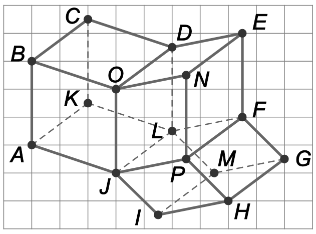
10 Vectores

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Indica dos vectores equipolentes para cada uno de los siguientes $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MH}$ y $\overrightarrow{AC}$:

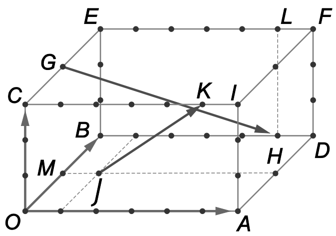


Vectores equipolentes de $\overrightarrow{CB}$: $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{LJ}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{FP}$, $\overrightarrow{MI}$ y $\overrightarrow{GH}$.

Vectores equipolentes de $\overrightarrow{MH}$: $\overrightarrow{LP}$ y $\overrightarrow{DN}$.

Vectores equipolentes de $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{JD}$ y $\overrightarrow{PE}$.

3. Expresa $\overrightarrow{GH}$ y $\overrightarrow{JK}$ en función de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.



$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{LH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{5}{6}\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CK}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

4 y 5. Ejercicios resueltos.

6. Escribe, si es posible, el vector $\vec{u} = (-5,-1,-22)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (0,1,-3)$ y $\vec{w} = (1,1,2)$.

Se debe intentar calcular λ y μ tales que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

$$(-5,-1,-22) = \lambda(0,1,-3) + \mu(1,1,2)$$

Si el sistema $\begin{cases} -5 = \mu \\ -1 = \lambda + \mu \\ -22 = -3\lambda + 2\mu \end{cases}$ es compatible, se podrá escribir $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

En este caso se obtiene la solución $\lambda = 4, \mu = -5$ y, por tanto, $\vec{u} = 4\vec{v} - 5\vec{w}$.

7. Comprueba, en cada caso, si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman o no una base de V^3:

a) $\vec{u} = (-3,4,2)$, $\vec{v} = (2,1,-3)$, s $\vec{w} = (0,-3,0)$

b) $\vec{u} = (1,3,-2)$, $\vec{v} = (2,-2,2)$, $\vec{w} = (-5,17,-14)$

c) $\vec{u} = (4,8,-8)$, $\vec{v} = (3,0,-10)$, $\vec{w} = (-3,0,3)$

a) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 27 = 15 \neq 0 \Rightarrow$ Sí forman base.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 17 & -14 \end{vmatrix} = 28 - 68 - 30 + 20 - 34 + 84 = 0 \Rightarrow$ No forman base.

c) $\begin{vmatrix} 4 & 8 & -8 \\ 3 & 0 & -10 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 240 + 72 = 312 \neq 0 \Rightarrow$ Sí forman base.

8. Calcula las coordenadas del vector $\vec{a} = (-7,-13,8)$ en la base $\{\vec{u} = (2,-4,4), \vec{v} = (0,0,-2), \vec{w} = (-9,-9,6)\}$.

Se debe comprobar que, efectivamente, $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base de V^3:

$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -9 & -9 & 6 \end{vmatrix} = -72 - 36 = -108 \neq 0 \Rightarrow$ Sí forman base.

$(-7,-13,8) = \lambda_1(2,-4,4) + \lambda_2(0,0,-2) + \lambda_3(-9,-9,6) \Rightarrow$

$\begin{cases} 2\lambda_1 - 9\lambda_3 = -7 \\ -4\lambda_1 - 9\lambda_3 = -13 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow$ Resolviendo el sistema se obtiene su única solución $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

Por tanto: $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Las coordenadas de $\vec{a}$ en esta base son $(1,1,1)$.

9. Calcula las coordenadas de los vectores de la base canónica en la base $\{\vec{u}=(2,-4,4),\vec{v}=(0,0,-2),\vec{w}=(-9,-9,6)\}$.

$\vec{i}=(1,0,0)$ $\qquad\vec{j}=(0,1,0)$ $\qquad\vec{k}=(0,0,1)$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman base porque $\begin{vmatrix}2 & -4 & 4\\ 0 & 0 & -2\\ -9 & -9 & 6\end{vmatrix}=-72-36=-108\neq 0$.

$$(1,0,0)=\lambda_1(2,-4,4)+\lambda_2(0,0,-2)+\lambda_3(-9,-9,6)\Rightarrow\begin{cases}1=2\lambda_1-9\lambda_3\\ 0=-4\lambda_1-9\lambda_3\\ 0=4\lambda_1-2\lambda_2+6\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=\frac{1}{6},\lambda_2=\frac{1}{9},\lambda_3=-\frac{2}{27}$$

Por tanto, $(1,0,0)=\frac{1}{6}\vec{u}+\frac{1}{9}\vec{v}-\frac{2}{27}\vec{w}$.

$$(0,1,0)=\lambda_1(2,-4,4)+\lambda_2(0,0,-2)+\lambda_3(-9,-9,6)\Rightarrow\begin{cases}0=2\lambda_1-9\lambda_3\\ 1=-4\lambda_1-9\lambda_3\\ 0=4\lambda_1-2\lambda_2+6\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=-\frac{1}{6},\lambda_2=-\frac{4}{9},\lambda_3=-\frac{1}{27}$$

Por tanto, $(0,1,0)=-\frac{1}{6}\vec{u}-\frac{4}{9}\vec{v}-\frac{1}{27}\vec{w}$.

$$(0,0,1)=\lambda_1(2,-4,4)+\lambda_2(0,0,-2)+\lambda_3(-9,-9,6)\Rightarrow\begin{cases}0=2\lambda_1-9\lambda_3\\ 0=-4\lambda_1-9\lambda_3\\ 1=4\lambda_1-2\lambda_2+6\lambda_3\end{cases}\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=-\frac{1}{2},\lambda_3=0$$

Por tanto, $(0,0,1)=-\frac{1}{2}\vec{v}$.

10. Calcula el valor o valores de *a*, si es que existen, para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

$\vec{u}=(2,a,3)$ $\qquad\vec{v}=(1,2,a)$ $\qquad\vec{w}=(5,-2,4)$

Para que sean linealmente dependientes, el determinante formado con sus coordenadas debe ser nulo.

$$\begin{vmatrix}2 & a & 3\\ 1 & 2 & a\\ 5 & -2 & 4\end{vmatrix}=16-6+5a^2-30+4a-4a=0\Rightarrow 5a^2-20=0\Rightarrow a=2,a=-2$$

Luego los valores de *a* son 2 y –2.

11 a 13. Ejercicios resueltos.

14. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-2,4)$ y $\vec{v}=(-1,-2,3)$ calcula:

a) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(2\vec{u}-3\vec{v})$

b) $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})+(3\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})$

c) $(\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+3\vec{v})-(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(3\vec{u}+2\vec{v})$

a) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(2\vec{u}-3\vec{v})=\left[(4,-4,8)+(-3,-6,9)\right]\cdot\left[(4,-4,8)-(-3,-6,9)\right]=(1,-10,17)\cdot(7,2,-1)=-30$

b) $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})+(3\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})=$

$=\left[(2,-2,4)+(-2,-4,6)\right]\cdot\left[(2,-2,4)-(-3,-6,9)\right]+\left[(6,-6,12)+(-1,-2,3)\right]\cdot\left[(6,-6,12)-(-2,-4,6)\right]=$

$=(0,-6,10)\cdot(5,4,-5)+(5,-8,15)\cdot(8,-2,6)=-74+146=72$

c) $(\vec{u}-2\vec{v})\cdot(\vec{u}+3\vec{v})+(3\vec{u}-\vec{v})\cdot(3\vec{u}+2\vec{v})=$

$=\left[(2,-2,4)-(-2,-4,6)\right]\cdot\left[(2,-2,4)+(-3,-6,9)\right]-\left[(6,-6,12)-(-1,-2,3)\right]\cdot\left[(6,-6,12)+(-2,-4,6)\right]=$

$=(4,2,-2)\cdot(-1,-8,13)-(7,-4,9)\cdot(4,-10,18)=-46-230=-276$

15. a) Comprueba si los vectores $\vec{u}=(1,-2,3)$ y $\vec{v}=(-4,1,2)$ son o no perpendiculares.

b) Calcula un vector perpendicular a $\vec{u}=(2,-2,-2)$ cuya primera coordenada sea 0.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,-2,3)\cdot(-4,1,2)=-4-2+6=0\Rightarrow$ Sí son perpendiculares.

b) $(0,1,-1)$.

