede tener **infinitos momentos de inercia** en función del eje elegido.

18 **Con el propósito de calcular el momento de inercia de un cuerpo en rotación, ¿puede considerarse la masa del cuerpo como si estuviese concentrada en el centro de masas? ¿Por qué?**

No, porque en la determinación del momento de inercia es esencial la forma del cuerpo; si el eje de rotación pasara por el centro de masas, el momento de inercia sería cero. Eso ocurriría, por ejemplo, en el caso de una esfera homogénea (maciza o hueca) que girase alrededor de un eje que pasa por su centro; no puede suponerse que la masa de la esfera está concentrada en el centro de masas. Este concepto, sin embargo, sí es aplicable en la dinámica de traslación.

Existe, sin embargo, un equivalente al centro de masas en rotación, que sería aquel punto donde podemos suponer concentrada la masa del sólido, girando a una distancia tal del eje (distancia denominada **radio de giro**) que su momento de inercia con respecto a ese eje fuese igual al de todo el sólido. La localización de dicho punto es muy sencilla. Por ejemplo, si consideramos el caso de una esfera sólida homogénea de masa m que está rotando alrededor de un diámetro, la distancia (radio de giro) a la que estaría dicho punto especial se hallaría igualando el momento de inercia de la esfera con el que tendría toda su masa concentrada en dicho punto:

$$\frac{2}{5}mr^2 = mR^2$$

donde R es el radio de giro. Resolviendo, obtenemos:

$$R = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot r$$

19 **PAU** **Si dos discos del mismo peso y espesor se hacen de metales de diferentes densidades, ¿tendrán el mismo momento de inercia? Si no es así, demuestra cuál de ellos tiene mayor momento de inercia.**

Los dos discos tienen la misma masa y diferente densidad, por lo que tendrán también distinto volumen. Dado que el volumen viene dado por $\pi r^2 h$, donde r es el radio del disco, y h, su espesor, y puesto que tienen el mismo espesor, la diferencia de volumen se manifestará en distinto radio, que será mayor cuanto mayor sea el volumen, es decir, cuanto menor sea la densidad.

En el enunciado no se indica el eje de rotación alrededor del cual giran los discos. Supongamos que se trata de un eje que pasa por el centro y tiene la dirección perpendicular al disco. Según la expresión **1.17**, el momento de inercia es tanto mayor cuanto más alejadas del eje están las distintas partículas que forman el disco. Esta observación cualitativa es suficiente para concluir que el disco con mayor radio (menor densidad) tiene mayor momento de inercia. Se obtiene la misma conclusión si consideramos que el momento de inercia de un disco alrededor del eje indicado es $I = mr^2/2$, que será tanto mayor cuanto mayor sea el radio.

20 **¿Existe algún momento de fuerza responsable de la rotación de los planetas y satélites? ¿Qué consecuencias se extraen de tu respuesta?**

Sobre cualquier punto de un planeta o satélite actúa principalmente la fuerza gravitatoria del Sol o, en el caso de los satélites, la que ejerce el planeta más próximo, y podría pensarse que existe un momento de fuerza. Sin embargo, al ser los planetas esféricos y presentar una distribución simétrica de la masa, la resultante de la fuerza gravitatoria debe pasar por el centro de los planetas o satélites, con lo cual el momento de fuerza resultante es nulo. En consecuencia, el momento angular de rotación de los planetas permanece constante.

21 **Sobre la polea de la figura 1.39 (a) se ejerce directamente una fuerza de 30 N. Si el radio de la polea es de 10 cm, su masa es de 1,5 kg, y su momento de inercia viene dado por la expresión $I = 1/2\ mr^2$, ¿cuál será su velocidad angular al cabo de 10 s?**

La fuerza $\vec{F}$ produce un momento que da lugar a la rotación de la polea. Como la fuerza es tangencial, el momento de fuerza vale $M = Fr$, donde r es el radio de la polea. Aplicando la expresión **1.19**, podemos obtener la aceleración angular y, de ese modo, la velocidad angular en función del tiempo:

$$F_r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

donde m es la masa de la polea. Resolviendo:

$$\alpha = \frac{2F}{mr} = 400 \text{ rad/s}^2$$

Por lo que:

$$\omega(t = 10 \text{ s}) = \alpha t = 4\,000 \text{ rad/s}$$

22 **Fíjate en la figura 1.39 (b). ¿Se obtendría el mismo resultado si en lugar de ejercer directamente una fuerza de 30 N colgáramos un peso de 30 N?**

El caso es, ahora, cualitativamente muy distinto, pues la fuerza tangencial cuyo momento produce la rotación de la polea es la tensión de la cuerda. Por una parte, tenemos la ecuación de traslación de la pesa:

$$P - T = m'a$$

y por otra, la de rotación de la polea:

$$Tr = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

Puesto que $a = \alpha r$, sustituyendo en la primera ecuación y resolviendo el sistema resultante, se obtiene:

$$\alpha = \frac{P}{\left(\frac{1}{2}m + m'\right)r} = 78{,}7 \text{ rad/s}^2$$

Por lo que:

$$\omega = \alpha t = 787 \text{ rad/s}$$

Resultado muy diferente, por tanto, al del caso anterior.

23 **PAU** **Dos cuerpos esféricos en rotación alrededor del eje que pasa por sus respectivos centros tienen la misma masa pero distinta densidad. Si el momento angular de rotación de ambos es idéntico, ¿es entonces también idéntica su energía cinética de rotación?**

A igualdad de masas, si las densidades de ambas esferas son distintas, también lo serán los volúmenes y, en consecuencia, los radios. Por otro lado, la energía cinética de rotación es:

$$E_{c\ \text{rotación}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Ahora bien, $I = 2mR^2/5$, luego es diferente para ambas esferas. En consecuencia, la energía cinética de rotación también lo será.

24 Resuelve el orden de llegada a la base de un plano inclinado de altura *h* de los siguientes cuerpos: una esfera maciza, una esfera hueca, un cilindro macizo, un aro y un bloque rectangular de hielo.

Para los cuatro primeros objetos trabajaremos en el supuesto de ausencia de deslizamiento. En tal caso, la fuerza de rozamiento no realiza trabajo y la energía mecánica se mantiene constante en todo el proceso, es decir:

$$E_{p\ \text{inicial}} = E_{c\ \text{base}} = E_{c\ \text{base traslación}} + E_{c\ \text{base rotación}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{I}{mr^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{2gh}{1+\dfrac{I}{mr^2}}\right)$$

Para el bloque de hielo, supondremos que no existe rozamiento, luego:

$$E_{p\ \text{inicial}} = E_{c\ \text{base traslación}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

Por tanto, sin hacer ningún otro cálculo, vemos ya que el hielo es el cuerpo que llega antes, pues es el que alcanza la mayor velocidad. En cuanto a los cuatro cuerpos rodantes, vemos que cuanto mayor es su momento de inercia menor es su velocidad. En consecuencia, el orden de llegada será:

1. Bloque de hielo ($v^2 = 2gh$)
2. Esfera maciza ($v^2 = 10gh/7$)
3. Cilindro macizo ($v^2 = 4gh/3$)
4. Esfera hueca ($v^2 = 6gh/5$)
5. Aro ($v^2 = gh$)

25 Teniendo en cuenta los valores de los momentos de inercia ofrecidos en la figura 1.35, compara las velocidades al llegar a la base de un plano inclinado de altura *h* de una esfera maciza que se desliza y rueda.

a) Cuando la esfera se desliza, toda la energía potencial inicial se transforma en cinética traslacional, por lo que la velocidad del centro de masas en la base del plano será:

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) Cuando rueda, la energía potencial se transforma en traslacional del centro de masas y en rotacional de la esfera, de modo que:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2 \Rightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}r^2\omega^2$$

Teniendo en cuenta que $\omega = v/r$, y resolviendo v, se obtiene:

$$gh = \frac{7}{10}v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

velocidad que es menor que la anterior.

26 PAU Determina las aceleraciones de descenso de un cilindro macizo y de una esfera maciza, ambos de la misma masa y radio, que ruedan sin deslizarse por un plano inclinado de 30°.

***a)* Si la distancia que recorren en el plano es de 5 m, ¿con qué velocidad llega cada cuerpo a la base del plano?**

***b)* ¿Cuánto tarda cada uno en llegar a la base?**

a) Para cualquier cuerpo rodante que baje por un plano inclinado, la velocidad al llegar a la base viene dada por la expresión que vimos en la actividad 24:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\dfrac{I}{mr^2}}}$$

donde $h = d \operatorname{sen} \theta = 5 \operatorname{sen} 30° = 2{,}5$ m.

Así pues, para determinar la velocidad basta con sustituir el valor del momento de inercia y la altura recorrida. El momento de inercia del cilindro macizo es $mR^2/2$, mientras que el de la esfera maciza es $2mR^2/5$. Las velocidades de llegada de ambos cuerpos serán, por tanto:

$$v_{\text{cilindro}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 5{,}72 \text{ m/s} \qquad v_{\text{esfera}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 5{,}92 \text{ m/s}$$

b) Tanto el cilindro como la esfera tienen un movimiento uniformemente acelerado, por lo que:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

Sustituyendo los valores de la velocidad final, resulta que $a_{\text{cilindro}} = 3{,}26$ m/s^2 y $a_{\text{esfera}} = 3{,}5$ m/s^2.

Por otro lado, sabemos que:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{10}{a}}$$

Sustituyendo los valores de la aceleración, resulta que:

$$t_{\text{cilindro}} = 1{,}75 \text{ s};\ t_{\text{esfera}} = 1{,}69 \text{ s}$$

Cuestiones y problemas (páginas 60/61)

Guía de repaso

1 ¿Qué innovaciones introdujo Ptolomeo en la teoría geocéntrica? ¿Qué problemas parecían resolver?

Véase el apartado «Teoría geocéntrica de Ptolomeo» (en el subepígrafe 1.1).

2 ¿Qué tipo de velocidad parece mantenerse constante en el transcurso del movimiento planetario?

La velocidad areolar.

3 Define la magnitud que se usa para describir el movimiento de traslación de los planetas. ¿Cuáles son sus características?

El momento angular (véase el subepígrafe 3.1).

4 ¿Qué agente dinámico puede producir cambios en el momento angular de un cuerpo?

El momento de una fuerza (consúltese el subepígrafe 3.2).

5 ¿En qué condiciones se mantiene constante el momento angular? Pon ejemplos de movimientos en los que permanece constante el momento angular.

Véase el subepígrafe 3.2. Son ejemplos de este tipo de movimiento los del sistema solar, el de un tiovivo, los saltos de trampolín, etcétera.

6 ¿Cuáles son los correspondientes símiles en la dinámica rotacional para fuerza, masa y momento lineal?

El momento de fuerza, el momento de inercia y el momento angular respectivamente.