16. Calcula, en cada caso, el valor de la incógnita para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

a) $\vec{u}=(2x,-1,5)$ $\quad\vec{v}=(x,x+1,-1)$

b) $\vec{u}=(2x+1,-3,x-1)$ $\quad\vec{v}=(1,x,x)$

c) $\vec{u}=(2x,-x,x+2)$ $\quad\vec{v}=(x+3,1,-4x)$

d) $\vec{u}=(3x,-1,4x+2)$ $\quad\vec{v}=(x-3,3,-3x)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(2x,-1,5)\cdot(x,x+1,-1)=2x^2-x-1-5=0\Rightarrow 2x^2-x-6=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\dfrac{1\pm 7}{4}\Rightarrow x=2, x=-\dfrac{3}{2}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(2x+1,-3,x-1)\cdot(1,x,x)=2x+1-3x+x^2-x=0\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(2x,-x,x+2)\cdot(x+3,1,-4x)=2x^2+6x-x-4x^2-8x=0\Rightarrow -2x^2-3x=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x(-2x-3)=0\Rightarrow x=0, x=-\dfrac{3}{2}$

d) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(3x,-1,4x+2)\cdot(x-3,3,-3x)=3x^2-9x-3-12x^2-6x=0\Rightarrow -9x^2-15x-3=0\Rightarrow$

$x=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{6}, x=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{6}$

17. ¿Existe algún valor de m para que los vectores $\vec{u} = (1+m)\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i} - m\vec{j} + \vec{k}$ sean perpendiculares? ¿Y paralelos?

Si existe algún valor de *m* para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, entonces su producto escalar ha de ser cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2 + 2m - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

Si existe algún valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos, entonces debe cumplir:

$$\frac{1+m}{2} = \frac{1}{-m} = \frac{-2}{1}.$$

Luego:

$$\frac{1+m}{2} = \frac{-2}{1} \Rightarrow m = -5 \text{ y } \frac{1}{-m} = \frac{-2}{1} \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, no existe un valor de *m* para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

18. Calcula el valor de $|\vec{u} - \vec{v}|$ sabiendo que $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{45}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2}{2} \Rightarrow |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}+\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u}-\vec{v}|^2}{2} \Rightarrow |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{u}-\vec{v}|^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{u}-\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}-\vec{v}|^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\left(\sqrt{45}\right)^2 - |\vec{u}-\vec{v}|^2 = 4 \cdot 10 \Rightarrow |\vec{u}-\vec{v}|^2 = 45 - 40 = 5 \Rightarrow |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{5}.$$

19. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales de módulos 4 y 3, respectivamente. Calcula el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$ y de $\vec{u} - \vec{v}$.

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2.$$

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2.$$

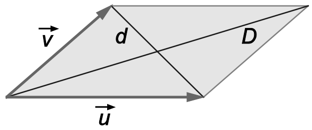
$\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 16 + 0 + 9 = 25 \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 16 - 0 + 9 = 25 \Rightarrow |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{25} = 5$$

20. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ definen el paralelogramo de la figura. Se sabe que:

$$|\vec{u}| = 5 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{13} \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 15$$



a) Expresa los vectores que definen las diagonales como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Calcula la medida de las dos diagonales.

a) $\vec{D} = \vec{u} + \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2}{2} \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 25 + 13 + 30 = 68 \Rightarrow |\vec{D}| = \sqrt{68}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u}-\vec{v}|^2}{2} \Rightarrow |\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 25 + 13 - 30 = 8 \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{8}$

21. Desarrolla y simplifica las siguientes expresiones.

a) $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

b) $4\vec{u}\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$

c) $(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

a) $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$

b) $4\vec{u}\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = 4\vec{u}\cdot 2\vec{u} - 4\vec{u}\cdot\vec{v} = 8|\vec{u}|^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v}$

c) $(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{v}\cdot\vec{u} - 3\vec{v}\cdot\vec{v} = 2\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{v}\cdot\vec{v} = 2|\vec{u}|^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - 3|\vec{v}|^2$

d) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

22 a 25. Ejercicios resueltos.

26. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1\right)$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-2+2+0}{\sqrt{2+2}\cdot\sqrt{2+2+1}} = 0 \Rightarrow \alpha = \text{arccos } 0 = 90^\circ$$

Los vectores son perpendiculares.

27. **a)** Calcula todos los vectores unitarios que sean paralelos al vector $\vec{x}=4\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k}$.

b) Calcula todos los vectores que sean paralelos a $\overrightarrow{AB}=(1,-4,-8)$ y que tengan por módulo el triple que el módulo de $\overrightarrow{AB}$.

a) Todos los vectores paralelos a $\vec{x}$ son de la forma $(4\lambda,4\lambda,-7\lambda)$.

Obligando a que su módulo valga la unidad:

$$\sqrt{16\lambda^2+16\lambda^2+49\lambda^2}=1\Rightarrow\sqrt{81\lambda^2}=1\Rightarrow\lambda^2=\frac{1}{81}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{1}{9}\Rightarrow\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9},-\frac{7}{9}\right)\\ \lambda=-\frac{1}{9}\Rightarrow\left(-\frac{4}{9},-\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)\end{cases}$$

b) Todos los vectores paralelos a $\overrightarrow{AB}$ son de la forma $(\lambda,-4\lambda,-8\lambda)$.

Obligando a que su módulo valga $3\cdot\sqrt{1+16+64}=3\cdot 9=27$:

$$\sqrt{\lambda^2+16\lambda^2+64\lambda^2}=27\Rightarrow\sqrt{81\lambda^2}=27\Rightarrow\lambda^2=\frac{729}{81}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{27}{9}=3\Rightarrow(3,-12,-24)\\ \lambda=-\frac{27}{9}=-3\Rightarrow(-3,12,24)\end{cases}$$

28. **Calcula dos vectores linealmente independientes y que sean ambos perpendiculares al vector $\vec{u}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{5},-2\right)$.**

$$\vec{v_1}=\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{3},0\right)\qquad\qquad \vec{v_2}=\left(0,2,\frac{1}{5}\right)$$

29. **Calcula los valores de k para que los vectores $\vec{u}=(k,-k,0)$ y $\vec{v}=\left(k,-k,-\sqrt{2}\right)$ formen un ángulo de 45º.**

$$\cos 45º=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{k^2+k^2}{\sqrt{k^2+k^2}\cdot\sqrt{k^2+k^2+2}}=\frac{2k^2}{k\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2+2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot k}{\sqrt{2k^2+2}}\Rightarrow\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2+2}=\sqrt{2}\cdot k\cdot 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{2k^2+2}=2k\Rightarrow 2k^2+2=4k^2\Rightarrow k^2=1\Rightarrow\begin{cases}k=1\\k=-1\end{cases}$$

30. **Comprueba que no existe ningún valor de k para el cual los vectores $\vec{u}=(k,1,1)$ y $\vec{v}=\left(-1,\sqrt{2},k\right)$ formen un ángulo de 45º.**

$$\cos 45º=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{-k+\sqrt{2}+k}{\sqrt{k^2+1+1}\sqrt{1+2+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+2}\sqrt{k^2+3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sqrt{k^2+2}\sqrt{k^2+3}=2\Rightarrow\left(k^2+2\right)\left(k^2+3\right)=4\Rightarrow$$

$\Rightarrow k^4+3k^2+2k^2+6-4=0\Rightarrow k^4+5k^2+2=0\Rightarrow$ No tiene solución.

Por tanto, no existe ningún valor de k para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen un ángulo de 45º.

31. Dado el vector $\vec{u}=(-1,2,3)$:

a) Calcula el ángulo que forma con cada uno de los tres vectores de la base $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

b) Calcula la medida de las proyecciones de $\vec{u}$ sobre cada uno de los vectores de la base $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

$\vec{i}=(1,0,0)$ $\qquad$ $\vec{j}=(0,1,0)$ $\qquad$ $\vec{k}=(0,0,1)$

a) $\cos\alpha=\cos(\vec{u},\vec{i})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{i}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{-1}{\sqrt{14}}\Rightarrow\alpha=\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)\simeq 105^{\circ}30'$

$\cos\beta=\cos(\vec{u},\vec{j})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{j}|}=\dfrac{2}{\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{2}{\sqrt{14}}\Rightarrow\beta=\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)\simeq 57^{\circ}41'$

$\cos\gamma=\cos(\vec{u},\vec{k})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{k}|}=\dfrac{3}{\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{3}{\sqrt{14}}\Rightarrow\gamma=\arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)\simeq 36^{\circ}42'$

b) $\left|\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{i}}\vec{u}}\right|=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{i}|}{|\vec{i}|}=|-1|=1$ $\quad$ $\left|\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{j}}\vec{u}}\right|=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{j}|}{|\vec{j}|}=|2|=2$ $\quad$ $\left|\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{k}}\vec{u}}\right|=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{k}|}{|\vec{k}|}=|3|=3$

32 a 34. Ejercicios resueltos.

35. Calcula las coordenadas de un vector que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}=(-1,2,0)$ y $\vec{v}=(-1,-2,2)$ y cuyo módulo sea la unidad. ¿Cuántos vectores de estas características existen?

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}=(4,2,4)$$

Por tanto, todos los vectores perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a la vez deberán ser de la forma: $(4\lambda,2\lambda,4\lambda)$

Obligando a que este vector tenga por módulo 1, se obtiene los valores de λ:

$$\sqrt{16\lambda^2+4\lambda^2+16\lambda^2}=\sqrt{36\lambda^2}=1\Rightarrow 6\lambda=\pm 1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{6},\lambda=-\frac{1}{6}$$

Los vectores buscados son $\vec{w}_1=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ y $\vec{w}_2=\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

36. Calcula los valores de x e y para que el vector $\vec{u}=(1+x)\vec{i}+y\vec{j}-2\vec{k}$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{w}=2\vec{j}+3\vec{k}$.