7 ¿Qué es el centro de masas de un cuerpo? ¿Qué tiene de particular dicho punto?

Véase el epígrafe 4.

8 **Completa el siguiente cuadro:**

Cualidad	Magnitud y expresión en movimientos lineales	Magnitud y expresión en movimientos de rotación
Posición del móvil	x	θ
Velocidad del móvil	$v = \dfrac{dx}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
Aceleración tangencial	$a_t = \dfrac{dv}{dt}$	$a_t = \alpha r$
Aceleración centrípeta	$a_c = \dfrac{v^2}{r}$	$a_c = \omega^2 r$
Resistencia a modificar el estado de movimiento	m	I
Medida de la cantidad de movimiento	$\vec{p}$	$\vec{L}$
Agente capaz de variar la cantidad de movimiento	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Energía asociada al movimiento	$\dfrac{1}{2}mv^2$	$\dfrac{1}{2}I\omega^2$

Leyes de Kepler

9 PAU **La Estación Espacial Internacional (ISS) orbita a una altura media de 340 km sobre la superficie terrestre. Teniendo en cuenta que la distancia Tierra-Luna es de 380 000 km y que el período lunar es de 2,36 · 10⁶ s, determina cuánto tarda la ISS en dar una vuelta completa a la Tierra.**

Dato: radio terrestre = 6 370 km

En el sistema gravitatorio formado por la Tierra y sus satélites se cumple la tercera ley de Kepler, es decir, los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los radios de las órbitas:

$$T^2 = kR^3$$

Por tanto:

$$\frac{T^2_{\text{Luna}}}{R^3_{\text{Luna}}} = \frac{T^2_{\text{ISS}}}{R^3_{\text{ISS}}} \Rightarrow T^2_{\text{ISS}} = \left(\frac{R_{\text{ISS}}}{R_{\text{Luna}}}\right)^3 T^2_{\text{Luna}}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$T^2_{\text{ISS}} = \left(\frac{6\,370 + 340}{380\,000}\right)^3 (2{,}36 \cdot 10^6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\text{ISS}} = 5\,537{,}38 \text{ s} = 92{,}3 \text{ min}$$

10 **Marte orbita a una distancia media de 1,517 UA alrededor del Sol. A partir de los datos orbitales terrestres, determina la duración del año marciano.**

Dato: 1 UA = distancia media Tierra-Sol

Sabemos que para el sistema gravitatorio formado por el Sol y sus satélites se debe cumplir la tercera ley de Kepler, es decir:

$$\frac{T^2_{\text{Marte}}}{R^3_{\text{Marte}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}} \Rightarrow T_{\text{Marte}} = \sqrt{\left(\frac{R_{\text{Marte}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3} T_{\text{Tierra}}$$

Sustituyendo los datos, resulta:

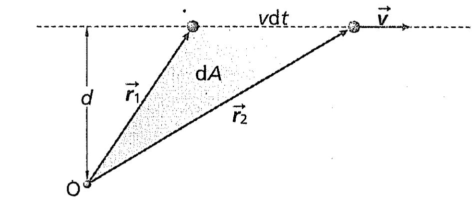
$$T_{\text{Marte}} = \sqrt{(1{,}517)^3} T_{\text{Tierra}} = 1{,}868 T_{\text{Tierra}} = 682 \text{ días}$$

Momento angular y su conservación en traslación

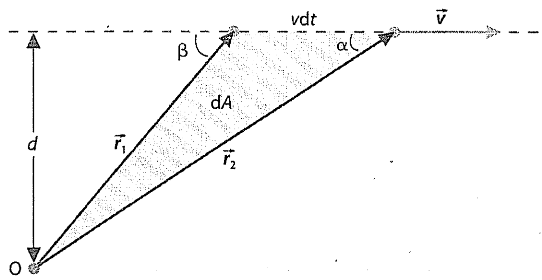
11 **Una partícula se mueve a lo largo de una recta. Si la única información de que disponemos es que el momento de fuerza que actúa sobre ella es cero, respecto de un origen no especificado, ¿podemos concluir que la partícula se mueve con velocidad constante?**

No puede concluirse que la velocidad de la partícula sea necesariamente constante. Si el origen se encuentra en la recta del movimiento y la fuerza que actúa sobre la partícula tiene también esa dirección, entonces el momento de fuerza es nulo, pero la partícula no se moverá con velocidad constante.

12 PAU **Una partícula se mueve con velocidad constante v a lo largo de una recta cuya distancia a un origen O es d. Si en un tiempo dt el vector de posición barre un área dA, demuestra que la velocidad areolar es constante en el tiempo e igual a $L/2m$, expresión en la que L es el momento angular de la partícula con respecto al origen citado.**



Como puede observarse en la figura, el área dA señalada es la diferencia entre el área del triángulo en el que $\vec{r}_2$ es la hipotenusa y la de aquel en que $\vec{r}_1$ es la hipotenusa.



Así pues:

$$dA = \frac{1}{2} r_2 \cos\alpha \cdot d - \frac{1}{2} r_1 \cos\beta \cdot d =$$

$$= \frac{1}{2} d\,(r_2 \cos\alpha - r_1 \cos\beta) = \frac{1}{2} dvdt$$

Con lo que:

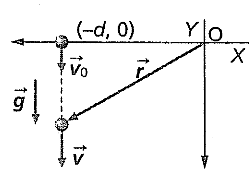
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{m}$$

13 PAU **A una partícula de masa m se le imprime una velocidad $-v_0 j$ en el punto $(-d, 0)$ y empieza a acelerarse en presencia de la gravedad terrestre.**

a) **Determina una expresión para el momento angular como función del tiempo, con respecto al origen.**

b) **Calcula el momento de fuerza que actúa sobre la partícula, en cualquier instante, con relación al origen.**

c) **Con los resultados obtenidos en *a)* y *b)*, comprueba que $M = dL/dt$.**



a) El momento angular viene dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, donde:

$$\vec{r} = -d\vec{i} + y\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = -mv\vec{j} \text{ kg m/s}$$

Así pues:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & y & 0 \\ 0 & -mv & 0 \end{vmatrix} = mvd\vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

donde $v = v_0 + gt$, por lo que:

$$\vec{L} = m(v_0 + gt)\, d\,\vec{k} = (mv_0 d + mgdt)\,\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Es decir:

$$\vec{L} = (L_0 + mgdt)\,\vec{k} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

b) El momento de fuerza es:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -d & y & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = mgd\,\vec{k} \text{ N m}$$

c) Puede verse que:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(L_0 + mgdt)\,\vec{k}}{dt} = mgd\,\vec{k} \text{ N m}$$

D 14 **PAU** **Una pequeña esfera de 300 g de masa atada a una cuerda de masa despreciable de 1 m de longitud gira con una velocidad de 2 m/s alrededor de un punto O de un eje en el plano horizontal. En cierto momento, la cuerda empieza a arrollarse alrededor de dicho punto, de modo que su longitud libre va decreciendo. Determina:**

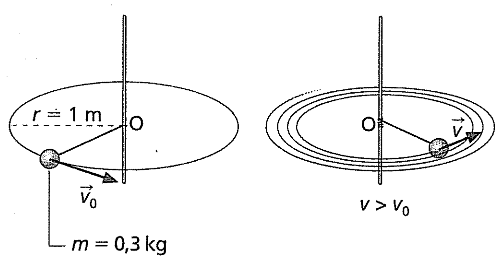
a) **El momento angular inicial alrededor del punto O.**

b) **El valor de la velocidad lineal de la pelota cuando se ha arrollado 0,75 m de cuerda.**

c) **Analiza la validez de la suposición que has hecho para resolver el apartado anterior.**

d) **Teniendo en cuenta que la variación en módulo de la velocidad lineal exige la existencia de una fuerza tangencial, realiza un diagrama de la situación y discute acerca de cómo aparece dicha fuerza tangencial y a qué se debe.**

La situación descrita en el enunciado se muestra en el siguiente dibujo:



a) Como se ve, el vector de posición es perpendicular en todo momento a la velocidad de la esfera, luego el momento angular inicial es:

$$L_0 = rmv = 1 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

b) El momento angular se mantiene constante, pues la fuerza centrípeta que actúa sobre la esfera es de tipo central, con lo que el momento de la fuerza es nulo. Por tanto:

$$L = \text{constante} = 0{,}6 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Y, en consecuencia:

$$L_2 = r_2 m v_2 = 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot v_2 = 0{,}6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_2 = 8 \text{ m/s}$$

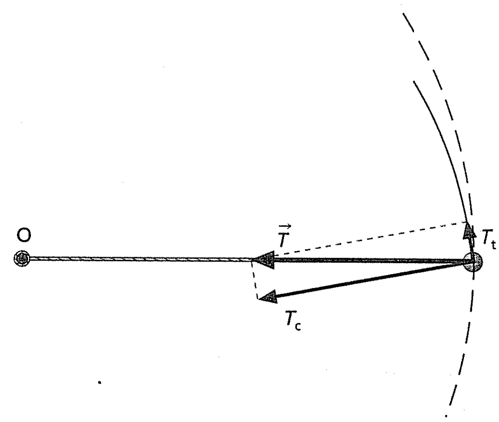
c) Hemos supuesto que no hay más fuerza que la centrípeta que ejerce la cuerda, pero también está el peso, que produce cierto momento de fuerza que imprime un movimiento de caída a la esfera. La aproximación puede valer si la velocidad de la esfera es suficientemente grande, de modo que la esfera se mantiene aproximadamente en posición horizontal en todo el proceso. También hemos supuesto despreciable la fricción de la esfera con el aire.

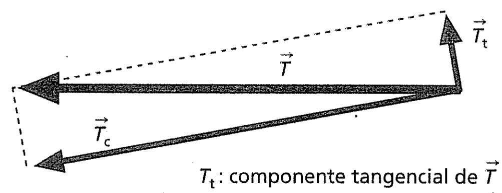
d) La tensión que ejerce la cuerda sobre la esfera es la responsable de su movimiento. Esta tensión viene dada por la siguiente expresión:

$$T = m\frac{v_2}{r} = m\left(\frac{L}{mr}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{\text{constante}}{mr^3}$$

Es decir, la tensión aumenta proporcionalmente al cubo del radio a medida que este disminuye. En consecuencia, la velocidad será inversamente proporcional al radio. Ahora bien, la trayectoria que sigue la esfera no es un círculo perfecto sino una espiral.

En consecuencia, la tensión presentará una pequeña componente en dirección tangencial a la trayectoria, tal como se observa en el dibujo:





$\vec{T}_t$: componente tangencial de $\vec{T}$

$\vec{T}_c$: componente centrípeta de $\vec{T}$

Esa componente en la dirección tangencial es la responsable de la aceleración tangencial que experimenta la esfera.