$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=-5\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}\Rightarrow\vec{v}\times\vec{w}=(-5,-6,4)$. El vector $\vec{u}$ debe llevar la misma dirección que $\vec{v}\times\vec{w}=(-5,-6,4)$ y, por tanto, debe ser proporcional a él. Luego:

$$\frac{1+x}{-5}=\frac{y}{-6}=\frac{-2}{4}\Rightarrow x=\frac{3}{2},y=3$$

37. Dados los vectores $\vec{u} = (3,1,-2)$ y $\vec{v} = (-3,\alpha,2)$.

a) Calcula el valor de α para que los vectores sean paralelos.

b) Calcula el valor de α para que los vectores sean perpendiculares. Para este valor, calcula $\vec{u} \times \vec{v}$.

a) Para que sean paralelos deben ser proporcionales:

$$\frac{3}{-3} = \frac{1}{\alpha} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \alpha = -1$$

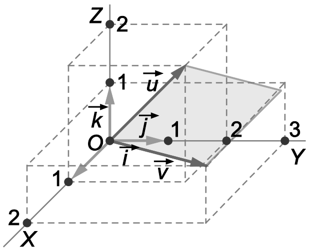
b) Para que sean perpendiculares, su producto escalar debe ser nulo:

$$3 \cdot (-3) + \alpha - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow -9 + \alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = 13$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 28\vec{i} + 42\vec{k} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (28,0,42)$$

38. a) Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura en la base canónica $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

b) Calcula el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



a) $\vec{u} = (1,2,2)$, $\vec{v} = (2,3,1)$.

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (-4,3,-1)$

Por tanto, el área del paralelogramo es:

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}\ \text{u}^2.$$

39 y 40. Ejercicios resueltos.

41. Dados los vectores $\vec{u}=(-1,3,6)$, $\vec{v}=(-1,-8,5)$ y $\vec{w}=(3,4,-5)$, calcula:

a) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$

b) $[\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v},3\vec{w}]$

c) $[\vec{u}\times\vec{v},\vec{u}\times\vec{w},\vec{w}]$

d) $\left[\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{3}{5}\vec{v},2\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v},\vec{u}\times\vec{w}\right]$

a) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 6\\ -1 & -8 & 5\\ 3 & 4 & -5\end{vmatrix}=-40-24+45+144+20-15=130$

b) $[\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v},3\vec{w}]=\begin{vmatrix}-2 & -5 & 11\\ 0 & 11 & 1\\ 9 & 12 & -15\end{vmatrix}=330-45-1089+24=-780$

c) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 6\\ -1 & -8 & 5\end{vmatrix}=63\vec{i}-\vec{j}+11\vec{k}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=(63,-1,11)$

$\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 6\\ 3 & 4 & -5\end{vmatrix}=-39\vec{i}+13\vec{j}-13\vec{k}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{w}=(-39,13,-13)$

$[\vec{u}\times\vec{v},\vec{u}\times\vec{w},\vec{w}]=\begin{vmatrix}63 & -1 & 11\\ -39 & 13 & -13\\ 3 & 4 & -5\end{vmatrix}=-4095-1716+39-429+3276+195=-2730$

d) $\left[\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{3}{5}\vec{v},2\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v},\vec{u}\times\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}-\frac{11}{10} & -\frac{33}{10} & 6\\ -\frac{5}{3} & \frac{26}{3} & \frac{31}{3}\\ -39 & 13 & -13\end{vmatrix}=\frac{35711}{10}$

42. Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}=(2,-3,7)$, $\vec{v}=(-12,0,5)$ y $\vec{w}=(13,-2,-7)$.

$V_P=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=\left\|\begin{matrix}2 & -3 & 7\\ -12 & 0 & 5\\ 13 & -2 & -7\end{matrix}\right\|=|168-195+20+252|=245\,\text{u}^3$

43. Calcula los valores de *k* para que los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,k,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(k,1,4)$ y $\overrightarrow{AD}=(-3,0,2)$:

a) Determinen un paralelepípedo de volumen de 11 unidades cúbicas.

b) Determinen un paralelepípedo de volumen de 39 unidades cúbicas.

a) $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}1 & k & -3\\ k & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{vmatrix}=2-12k-9-2k^2=11\Rightarrow 2k^2+12k+18=0\Rightarrow k^2+6k+9=0\Rightarrow$

$\Rightarrow (k+3)^2=0\Rightarrow k=-3$

b) $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}1 & k & -3\\ k & 1 & 4\\ -3 & 0 & 2\end{vmatrix}=2-12k-9-2k^2=39\Rightarrow 2k^2+12k+46=0\Rightarrow$

$\Rightarrow k^2+6k+23=0\Rightarrow k=\frac{-6\pm\sqrt{-56}}{2}$. No existe ningún valor real de *k* para el que se cumpla la condición.

44. Calcula los valores de *k* para que los vectores $\overrightarrow{AB}=(2,k,4)$, $\overrightarrow{AC}=(5,1,-k)$ y $\overrightarrow{AD}=(7,6,-1)$ no determinen ningún paralelepípedo. ¿Cómo deben ser estos tres vectores?

Los tres vectores deben ser linealmente dependientes. Su producto mixto debe ser nulo:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}2 & k & 4\\5 & 1 & -k\\7 & 6 & -1\end{vmatrix}=-2+120-7k^2-28+12k+5k=0\Rightarrow 7k^2-17k-90=0.$$

$$k=\frac{17\pm\sqrt{2809}}{14}=\frac{17\pm 53}{14}\Rightarrow k=5, k=-\frac{18}{7}$$

45. Si los módulos de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son 12, 14 y 15 respectivamente, ¿entre qué valores está comprendido el valor absoluto de su producto mixto?

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=|\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)=|\vec{u}||\vec{v}||\vec{w}|\operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right).$$

El valor máximo absoluto del producto mixto $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$ se obtiene cuando $\operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)$ y $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)$ toman su valor máximo, es decir, uno. Por tanto:

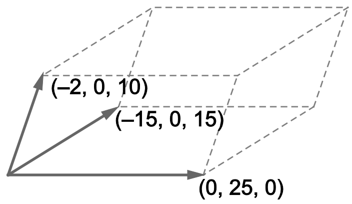
$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=|\vec{u}||\vec{v}||\vec{w}|=12\cdot 14\cdot 15=2520$$

El valor mínimo absoluto se obtiene cuando $\operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)$ o $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)$ toman su valor mínimo, es decir, cero.

Por tanto:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0$$

46. Calcula el volumen y una de las alturas del prisma de la figura.



El volumen del prisma será:

$$\left|\left[(0,25,0),(-15,0,15),(-2,0,10)\right]\right|=\left\|\begin{matrix}0 & 25 & 0\\-15 & 0 & 15\\-2 & 0 & 10\end{matrix}\right\|=|-750+3750|=3000.$$

La altura es el cociente entre el volumen y el área de la base:

$$h=\frac{3000}{|(0,25,0)\times(-15,0,15)|}=\frac{3000}{\sqrt{281\,250}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

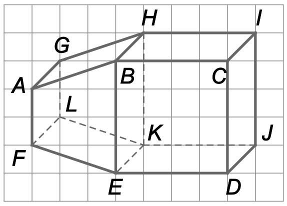
47. Ejercicio interactivo.

48 a 54. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Vectores libres en el espacio

55. Observa la figura:



a) Indica un vector equipolente de cada uno de los siguientes: $\overrightarrow{FL}$, $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{EB}$.

b) Compara el módulo dirección y sentido de las parejas de vectores:

i) $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BE}$ ii) $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{BA}$

c) Indica dos vectores del mismo módulo y dirección que $\overrightarrow{EJ}$ pero con diferente sentido.

a) Vectores equipolentes de $\overrightarrow{FL}$: $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{EK}$

Vector equipolente de $\overrightarrow{FE}$: $\overrightarrow{LK}$

Vectores equipolentes de $\overrightarrow{EB}$: $\overrightarrow{KH}$, $\overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{DC}$

b) i) $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BE}$ tienen igual dirección e igual sentido y sus módulos son diferentes y verifican que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AF}$.

ii) $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen diferente dirección y, por tanto, no tiene sentido comparar sus sentidos. Sus módulos son iguales.

c) $\overrightarrow{JE}$ y $\overrightarrow{IB}$.

56. Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cuyas coordenadas respecto de la base canónica son $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores referida a la misma base:

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}$

b) $\frac{1}{2}\vec{u} - 4\vec{v} - \frac{1}{5}\vec{w}$

c) $\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}$

d) $2(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 3\vec{v} - 3\vec{w})$

$\vec{u} = (2,3,-1)$ $\vec{v} = (-3,2,3)$ $\vec{w} = (1,1,-2)$

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w} = (4,6,-2) + (-9,6,9) - (1,1,-2) = (-6,11,9)$

b) $\frac{1}{2}\vec{u} - 4\vec{v} - \frac{1}{5}\vec{w} = \left(1,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) + (12,-8,-12) + \left(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{64}{5},-\frac{67}{10},-\frac{121}{10}\right)$

c) $\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w} = \left(\frac{4}{3},2,-\frac{2}{3}\right) + \left(-1,\frac{2}{3},\frac{3}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3},2,\frac{5}{3}\right)$

d) $2(\vec{u} - 3\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 3\vec{v} - 3\vec{w}) = (22,-6,-20) + \left(-4,\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right) = \left(18,-\frac{3}{2},-\frac{27}{2}\right)$

57. Calcula los valores de *a*, *b* y *c* para que se verifique la igualdad: $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\frac{1}{2}(-3,2,0)-\frac{1}{4}(2,-2,2)$ si se sabe que $\vec{u}=(-3,0,-2)$, $\vec{v}=(2,-1,4)$ y $\vec{w}=(3,-1,-1)$.

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\frac{1}{2}(-3,2,0)-\frac{1}{4}(2,-2,2)\Rightarrow a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\left(-2,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow(-3a+2b+3c,-b-c,-2a+4b-c)=\left(-2,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{cases}-3a+2b+3c=-2\\ -b-c=\frac{3}{2}\\ -2a+4b-c=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{21}{34},b=-\frac{11}{17},c=-\frac{29}{34}$$

58. Decide si los siguientes tríos de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes. ¿En qué casos los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base de V^3?

a) $\vec{u}=(1,1,-1)$, $\vec{v}=(1,-1,1)$, $\vec{w}=(-1,1,1)$

b) $\vec{u}=(1,2,-3)$, $\vec{v}=(2,-1,3)$, $\vec{w}=(5,0,3)$

c) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4},-2\right)$, $\vec{v}=\left(0,\frac{1}{2},-2\right)$, $\vec{w}=(1,0,-10)$

Tres vectores linealmente independientes de V^3 forman base. Si son linealmente dependientes, no forman base.

a) $\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=-1-1-1+1-1-1=-4\neq0\Rightarrow$ Sí forman base de V^3.

b) $\begin{vmatrix}1&2&-3\\2&-1&3\\5&0&3\end{vmatrix}=-3+30-15-12=0\Rightarrow$ No forman base de V^3.

c) $\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&-2\\0&\frac{1}{2}&-2\\1&0&-10\end{vmatrix}=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+1=0\Rightarrow$ No forman base de V^3.

59. Calcula la relación que ha de existir entre *a* y *b* para que los vectores $\vec{u}=(a,-2,b)$, $\vec{v}=(3,2,a)$ y $\vec{w}=(2,4,0)$ sean linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix}a&-2&b\\3&2&a\\2&4&0\end{vmatrix}=12b-4a-4b-4a^2=0\Rightarrow a^2+a-2b=0\Rightarrow b=\frac{a^2+a}{2}$$

Por tanto, la relación entre *a* y *b* para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes es: $b\neq\frac{a^2+a}{2}$

60. Calcula el valor o los valores de k para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no formen una base de V^3.

a) $\vec{u}=(2,2,-5)\ \ \vec{v}=(4,1,7)\ \ \vec{w}=(k,5,-3)$

b) $\vec{u}=(1,k,3)\ \ \vec{v}=(2,4,-6)\ \ \vec{w}=(k,-5,9)$

c) $\vec{u}=(1,-2,3)\ \ \vec{v}=(4,-1,k)\ \ \vec{w}=(k+1,-k,11)$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 7 \\ k & 5 & -3 \end{vmatrix} = 19k-152=0 \Rightarrow k=\dfrac{152}{19}=8 \Rightarrow k=8$

b) $\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ k & -5 & 9 \end{vmatrix} = -6k^2-30k-24=0 \Rightarrow k=-4, k=-1$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & k \\ k+1 & -k & 11 \end{vmatrix} = -k^2-11k+80=0 \Rightarrow k=-16, k=5$

61. Para cada caso, comprueba si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base de V^3 y, en caso afirmativo, expresa el vector $\vec{a}=(-12,-30,4)$ como combinación lineal de los vectores de esa base.

a) $\vec{u}=(1,0,-2)$, $\vec{v}=(-1,3,-2)$, $\vec{w}=(-5,-9,2)$

b) $\vec{u}=(-2,3,-1)$, $\vec{v}=(1,-1,2)$, $\vec{w}=(-1,2,1)$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -5 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 6-18-30-18=-60\neq 0 \Rightarrow$ Sí forman base de V^3.

$(-12,-30,4)=\lambda_1(1,0,-2)+\lambda_2(-1,3,-2)+\lambda_3(-5,-9,2)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1-\lambda_2-5\lambda_3=-12 \\ 3\lambda_2-9\lambda_3=-30 \\ -2\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3=4 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=-1, \lambda_3=3$$

Por tanto, $\vec{a}=2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$.

Las coordenadas de $\vec{a}$ en esta base son: $(2,-1,3)$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-2-6+1+8-3=0 \Rightarrow$ No forman base de V^3.

62. Se sabe que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Estudia, para cada caso, si los vectores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son o no linealmente independientes.

a) $\vec{a}=2\vec{u}-4\vec{v}+\vec{w}$ $\quad \vec{b}=-\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w}$ $\quad \vec{c}=-3\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$

b) $\vec{a}=\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$ $\quad \vec{b}=-\vec{u}-2\vec{v}+4\vec{w}$ $\quad \vec{c}=\vec{u}-4\vec{v}+6\vec{w}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12+1+36-6+6-12=13 \Rightarrow$ Sí son linealmente independientes.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -12+4-4+2+16-6=0 \Rightarrow$ Sí son linealmente dependientes.

63. **a)** Comprueba que los vectores $\vec{u}=(2,-1,-2)$ y $\vec{v}=(1,-3,2)$ son linealmente independientes.

b) Indica un vector $\vec{w}_1$ tal que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}_1$ sean linealmente independientes. ¿Formarán los tres una base de V^3?

c) Indica un vector $\vec{w}_2$ tal que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}_2$ sean linealmente dependientes. ¿Formarán los tres una base de V^3?

a) Dos vectores de V^3 son linealmente independientes si no son proporcionales:

$\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-3}\neq\frac{-2}{2}\Rightarrow$ Son linealmente independientes.

b) Cualquier otro vector que, con los dos anteriores, determine un determinante no nulo hará que los tres sean linealmente independientes. Por ejemplo, $\vec{w}_1=(1,0,0)$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2-6\neq 0$$

c) Cualquier otro vector que, con los dos anteriores, determine un determinante nulo hará que los tres sean linealmente dependientes. Por ejemplo, $\vec{w}_2=\vec{u}+\vec{v}=(3,-4,0)$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}=8-6-18+16=0$$

No forman base porque son linealmente dependientes.

64. **a)** Comprueba que los vectores $\vec{u}=(1,-1,-3)$, $\vec{v}=(1,-2,2)$ y $\vec{w}=(-1,5,-17)$ son linealmente dependientes.

¿Se puede escribir cualquier otro vector $\vec{a}$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

b) Intenta escribir $\vec{a}=(4,-6,-2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -17 \end{vmatrix}=34-15+2+6-10-17=0$

Al no formar base $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, no es posible que cualquier otro vector de V^3 pueda escribirse como combinación lineal de ellos. (Eso no quiere decir que algunos particulares sí se puedan escribir).

b) $(4,-6,-2)=\lambda_1(1,-1,-3)+\lambda_2(1,-2,2)+\lambda_3(-1,5,-17)\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 5 & -6 \\ -3 & 2 & -17 & -2 \end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to 3F_1+F_3]{F_2\to F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -20 & 10 \end{array}\right)\xrightarrow{F_3\to -5F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible indeterminado. Como, por ejemplo, una solución es $\lambda_1=2,\lambda_2=2,\lambda_3=0$ el vector $\vec{a}$ sí se puede escribir como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\vec{a}=2\vec{u}+2\vec{v}+0\vec{w}$.

65. **a)** Calcula los valores de *k* para que los vectores $\vec{u}=(-1,k,2)$, $\vec{v}=(k+2,k-1,k)$ y $\vec{w}=(4,-3,4)$ sean linealmente dependientes.

b) Para $k=0$, intenta escribir $\vec{a}=(6,-4,4)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

c) Para $k=0$, intenta escribir $\vec{b}=(3,2,0)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

d) Para $k=1$, intenta escribir $\vec{b}=(3,2,0)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) $\begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ k+2 & k-1 & k \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -4k+4-6k-12+4k^2-8k+8-3k-4k^2-8k = -29k = 0 \Rightarrow k=0$.

Para cualquier valor $k \neq 0$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

b) $(6,-4,4)=\lambda_1(-1,0,2)+\lambda_2(2,-1,0)+\lambda_3(4,-3,4) \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to -2F_1 - F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -12 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 4F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema compatible indeterminado.

Como, por ejemplo, una solución es $\lambda_1=2, \lambda_2=4, \lambda_3=0$, el vector $\vec{a}$ sí se puede escribir como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$\vec{a}=2\vec{u}+4\vec{v}$$

c) $(3,2,0)=\lambda_1(-1,0,2)+\lambda_2(2,-1,0)+\lambda_3(4,-3,4) \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to -2F_1 - F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -12 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 4F_2 - F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right)$$

Sistema incompatible.