Posición y movimiento del centro de masas

15 **Tres partículas de masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 2$ kg, se mueven según trayectorias determinadas por:**

$$\vec{r}_1 = (3t^2 + 1)\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 4\vec{k} \text{ m}$$

$$\vec{r}_2 = (2t^2 - t)\,\vec{i} - 5t^2\,\vec{j} \text{ m}$$

$$\vec{r}_3 = 4t^3\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j} + 2t^2\,\vec{k} \text{ m}$$

a) **Establece la posición del centro de masas del sistema en función del tiempo y en el instante en que $t = 1$ s.**

b) **Halla el momento lineal del sistema en función del tiempo y cuando $t = 1$ s.**

c) **¿Qué fuerza neta opera sobre el sistema?**

d) **¿Cuál ha sido el desplazamiento del centro de masas entre $t = 0$ y $t = 1$ s?**

e) **¿Cuál es el momento angular de la partícula 1 respecto del origen cuando $t = 1$ s?**

a) Aplicando la expresión **1.12:**

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Sustituyendo los datos, obtenemos:

$$\vec{r}_{CM}(t) = (0{,}8t^3 + 2{,}1t^2 - 0{,}3t + 0{,}5)\,\vec{i} +$$
$$+ (t^3 - 1{,}1t^2)\,\vec{j} + (0{,}4t^2 + 2)\,\vec{k} \text{ m}$$

que en el instante en que $t = 1$ s, vale:

$$\vec{r}_{CM}(1) = 3{,}1\vec{i} - 0{,}1\vec{j} + 2{,}4\vec{k} \text{ m}$$

b) El momento lineal del sistema será:

$$\vec{p}_{CM}(t) = m_{total}\vec{v}_{CM} = m_{total}\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$$

Por tanto:

$$\vec{p}_{CM}(t) = 10\ \text{kg} \cdot [(2{,}4t^2 + 4{,}2t - 0{,}3)\,\vec{i} + (3t^2 - 2{,}2t)\,\vec{j} + 0{,}8t\,\vec{k}\ \text{m/s}] = (24t^2 + 42t - 3)\,\vec{i} + (30t^2 - 22t)\,\vec{j} + 8t\,\vec{k}\ \text{kg m/s}$$

Y en $t = 1$ s:

$$\vec{p}_{CM}(1) = 63\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}\ \text{kg m/s}$$

c) La fuerza neta que opera sobre el sistema será:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

$$\vec{F} = (48t + 42)\,\vec{i} + (60t - 22)\,\vec{j} + 8\vec{k}\ \text{N}$$

d) El desplazamiento del centro de masas entre 0 y 1 s es:

$$\Delta\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}(1) - \vec{r}_{CM}(0)$$

Como $\vec{r}\,(1)$, mientras que $\vec{r}\,(0) = 0{,}5\vec{i} + 2\vec{k}$:

$$\Delta\vec{r} = 2{,}6\vec{i} - 0{,}1\vec{j} + 0{,}4\vec{k}\ \text{m}$$

Es decir:

$$|\Delta\vec{r}_{CM}| = 2{,}63\ \text{m}$$

e) Para hallar el momento angular de la partícula 1 con respecto al origen cuando $t = 1$ s, hay que calcular previamente los vectores posición y velocidad de dicha partícula en ese tiempo:

$$\vec{r}_1(1) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}\ \text{m} \quad \text{y} \quad \vec{v}_1(1) = 6\vec{i} + 6\vec{j}\ \text{m/s}$$

Por lo que:

$$\vec{L}\,(1) = \vec{r} \times m_1\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 4 \\ 30 & 30 & 0 \end{vmatrix} = -120\vec{i} + 120\vec{j} + 60\vec{k}\ \text{kg m}^2\text{/s}$$

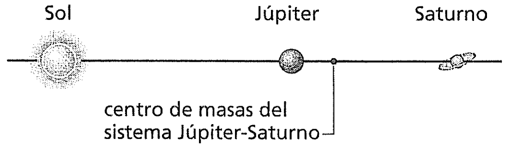
16 En una buena aproximación, podemos suponer que Júpiter y Saturno concentran la mayor parte de la masa planetaria del sistema solar. Suponiéndolos alineados en conjunción con respecto al Sol y haciendo uso de la tabla de datos del sistema solar en las páginas finales del libro, determina:

***a)* La posición del centro de masas correspondiente a ambos planetas.**

***b)* La posición del centro de masas (con respecto al centro solar) del sistema Sol-Júpiter-Saturno, suponiendo que estos últimos están en conjunción con respecto al Sol.**

***c)* A la luz del anterior apartado, ¿podría inferir un hipotético astrónomo de un exoplaneta la presencia de planetas alrededor del Sol? ¿Sería capaz de distinguir de algún modo si se trata de uno o de dos planetas?**