El vector $\vec{a}$ no se puede escribir como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

d) $(3,2,0)=\lambda_1(-1,1,2)+\lambda_2(3,0,1)+\lambda_3(4,-3,4) \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to -F_1 - F_2 \\ F_3 \to -2F_1 - F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -7 & -12 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 7F_2 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 29 & -17 \end{array}\right)$$

Sistema compatible determinado con única solución:

$$\lambda_1=\frac{7}{29}, \lambda_2=\frac{54}{29}, \lambda_3=-\frac{17}{29}$$

El vector $\vec{a}$ sí se puede escribir como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$\vec{a}=\frac{7}{29}\vec{u}+\frac{54}{29}\vec{v}-\frac{17}{29}\vec{w}$$

Producto escalar de vectores

66. Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=(-3,5,-10)$ $\quad\vec{v}=(-1,-2,12)$

b) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\frac{1}{5}\right)$ $\quad\vec{v}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{10}\right)$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3,5,-10)\cdot(-1,-2,12)=3-10-120=-127$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{50}=\frac{287}{600}$.

67. Dados los vectores $\vec{u}=(-3,5,-10)$ y $\vec{v}=(-1,-2,12)$, calcula los productos escalares.

a) $2\vec{u}\cdot(-3\vec{v})$

b) $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{u}-4\vec{v}\right)\right]\cdot\left(\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}\right)$

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{v}\right)(3\vec{u})+3\vec{v}\right]\cdot\vec{v}$

a) $2\vec{u}\cdot(-3\vec{v})=(-6,10-20)\cdot(3,6,-36)=-18+60+720=762$

b) $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{u}-4\vec{v}\right)\right]\cdot\left(\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}\right)=\left(\frac{13}{8},\frac{37}{8},-\frac{101}{4}\right)\cdot\left(-\frac{16}{5},\frac{23}{5},-\frac{38}{5}\right)=-\frac{26}{5}+\frac{851}{40}+\frac{1919}{10}=\frac{8319}{40}$

c) $\left[\left(\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{v}\right)(3\vec{u})+3\vec{v}\right]\cdot\vec{v}=\left[-\frac{127}{2}(-9,15,-30)+(-3,-6,36)\right]\cdot(-1,-2,12)=$

$=\left(\frac{1137}{2},-\frac{1917}{2},1941\right)\cdot(-1,-2,12)=\frac{49\,281}{2}$

68. Calcula el valor o los valores de *k* para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $(2,-3,4)\cdot(k,1-k,3)=-5$

b) $(-1,2,k)\cdot(k+2,k,k-4)=-2$

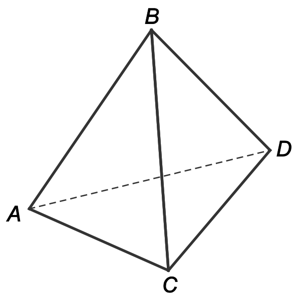
c) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},k\right)\cdot\left(\frac{k}{8},-\frac{1}{8},k\right)=\frac{9}{8}$

a) $2k-3+3k+12=5\Rightarrow 5k=-4\Rightarrow k=-\frac{4}{5}$

b) $-k-2+2k+k^2-4k=-2\Rightarrow k^2-3k=0\Rightarrow k=0, k=3$

c) $\frac{k}{16}+\frac{1}{16}+k^2=\frac{9}{8}\Rightarrow k^2+\frac{k}{16}-\frac{17}{16}=0\Rightarrow 16k^2+k-17=0\Rightarrow k=1, k=-\frac{17}{16}$

69. Se considera el tetraedro regular *ABCD* de la figura de arista *a*.



a) Calcula los productos escalares $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

b) Calcula el producto escalar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$. ¿Qué puedes concluir?

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos 60^\circ = aa\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos 60^\circ = aa\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$

Las aristas *AB* y *CD* son perpendiculares.

Aplicaciones del producto escalar

70. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(-1,2,3)$ calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto escalar de $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

c) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La medida de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

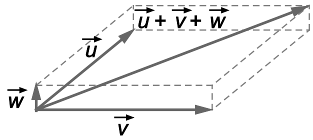
a) $|\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$, $|\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+2\cdot 3=3$

c) $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{\sqrt{84}}\ \Rightarrow\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\arccos\frac{3}{\sqrt{84}}\simeq 70^\circ\, 53'\, 36''$

d) Proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$: $\left|\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}\right|=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}=\frac{3}{\sqrt{6}}$

71. Los módulos de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son 4, 4 y 2 respectivamente. Los vectores siguen las direcciones y sentidos de los vectores de la base canónica y, por tanto, son perpendiculares dos a dos.



a) Halla las coordenadas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y de $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

b) Determina el módulo del vector suma.

c) Calcula el valor de los ángulos que el vector suma forma con cada uno de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) Se puede tomar las direcciones de los ejes coordenados como las de los tres vectores dados:

$\vec{u}=4\vec{i}$, $\vec{v}=4\vec{j}$, $\vec{w}=2\vec{k}$ y el vector suma vendrá determinado por las coordenadas $\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(4,4,2)$.

b) $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=\sqrt{36}=6$.

c) $\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{u}}\right)=\dfrac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{|\vec{s}||\vec{u}|}=\dfrac{16}{6\cdot 4}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{s},\vec{u}}\right)=\arccos\dfrac{2}{3}\simeq 48^{\circ}11'23''$

$$\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{s}\cdot\vec{v}}{|\vec{s}||\vec{v}|}=\frac{16}{6\cdot 4}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{s},\vec{v}}\right)=\arccos\frac{2}{3}\simeq 48^{\circ}11'23''$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{w}}\right)=\frac{\vec{s}\cdot\vec{w}}{|\vec{s}||\vec{w}|}=\frac{4}{6\cdot 2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\widehat{\vec{s},\vec{w}}\right)=\arccos\frac{1}{3}\simeq 70^{\circ}31'44''$$

72. Halla el valor o los valores de α para que los vectores $\vec{u}=(3,-2,5\alpha)$ y $\vec{v}=(1,-1,-\alpha)$ sean perpendiculares.

Para que dos vectores no nulos sean perpendiculares es necesario y suficiente que su producto escalar sea nulo:

$$(3,-2,5\alpha)\cdot(1,-1,-\alpha)=3+2-5\alpha^2=0\Rightarrow\alpha=1,\alpha=-1$$

73. Se consideran los vectores de coordenadas $\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(x,1,y)$ y $\vec{c}=(2,x+y,0)$.

a) Calcula los valores de x e y para que el vector $\vec{a}$ sea perpendicular al vector $\vec{b}-\vec{c}$ y para que el vector $\vec{b}$ sea perpendicular al vector $\vec{c}-\vec{a}$.

b) Demuestra que, para los valores de x y de y hallados, el vector $\vec{c}$ es perpendicular al vector $\vec{a}-\vec{b}$.

a) $\begin{cases}\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0\Rightarrow(1,2,-1)\cdot(x-2,1-x-y,y)\\ \vec{b}\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=0\Rightarrow(x,1,y)\cdot(1,x+y-2,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x-3y=0\\ x+y=1\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{3}{2},y=-\dfrac{1}{2}$

b) $(2,1,0)\cdot\left(-\dfrac{1}{2},1,-\dfrac{1}{2}\right)=-1+1=0\Rightarrow\vec{c}$ es perpendicular a $\vec{a}-\vec{b}$.

74. Calcula las coordenadas de todos los vectores que lleven la misma dirección que $\vec{u}=(1,2,-1)$ y tengan por módulo 15 unidades de longitud.

Todos los vectores paralelos a $\vec{u}$ son de la forma $(\lambda,2\lambda,-\lambda)$. Obligando a que su módulo valga 15:

$$\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+\lambda^2}=15\Rightarrow\sqrt{6\lambda^2}=15\Rightarrow\lambda^2=\frac{75}{2}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\sqrt{\frac{75}{2}}\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{75}{2}},\sqrt{150},-\sqrt{\frac{75}{2}}\right)\\ \lambda=-\sqrt{\frac{75}{2}}\Rightarrow\left(-\sqrt{\frac{75}{2}},-\sqrt{150},\sqrt{\frac{75}{2}}\right)\end{cases}.$$

75. Calcula todos los vectores unitarios que sean paralelos al vector $\vec{u}=(1,\ 2,\ -1)$.

Todos los vectores paralelos a $\vec{u}$ son de la forma $(\lambda,2\lambda,-\lambda)$. Obligando a que su módulo valga 1:

$$\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+\lambda^2}=15\Rightarrow\sqrt{6\lambda^2}=1\Rightarrow\lambda^2=\frac{1}{6}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\sqrt{\frac{1}{6}}\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{1}{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\\ \lambda=-\sqrt{\frac{1}{6}}\Rightarrow\left(-\sqrt{\frac{1}{6}},-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{6}}\right)\end{cases}$$

76. Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u}=(4,-4,7)$ y $\vec{v}=(1,-8,-4)$

b) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$

c) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-2,-\frac{3}{5}\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{10}{9}\right)$

a) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{4+32-28}{\sqrt{16+16+49}\cdot\sqrt{1+64+16}}=\dfrac{8}{81}\Rightarrow\alpha=\arccos\dfrac{8}{81}=84º\,20'$

b) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{7}{24}}}\Rightarrow\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{24}}{3\sqrt{7}}=51º53'$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{4}+4+\frac{9}{25}}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{100}{81}}}=0\Rightarrow\alpha=\arccos 0=90º$

77. Calcula el valor de *k* para que los vectores y $\vec{u}=(2,-2,0)$ y $\vec{v}=(0,k,2)$ formen un ángulo de 60º.

$$\cos 60º=\frac{\vec{u}\cdot v}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{-2k}{\sqrt{8}\sqrt{4+k^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow-4k=\sqrt{32+8k^2}\Rightarrow16k^2=32+8k^2\Rightarrow8k^2=32\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=2(\text{FALSA}),k=-2.$$

Por tanto, el único valor de *k* es –2.

78. Calcula las coordenadas del vector proyección de $\vec{u} = (6,-6,17)$ sobre el vector $\vec{v} = (-6,10,15)$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -36 - 60 + 255 = 159 > 0$

Por ser $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}$ de la misma dirección y mismo sentido que $\vec{v}$, será de la forma:

$\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}} = (-6\lambda, 10\lambda, 15\lambda)$ para algún λ positivo. Obligando a que el módulo de $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}$ valga:

$$\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{159}{\sqrt{36+100+225}} = \frac{159}{19}$$, se obtiene el valor de λ:

$$\left|\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}\right| = \sqrt{36\lambda^2 + 100\lambda^2 + 225\lambda^2} = \frac{159}{19} \Rightarrow 19\lambda = \frac{159}{19} \Rightarrow \lambda = \frac{159}{361}$$

El vector proyección buscado es $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}} = \left(-\frac{954}{361}, \frac{1590}{361}, \frac{2385}{361}\right)$.

79. Calcula las coordenadas del vector proyección de $\vec{u} = (-4,4,7)$ sobre el vector $\vec{v} = (1,2,-2)$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 + 8 - 14 = -10 < 0$

Por ser $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}$ de la misma dirección y diferente sentido que $\vec{v}$, será de la forma:

$\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}} = (\lambda, 2\lambda, -2\lambda)$ para algún λ negativo.

Obligando a que el módulo de $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}$ valga $\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{10}{3}$, se obtiene el valor de λ:

$$\left|\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}\right| = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3\lambda = -\frac{10}{3} \Rightarrow \lambda = -\frac{10}{9}$$

El vector proyección buscado es $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}} = \left(-\frac{10}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{20}{9}\right)$.

80. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ verifican que $|\vec{u}| = 15$, $|\vec{v}| = 12$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = 25$.

a) Calcula el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ¿De qué tipo es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Calcula el ángulo que forma $\vec{u} - \vec{v}$ con el vector $\vec{v}$.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u}-\vec{v}|^2}{2} = \frac{225 + 144 - 625}{2} = -128$

Al ser el producto escalar negativo, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formar un ángulo obtuso.

b) $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-128}{15\cdot 12} \simeq -0{,}7111 \Rightarrow \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) \simeq \arccos(-0{,}7111) \simeq 135^\circ\, 20'$

c) $\cos\left(\widehat{\vec{u}-\vec{v},\vec{v}}\right) = \frac{(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{v}}{|\vec{u}-\vec{v}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v} - |\vec{v}|^2}{25\cdot 12} \simeq -0{,}9067 \Rightarrow \left(\widehat{\vec{u}-\vec{v},\vec{v}}\right) \simeq \arccos(-0{,}9067) = 155^\circ 3'$

81. Los módulos de dos vectores valen 40 y 30 unidades de longitud, respectivamente. El módulo de la suma de dichos vectores es 50 unidades de longitud. Calcula el ángulo que forman los vectores suma y diferencia de los dos considerados.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{|\vec{u}+\vec{v}|^2-|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2}{2}=\frac{50^2-40^2-30^2}{2}=0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2}{2}=0\Rightarrow|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=50^2\Rightarrow|\vec{u}-\vec{v}|=50$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2=40^2-30^2=700$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right)=\frac{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}{|\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|}=\frac{700}{50\cdot 50}=0,28\Rightarrow\left(\widehat{\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}}\right)\simeq\arccos(0,28)=73^{o}\,44'$$

82. En física, se define el trabajo de una fuerza constante sobre una partícula como el producto escalar de dicha fuerza por el vector desplazamiento de dicha partícula. Con esta información, calcula qué trabajo ha ejercido una fuerza, $\vec{F}=(2,-3,4)$ (N) sobre una partícula que se ha movido entre los puntos $A(1,0,-3)$ y $B(2,2,2)$ (m).

Vector desplazamiento: $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)-(1,0,-3)=(1,2,5)$

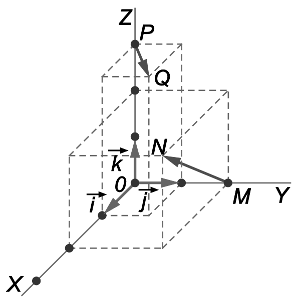
Por tanto, el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula es: $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=(2,-3,4)\cdot(1,2,5)=2-6+20=16$ J.

Producto vectorial de vectores

83. Calcula el producto vectorial de los vectores $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ y $\vec{v}=-4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&-2\\-4&3&-5\end{vmatrix}=-9\vec{i}+18\vec{j}+18\vec{k}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}==(-9,18,18)$$

84. Expresa los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{PQ}$ como combinación lineal de los vectores de la base canónica $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ y calcula su producto escalar y su producto vectorial.



$\overrightarrow{MN}=2\vec{i}+2\vec{k}$ $\qquad$ $\overrightarrow{PQ}=\vec{i}+\vec{j}$

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}=(2,0,2)\cdot(1,1,0)=2$

$$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&2\\1&1&0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

85. **a)** Calcula el producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ de los vectores $\vec{u}=(0,-2,4)$ y $\vec{v}=(-1,3,3)$.

b) Calcula el módulo de $\vec{u}\times\vec{v}$.

c) Calcula el seno del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 4\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}=-18\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$

b) $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{324+16+4}=\sqrt{344}$

c) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{\sqrt{344}}{\sqrt{4+16}\cdot\sqrt{1+9+9}}=\sqrt{\dfrac{344}{380}}=\sqrt{\dfrac{86}{95}}$

86. **Calcula el producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y demuestra que el vector resultado es perpendicular a los dos dados:**

a) $\vec{u}=(1,-3,5)$ y $\vec{v}=(-3,-2,4)$

b) $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right)$

a) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 5\\ -3 & -2 & 4\end{vmatrix}=-2\vec{i}-19\vec{j}-11\vec{k}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=(-2,-19,-11)$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=-2+57-55=0\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$ $\qquad(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=6+38-44=0\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$

b) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{4}\vec{i}-\dfrac{1}{3}\vec{j}+\dfrac{1}{12}\vec{k}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{12}\right)$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{24}=0\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$ $\qquad(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{72}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$

87. **Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,-1)$ y $\vec{v}=(-2,1,0)$:**

a) Demuestra que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

b) Escribe, con ayuda de parámetros, todos los vectores $\vec{x}$ tales que verifiquen que $\vec{u}\times\vec{x}=\vec{v}$.

c) ¿Qué hubiera ocurrido si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no hubieran sido perpendiculares?

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,2,-1)\cdot(-2,1,0)=-2+2=0\Rightarrow\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

b) $\vec{x}=(a,b,c)\Rightarrow\vec{u}\times\vec{x}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ a & b & c\end{vmatrix}=(2c+b)\vec{i}-(a+c)\vec{j}+(b-2a)\vec{k}=-2\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow\begin{cases}2c+b=-2\\ a+c=-1\\ b-2a=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow a=-1-\lambda, b=-2-2\lambda, c=\lambda\Rightarrow\vec{x}=(-1-\lambda,-2-2\lambda,\lambda)$

c) No habría ninguna solución, ya que el producto vectorial de dos vectores es perpendicular a cada uno de ellos.

Aplicaciones del producto vectorial

88. Calcula las coordenadas de un vector que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(0,-1,2)$ y tal que su módulo mida $9\sqrt{6}$ unidades de longitud. ¿Cuántos vectores de estas características existen?

$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=7\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow$ Todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ son de la forma $(7\lambda,2\lambda,\lambda)$.

Como el módulo debe ser $9\sqrt{6}$, entonces: $\sqrt{49\lambda^2+4\lambda^2+\lambda^2}=\sqrt{54\lambda^2}=\sqrt{486}\Rightarrow\lambda=3$ o $\lambda=-3$.

Existen dos vectores con las características requeridas: $(21,6,3)$ y $(-21,-6,-3)$.

89. Calcula todos los vectores unitarios que sean perpendiculares a los vectores $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ y $\vec{v}=-4\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$.

$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -2\\ -4 & 3 & -5\end{vmatrix}=-9\vec{i}+18\vec{j}+18\vec{k}$

El vector $(-9,18,18)$ tiene la misma dirección que el vector $(-1,2,2)$.

Todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ son de la forma $(-\lambda,2\lambda,2\lambda)$.