En el siguiente dibujo se muestra la situación descrita en el enunciado. El sentido común nos dice que el centro de masas del sistema Júpiter-Saturno se encuentra entre ambos planetas, y que debe estar más próximo a Júpiter que a Saturno:



a) La posición del centro de masas del sistema Júpiter-Saturno respecto al origen, que es el centro del Sol, será:

$$r_{CM} = \frac{m_{\text{Júpiter}} \cdot 7{,}78 \cdot 10^{11} + m_{\text{Saturno}} \cdot 1{,}43 \cdot 10^{12}}{m_{\text{Júpiter}} + m_{\text{Saturno}}} =$$

$$= \frac{1{,}9 \cdot 10^{27} \cdot 7{,}78 + 5{,}68 \cdot 10^{26} \cdot 14{,}3}{1{,}9 \cdot 10^{27} + 5{,}68 \cdot 10^{26}} \cdot 10^{11} =$$

$$r_{CM} = \frac{1{,}9 \cdot 7{,}78 + 5{,}68 \cdot 14{,}3}{1{,}9 + 5{,}68 \cdot 10^{11}} = 9{,}27 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

b) Si incluimos el Sol en el sistema anterior, el centro de masa del sistema será:

$$r_{CM} = \frac{m_{\text{Sol}} \cdot 0 + m_{\text{Júpiter + Saturno}} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{11}}{m_{\text{Sol}} + m_{\text{Júpiter + Saturno}}} =$$

$$= \frac{24{,}68 \cdot 10^{26} \cdot 9{,}28 \cdot 10^{11} \cdot 14{,}3}{1{,}98 \cdot 10^{30} + 24{,}68 \cdot 10^{26}} = 1{,}155 \cdot 10^{9}\ \text{m} \cong 1{,}66\ R_{\text{Sol}}$$

c) Sí, pues el Sol orbita alrededor de un centro de masas que no coincide con su centro, y el hipotético astrónomo extraterrestre podría deducir, si dispusiera de una tecnología suficientemente desarrollada, la presencia de planetas orbitando en torno suyo. Asimismo, del tipo de movimiento del Sol (o de cualquier otra estrella) puede inferirse si es uno o si son varios los planetas que orbitan a su alrededor. De este modo se ha postulado la presencia de planetas orbitando alrededor de algunas estrellas cercanas al Sistema Solar, si bien se trata de medidas que requieren una altísima precisión y los resultados no han sido concluyentes hasta la fecha.

17 PAU Eligiendo como origen de referencia el centro de la Tierra, y teniendo en cuenta que la masa de la Luna es 0,012 veces la masa de la Tierra, determina a qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el centro de masas del sistema Tierra-Luna. Compárala con el radio de la Tierra y saca las conclusiones oportunas.

Datos: $d_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,000$ km; $r_T = 6\,370$ km

Aplicando la expresión general:

$$x_{CM} = \frac{m_T x_T + m_L x_L}{m_T + m_L} =$$

$$= \frac{m_T \cdot 0 + 0{,}012 \cdot m_T \cdot 384\,000}{1{,}012 \cdot m_T} = 4\,553{,}3\ \text{km}$$

Aquí hemos supuesto que $x_T = 0$, al considerar que el origen se encuentra en el centro de la Tierra. Así pues, el centro de masas del sistema Tierra-Luna está en el interior de la Tierra, a 4 553,3 km de su centro.

Si bien ambos astros se mueven en torno al centro de masas, la Tierra queda prácticamente inmóvil, y es la Luna la que gira en torno suyo.

Rotación del sólido rígido y conservación del momento angular

18 ¿Qué sentido tiene el acto instintivo de extender los brazos en cruz cuando tratamos de conservar el equilibrio? ¿Por qué los funambulistas hacen equilibrios en la cuerda ayudados de un palo largo?

En esencia, se trata de aumentar nuestro momento de inercia para disminuir la posibilidad de «rotación» (con la consiguiente caída) alrededor de la línea de equilibrio.

Las pequeñas variaciones imprimidas en el momento de inercia con la barra permiten al funambulista compensar los desequilibrios puntuales y, con ello, evitar la caída.

19 ¿Por qué cuando caminamos no lo hacemos a «piñón fijo»; es decir, por qué no adelantamos simultáneamente el brazo y la pierna del mismo lado?

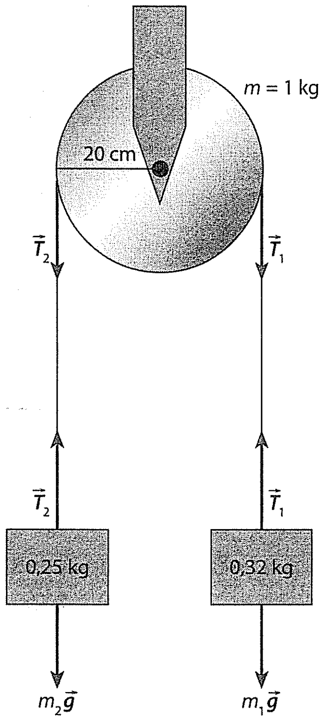
Si camináramos a «piñón fijo», el brazo y la pierna adelantados del mismo lado crearían un par de fuerzas con el brazo y la pierna que se quedan atrás, lo que produciría una pequeña rotación alrededor del eje vertical que pasa por nuestro centro, dando lugar a ese extraño andar de «robot».

20 Una persona se encuentra en pie sobre una plataforma que gira alrededor de un eje vertical. En un momento dado, se siente mareada y trata de desplazarse hacia el eje con la intención de asirse a él. ¿Crees que ha tomado la decisión más acertada? ¿Por qué?

Ha tomado la peor decisión. Al dirigirse hacia el eje, el momento de inercia del conjunto (plataforma + persona) disminuye, por lo que la velocidad angular de rotación aumenta y, con ella, el mareo de nuestro personaje.

21 La polea de una máquina de Atwood tiene una masa de 1 kg y un radio de 20 cm. A ambos lados de la polea cuelgan dos pesas de 250 g y 320 g, respectivamente. Determina la aceleración que adquieren las masas, así como los valores de la tensión a ambos lados de la polea. ¿Qué porcentaje de error cometemos al no tener en cuenta el movimiento de la polea? (Considera la polea como un pequeño cilindro homogéneo.)