Como el módulo debe ser 1, entonces: $\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda^2}=\sqrt{9\lambda^2}=1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{3}$ o $\lambda=-\frac{1}{3}$

Existen dos vectores con las características requeridas: $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

90. Calcula el área del paralelogramo determinado por los vectores:

a) $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(0,1,-1)$

b) $\vec{u}=\left(1,-2,\sqrt{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(\sqrt{2},1,-1\right)$

c) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{4}\right)$ y $\vec{v}=\left(2,\frac{1}{2},1\right)$

a) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ $\quad A=|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\ \text{u}^2$

b) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1 & -1\end{vmatrix}=\left(2-\sqrt{2}\right)\vec{i}+3\vec{j}+\left(1+2\sqrt{2}\right)\vec{k}$ $\quad A=|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2+3^2+\left(1+2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{24}\ \text{u}^2$

c) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{4}\\ 2 & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=-\frac{11}{8}\vec{i}+\vec{j}+\frac{9}{4}\vec{k}$ $\quad A=|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{\frac{121}{64}+1+\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt{509}}{8}\ \text{u}^2$

91. Calcula el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{u}=(2,-1,3)$ y $\vec{v}=(4,4,-10)$.

$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 4 & -10\end{vmatrix}=-2\vec{i}+32\vec{j}+12\vec{k}$ $\quad A=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|=\frac{1}{2}\sqrt{4+1024+144}=\sqrt{293}$ u²

92. Calcula los posibles valores de *a* para que el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}=(2,a,-3)$ y $\vec{v}=(4,-1,5)$ valga $\sqrt{633}$ u².

$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & a & -3\\ 4 & -1 & 5\end{vmatrix}=(5a-3)\vec{i}-22\vec{j}-(2+4a)\vec{k}$

$\sqrt{(5a-3)^2+22^2+(2+4a)^2}=\sqrt{633}\Rightarrow(5a-3)^2+484+(2+4a)^2=633\Rightarrow 41a^2-14a-136=0\Rightarrow$

$\Rightarrow a=\frac{14\pm150}{82}\Rightarrow a=2, a=-\frac{68}{41}$

93. La fuerza de Lorenz es la fuerza que sufre una partícula con carga eléctrica *q* cuando se mueve con una velocidad $\vec{u}$ dentro de un campo magnético $\vec{B}$ y viene dada por la expresión $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$. Un protón cuya carga es de $1{,}6\cdot10^{-19}$ C, entra un campo magnético uniforme $\vec{B}=(-1,2,3)$ (*T*). Determina el valor de la fuerza sobre el protón en el instante en que su velocidad es:

a) $\vec{v}=(3,1,5)$ (ms⁻¹)

b) $\vec{v}=(2,1,0)$ (ms⁻¹)

c) $\vec{v}$ paralela a $\vec{B}$ y con un valor de 5 ms⁻¹.

a) $\vec{F}=1{,}6\cdot10^{-19}(3,1,5)\times(-1,2,3)=10^{-20}(-112,-224,112)$ (J)

b) $\vec{F}=1{,}6\cdot10^{-19}(2,1,0)\times(-1,2,3)=10^{-20}(48,-96,80)$ (J)

c) Como $\vec{v}$ es paralela a $\vec{B}$, entonces $q\vec{v}$ también es paralelo a $\vec{B}$, luego $q\vec{v}\times\vec{B}=\vec{0}$. Por tanto, $\vec{F}=\vec{0}$.

Producto mixto de vectores

94. Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) $\vec{u}=(2,4,-5)$, $\vec{v}=(-2,-2,5)$, $\vec{w}=(-2,4,6)$

b) $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\vec{v}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-1\right)$, $\vec{w}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\right)$

a) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}2 & 4 & -5\\ -2 & -2 & 5\\ -2 & 4 & 6\end{vmatrix}=-24+40-40+20-40+48=4$

b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

95. Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{v} = -10\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{w} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -10 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 + 80 + 24 - 48 - 4 - 120 = -56$$

96. Dados los vectores $\vec{u} = (2,1,-1)$, $\vec{v} = (-2,-2,1)$ y $\vec{w} = (1,-2,-3)$, comprueba que se verifica la igualdad $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 4 + 1 - 2 + 4 - 6 = 5 \qquad [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 12 + 4 - 6 - 2 = 5$$

Aplicaciones del producto mixto

97. Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores:

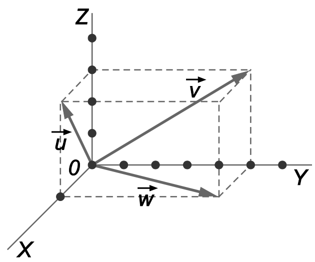
a) $\vec{u} = (0,2,-2)$, $\vec{v} = (-3,0,-1)$, $\vec{w} = (3,-8,0)$

b) $\vec{u} = (2,0,0)$, $\vec{v} = (-2,-12,24)$, $\vec{w} = (10,-22,-36)$

a) $V_P = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 0 \end{matrix} \right\| = |-48 - 6| = 54 \text{ u}^3.$

b) $V_P = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -12 & 24 \\ 10 & -22 & -36 \end{matrix} \right\| = |1920| = 1920 \text{ u}^3.$

98. Dada la figura:



a) Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

a) $\vec{u} = (1,0,3)$, $\vec{v} = (0,5,3)$ y $\vec{w} = (1,5,0)$

b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 - 15 = -30 \Rightarrow V = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = |-30| = 30 \text{ u}^3.$

99. Calcula los valores de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = 8\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$ y $\vec{w} = -a\vec{i} + 3\vec{j}$ valga 173 unidades cúbicas.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 1 & a & 5 \\ 8 & 1 & -9 \\ -a & 3 & 0 \end{vmatrix} = 120 + 9a^2 + 5a + 27 = 9a^2 + 5a + 147 = 173 \Rightarrow 9a^2 + 5a - 26 = 0 \Rightarrow a = \frac{-5 \pm 31}{18} \Rightarrow a = \frac{13}{9}, a = -2$$

Síntesis

100. Se considera el vector de coordenadas $\vec{u} = (-1,1,1)$.

a) Escribe, con ayuda de los parámetros necesarios, la expresión de todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$.

b) Descompón el vector $\vec{a} = (-3 - 0,3)$ como suma de dos vectores, uno de los cuales sea paralelo a $\vec{u}$ y el otro ortogonal a $\vec{u}$.

a) Los vectores serán de la forma (α,λ,μ) pero debe verificarse que su producto escalar sea nulo:

$$(-1,1,1)\cdot(\alpha,\lambda,\mu) = 0 \Rightarrow -\alpha + \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \alpha = \lambda + \mu$$

Los vectores pedidos son de la forma $(\lambda + \mu,\lambda,\mu)$.

b) $$(-3,0,3) = (-x,x,x) + (\lambda + \mu,\lambda,\mu) \Rightarrow \begin{cases} -x + \lambda + \mu = -3 \\ x + \lambda = 0 \\ x + \mu = 3 \end{cases} \Rightarrow -x - x + 3 - x = -3$$

$$\Rightarrow x = 2, \lambda = -2, \mu = 1 \Rightarrow (-3,0,3) = (-2,2,2) + (-1,-2,1)$$

101. Dados los vectores $\vec{u} = (-2,1,-3)$, $\vec{v} = (2,-2,-1)$ y $\vec{w} = (-1,2,0)$:

a) Calcula el producto escalar $2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$.

b) Calcula el producto vectorial $2\vec{u} \times 2\vec{w}$.

c) Calcula el producto mixto $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$.

a) $2\vec{u}\cdot 3\vec{v} = (-4,2,-6)\cdot(6,-6,-3) = -24 - 12 + 18 = -18$

b) $$2\vec{u} \times 2\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & -6 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{k}$$

c) $$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

102. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(3,-2,3)$ y $\vec{w}=(-1,1,3)$, calcula:

a) El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

c) La medida de la altura del paralelepípedo sobre la cara determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=(-3,-3,1)$ $\quad A=|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{19}\simeq 4{,}36\ \text{u}^2$.

b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 3\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=3$ $\quad V_P=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=3\ \text{u}^3$.

c) $h=\dfrac{V_P}{A}=\dfrac{3}{\sqrt{19}}$ u.

103. Calcula:

a) El valor de x para que los vectores $\vec{u}=(1,x,0)$ y $\vec{v}=(x+3,2,-8)$ sean ortogonales y, para ese valor hallado, calcula el área del paralelogramo determinado por los dos vectores.

b) Todos los valores de y que hacen que los vectores ortogonales del apartado anterior junto con el vector $\vec{w}=(y,-1,y+1)$ determinen un paralelepípedo de 20 unidades cúbicas de volumen.

a) Dos vectores no nulos son perpendiculares cuando su producto escalar es nulo. Entonces:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow x+3+2x=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow\vec{u}=(1,-1,0),\vec{v}=(2,2,-8)$

$$A=|\vec{u}\times\vec{v}|=\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -8\end{vmatrix}\right|=|8\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}|=\sqrt{64+64+16}=12\ \text{u}^2$$

b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -8\\ y & -1 & y+1\end{vmatrix}=12y-4\Rightarrow|12y-4|=20\Rightarrow\begin{cases}12y-4=20 \text{ si } y\geq\frac{1}{3}\Rightarrow y=2\\ 4-12y=20 \text{ si } y<\frac{1}{3}\Rightarrow y=-\frac{4}{3}\end{cases}$

CUESTIONES

104. Se consideran $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de V^3 no nulos, no iguales y no opuestos. Demuestra que se verifica la siguiente propiedad.