La figura muestra las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo:



Hay dos ecuaciones de traslación de m_1 y m_2, y una de rotación de la polea:

$$m_1g - T_1 = m_1a \Rightarrow T_1 = m_1 (g - a)$$
$$T_2 - m_2g = m_2a \Rightarrow T_2 = m_2 (g + a)$$
$$(T_1 - T_2)\, r = I\alpha \Rightarrow (T_1 - T_2)\, r = \frac{1}{2} mr^2 \frac{a}{r}$$
$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} ma$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para T_1 y T_2, resulta:

$$m_1 (g - a) - m_2 (g + a) = \frac{1}{2} ma$$
$$(m_1 - m_2)\, g = \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m\right) \cdot a$$
$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2 + 1/2\, m} = 0{,}64 \text{ m/s}^2$$
$$T_1 = 2{,}93 \text{ N};\ T_2 = 2{,}61 \text{ N}$$

Operando en la máquina de Atwood, obtendríamos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)\, g}{m_1 + m_2} = 1{,}203\,5 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, se comete un error del 88 %.

22 PAU El radio solar es de unos $6{,}96 \cdot 10^8$ m, y su período de rotación es de 25,3 días. ¿Cuál sería su período de rotación si se colapsara formando una enana blanca de 4 000 km de radio, sin variación apreciable de masa?

En ese hipotético proceso se conservaría el momento angular, por lo que:

$$I\omega = I'\omega' \Rightarrow \frac{2}{5} mr^2\omega = \frac{2}{5} m(r')^2\omega'$$

Como $\omega = 2\pi/T$, llegamos a:

$$r^2 \frac{2\pi}{T} = (r')^2 \frac{2\pi}{T'} \Rightarrow \frac{r^2}{T} = \frac{(r')^2}{T'}$$

De donde:

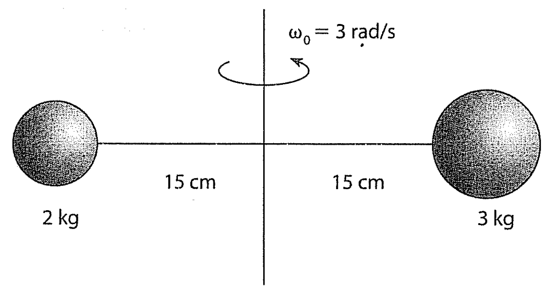
$$T' = \left(\frac{r'}{r}\right) = 0{,}000\,835 \text{ días} = 1 \text{ min } 12 \text{ s}$$

D23 PAU Dos masas de 2 kg y 3 kg, respectivamente, se encuentran en los extremos de una varilla rígida horizontal de 30 cm de longitud y de masa despreciable. El sistema comienza a girar alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la varilla a razón de 3 rad/s. ¿Cuánto vale el momento angular del sistema? Si en un momento dado las dos partículas empiezan a desplazarse una hacia la otra con velocidades respectivas de 0,8 cm/s y 0,5 cm/s:

a) Determina una expresión para el momento de inercia del sistema en función del tiempo.

b) Halla la velocidad angular del sistema al cabo de 10 s.

c) Si para que las partículas comiencen a moverse, ha sido necesario impulsarlas en la dirección radial, ¿es lícito pensar que el momento angular no sufre variaciones?



El momento de inercia inicial es:

$$I_0 = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$

Y sustituyendo los datos:

$$I_0 = 2 \text{ kg} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 + 3 \text{ kg} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 = 0{,}112\,5 \text{ kg m}^2$$

Por lo que el valor de su momento angular será:

$$L_{\text{inicial}} = I_0\omega_0 = 0{,}337\,5 \text{ kg m}^2\text{/s}$$

a) El momento de inercia en función del tiempo es:

$$I(t) = m_1 (d_1 - v_1t)^2 + m_2 (d_1 - v_2t)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I(t) = 2 \cdot (0{,}15 - 0{,}008t)^2 + 3 \cdot (0{,}15 - 0{,}005t)^2 =$$
$$= 2{,}03 \cdot 10^{-4}t^2 - 9{,}3 \cdot 10^{-3}t + 0{,}112\,5 \text{ kg m}^2$$

b) El momento de inercia a los 10 s valdrá:

$$I\,(10) = 0{,}039\,8 \text{ kg m}^2$$

Y como el momento angular se conserva:

$$I_0\omega_0 = I'\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{I_0\omega_0}{I'} = 8{,}48 \text{ rad/s}$$

c) Sí, pues al ser las fuerzas radiales, resulta que $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$, lo que implica que el momento angular es constante.

D24 PAU Una partícula de 10 g de masa que se mueve con una rapidez v_0 = 15 m/s choca tangencialmente contra la periferia de una esfera sólida de 1 kg de masa y 20 cm de radio que estaba en reposo. Si la partícula queda adherida a la esfera y esta puede comenzar a girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por su centro, determina:

a) La velocidad angular con la que girará el sistema.

b) La energía se disipa en la colisión.

a) El momento angular inicial del sistema es el de la partícula con respecto al centro de la esfera:

$$L_0 = mv_0r = 0{,}01\ \text{kg} \cdot 15\ \text{m/s} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 0{,}03\ \text{kg m}^2\text{/s}$$

Después de la colisión, el momento angular es:

$$L' = I'\omega' = \left(\frac{2}{5}mr^2 + m'r^2\right)\omega' = \left(\frac{2}{5}m + m'\right)r^2\omega'$$

En ausencia de fuerzas externas momento angular se conserva es decir, $L_0 = L'$ por tanto:

$$L' = I'\omega' = 0{,}3 \Rightarrow \omega' = \frac{0{,}03\ \text{kg m}^2\text{/s}}{\left(\frac{2}{5}m + m'\right)r^2} = 1{,}83\ \text{rad/s}$$

b) La energía disipada en la colisión viene dada por:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I'(\omega')^2 = 1{,}125\ \text{J} - 0{,}027\ \text{J} = 1{,}098\ \text{J}$$

por lo que se disipa el 97,6 %.

El problema de los cuerpos rodantes

25 PAU **Una esfera maciza rueda por dos planos inclinados que tienen la misma altura, pero diferente inclinación. ¿Llegará la esfera al final con la misma velocidad en ambos casos? ¿Tardará lo mismo en llegar al final?**

La velocidad al final de ambos planos es la misma si la altura de partida era idéntica, pues la ecuación general referida a la energía mecánica es la misma: $E_{c\ \text{final}} = E_{p\ \text{inicial}}$.

Sin embargo, no tardan lo mismo en llegar en un caso y en otro. La razón es la diferente aceleración lineal del centro de masas en cada caso. La fuerza de fricción, F_r, produce el momento de fuerza necesario que incrementa la velocidad angular a medida que la esfera desciende. Entonces, podemos aplicar a la esfera que rueda sin deslizarse dos ecuaciones:

- Ecuación de rotación:

$$F_r r = I\alpha \ \Rightarrow\ F_r r = \frac{2}{5}mr^2\left(\frac{a_{CM}}{r}\right) \Rightarrow F_r = \frac{2}{5}ma_{CM}$$

- Ecuación de traslación:

$$mg \operatorname{sen}\theta - F_r = ma_{CM}$$

donde a_{CM} es la aceleración del centro de masas.

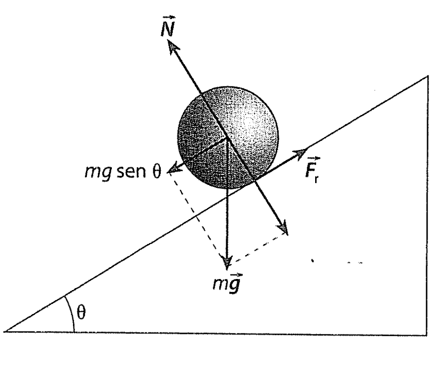
Resolviendo el sistema, observamos que la aceleración del centro de masas es:

$$a_{CM} = \frac{5}{7}g \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto, puede concluirse que, cuanto menor sea el ángulo, la aceleración es menor y, por tanto, será menor el tiempo que emplea la esfera en llegar a la base del plano.

26 PAU **Una esfera sólida de masa *m* y radio *r* rueda sin deslizarse por un plano inclinado de ángulo θ. Demuestra que el mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático necesario para garantizar la rodadura sin deslizamiento vale μ = 2/7 tg θ.**

Consideremos un cuerpo que baja rodando por un plano inclinado, tal como se observa en el dibujo:



Podemos plantear una ecuación para el movimiento de traslación y otra para el movimiento de rotación, suponiendo que el cuerpo no se desliza:

$$mg \operatorname{sen}\theta - F_{roz} = ma$$

$$F_{roz} \cdot R = I\alpha = \frac{Ia}{R} \Rightarrow F_{roz} = \frac{Ia}{R^2}$$

Combinando ambas ecuaciones, resulta:

$$mg \operatorname{sen}\theta - \frac{Ia}{R^2} = ma$$

$$g \operatorname{sen}\theta = \left(\frac{I}{mR^2} + 1\right)a \Rightarrow a = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Pero, por otro lado, sabemos que la fuerza de rozamiento viene dada por la expresión:

$$F_{roz} = \mu mg \cos\theta$$

Si introducimos este valor en la ecuación de rotación, resulta:

$$mg \operatorname{sen}\theta - \mu mg\cos\theta = ma \Rightarrow a = g(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para la aceleración, resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta$$

Ahora podemos introducir el valor del momento de inercia, que para la esfera es $2mR^2/5$:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{7}{5}} = \operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7}\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta$$

$$-\frac{2}{7}\operatorname{sen}\theta = -\mu\cos\theta \Rightarrow \mu = \frac{2}{7}\operatorname{tg}\theta$$

27 **¿Podrían diferenciarse dos esferas idénticas, de la misma masa y radio, que fueran una hueca y otra maciza? ¿Cómo?**

Los momentos de inercia de una esfera maciza y una hueca son, respectivamente:

$$I_{maciza} = \frac{2}{5}mR^2 \qquad I_{hueca} = \frac{2}{3}mR^2$$

Las esferas podrían distinguirse dejándolas rodar por un plano inclinado. Como se ha visto en la actividad 22, la aceleración de caída para un cuerpo que rueda por un plano inclinado viene dada por la expresión:

$$a = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Al tener un momento de inercia menor, la esfera maciza caerá con mayor aceleración y llegará antes a la base del plano.

28 **Dos esferas de la misma masa pero de distinta densidad se dejan caer rodando por un plano inclinado. ¿Llegan a la vez a la base del plano?**

Como hemos visto en actividades anteriores, la aceleración de caída de la esfera viene dada por la expresión:

$$a = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Ahora bien, si se trata de dos esferas de la misma masa pero distinta densidad, la expresión I/mR^2 es idéntica para ambas, e igual a 2/5. En consecuencia, podemos asegurar que las dos esferas llegarán a la vez.