$|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$ son perpendiculares.

$\Rightarrow)$ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}-|\vec{v}|^2=0\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\perp\vec{u}-\vec{v}$

$\Leftarrow)$ Como $\vec{u}+\vec{v}\perp\vec{u}-\vec{v}$ entonces $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=0$. Por tanto:

$$|\vec{u}|^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}-|\vec{v}|^2=0\Rightarrow|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2\Rightarrow|\vec{u}|=|\vec{v}|$$

105. Se consideran $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de V^3 no nulos, no iguales y no opuestos. Demuestra que se verifica la siguiente propiedad.

$$|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}-\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares.}$$

Por el ejercicio 104 sabemos que dos vectores tienen el mismo módulo si y solo si su suma y su diferencia son perpendiculares.

Considerando los vectores $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{b}=\vec{u}-\vec{v}$, entonces, $|\vec{a}|=|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b}$.

Por tanto:

$$|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}-\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}+\vec{v}+\vec{u}-\vec{v} \perp \vec{u}+\vec{v}-(\vec{u}-\vec{v}) \Leftrightarrow 2\vec{u} \perp 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

106. Dado el vector $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$:

a) Demuestra que $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ es un vector unitario.

b) Calcula los cosenos de los ángulos que forma $\vec{u}$ con los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ de la base canónica.

a) $\left|\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| = \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1$

b) $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\quad \vec{i}=(1,0,0)$ $\quad \vec{j}=(0,1,0)$ $\quad \vec{k}=(0,0,1)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{i}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{|\vec{u}||\vec{i}|} = \frac{u_1}{|\vec{u}|\cdot 1} = \frac{u_1}{|\vec{u}|}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{j}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{|\vec{u}||\vec{j}|} = \frac{u_2}{|\vec{u}|\cdot 1} = \frac{u_2}{|\vec{u}|}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{k}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{|\vec{u}||\vec{k}|} = \frac{u_3}{|\vec{u}|\cdot 1} = \frac{u_3}{|\vec{u}|}$$

107. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores no nulos de V^3 tales que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, entonces $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ también son linealmente dependientes.

b) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores no nulos de V^3 tales que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes y $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ también son linealmente independientes.

c) $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

d) Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ y $\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$

e) Si $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{u}\times\vec{w}$ y $\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$

a) Verdadero.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes $\Rightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v} + 0\vec{w} \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Falso.

Por ejemplo, $\vec{u} = (1,0,0), \vec{v} = (0,1,0), \vec{w} = (1,1,0)$

c) Falso.

Por ejemplo, si $\vec{u} = (1,0,0), \vec{v} = (0,1,0)$, entonces, $\vec{u}+\vec{v} = (1,1,0), |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{2}, |\vec{u}| + |\vec{v}| = 2$

d) Falso.

Por ejemplo, si $\vec{u} = (1,1,0), \vec{v} = (1,0,0), \vec{w} = (0,1,0)$, entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = 1$ y $\vec{v} \neq \vec{w}$

e) Falso.

Por ejemplo, si $\vec{u} = (1,0,0), \vec{v} = (0,1,0), \vec{w} = (1,1,0)$, entonces:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}, \quad \vec{u}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}, \quad \vec{v} \neq \vec{w}$$

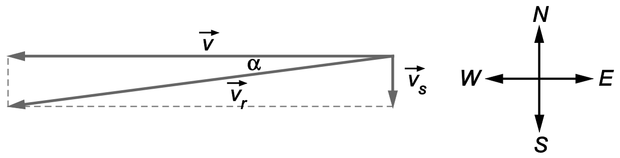
PROBLEMAS

108. Un avión viaja en dirección Este–Oeste partiendo del punto *A* y con una velocidad de 800 km/h.

a) Calcula la velocidad verdadera si en ese momento hay un viento de 100 km/h que sopla en dirección Norte–Sur. Determina dicha velocidad verdadera dando su módulo y el ángulo que forma con la dirección Este–Oeste.

b) Calcula la velocidad verdadera si en ese momento hay un viento de 100 km/h que sopla del Noreste al Sudoeste (La dirección del viento forma 45º con el Oeste y 45º con el Sur)

a)



La velocidad del avión es $v = 800$ km/h.

La velocidad del viento es $v_s = 100$ km/h.

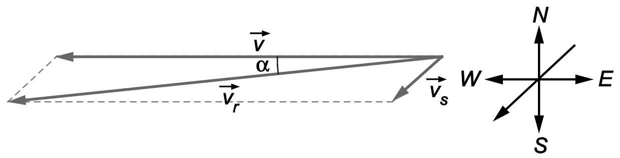
El módulo de la velocidad verdadera será:

$$v_r = \sqrt{800^2 + 100^2} = 100\sqrt{65} = 806{,}225 \text{ km/h}$$

La velocidad verdadera formará un ángulo α con la dirección Este–Oeste:

$$\cos\alpha = \frac{800}{100\sqrt{65}} = \frac{8}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right) \simeq 7^{\circ}8'$$

b)



La velocidad del avión es $v = 800$ km/h.

La velocidad del viento es $v_s = 100$ km/h.

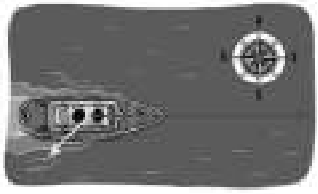
El módulo de la velocidad verdadera será:

$$v_r^2 = 800^2 + 100^2 - 2 \cdot 800 \cdot 100 \cdot \cos 135^{\circ} = 763137{,}085 \Rightarrow v_r = 873{,}577 \text{ km/h}$$

La velocidad verdadera formará un ángulo α con la dirección Este–Oeste:

$$\frac{100}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{873{,}577}{\operatorname{sen}135^{\circ}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0{,}081 \Rightarrow \alpha = 4^{\circ}39'$$

109. Un barco se dirige hacia el este con una velocidad propia de 12 km/h en un momento en que la corriente es de 3 km/h en dirección al SW. Encuentra la velocidad verdadera del barco.



La velocidad propia del barco es $v = 12$ km/h.

La velocidad de la corriente es $v = 3$ km/h.

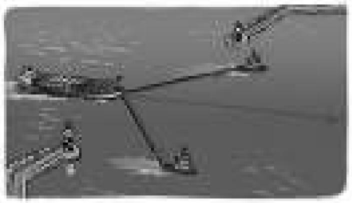
El módulo de la velocidad verdadera será:

$$v_r^2 = 12^2 + 3^2 - 2\cdot 12\cdot 3\cdot \cos 45^{\circ} = 102{,}088 \Rightarrow v_r = 10{,}104 \text{ km/h}$$

La velocidad verdadera formará un ángulo α con la dirección W–E:

$$\frac{3}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{10{,}104}{\operatorname{sen}45^{\circ}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0{,}21 \Rightarrow \alpha = 12^{\circ}7'$$

110. Dos remolcadores arrastran hacia el puerto un petrolero según el esquema de la figura. Si cada uno tira del barco remolcado con una fuerza de 10^5 N, calcula el ángulo que forman los dos cables entre sí sabiendo que la resultante tiene un valor de $1{,}5{\cdot}10^5$ N.



Llamando α al ángulo formado por la resultante y uno de los dos remolcadores, y utilizando el teorema del coseno, se obtiene:

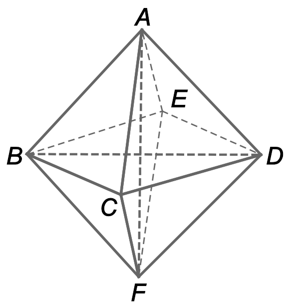
$$10^{10} = 10^{10} + 1{,}5\cdot 10^{10} - 2\cdot 10^5 \cdot 1{,}5\cdot 10^5 \cdot \cos\alpha$$

Operando resulta:

$$\cos\alpha = 0{,}75 \Rightarrow \alpha = 41^{\circ}24'$$

Multiplicando por 2 se obtiene el ángulo entre los dos remolcadores: $82^{\circ}48'$

111. Se considera el octaedro regular *ABCDEF* de la figura y la base de V^3 formada por $\left\{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}\right\}$



a) Indica los ángulos que forman los vectores de la base.

b) Escribe los vectores $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AF}$ en función de los vectores de la base.

c) Calculando el producto escalar $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BD}$ demuestra que las rectas *AF* y *BD* son perpendiculares. Recuerda que un octaedro regular está formado por ocho triángulos equiláteros.

a) $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}}\right) = 90^{\circ}$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) = 60^{\circ}$ $\quad\left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA}}\right) = 60^{\circ}$

b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{BA}$

c) Suponiendo que los lados del octaedro miden todos *a* unidades de longitud.

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}\right) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE} =$$

$$= a^2 + 0 + 0 + a^2 - 2a^2\cos 60 - 2a^2\cos 60^{\circ} = 2a^2 - 4a^2\cdot\frac{1}{2} = 2a^2 - 2a^2 = 0$$

PARA PROFUNDIZAR

112. Las coordenadas del vector $\vec{a}$ respecto de la base de V^3 $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son $\vec{a}=(8,4,1)$.Halla las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base canónica si $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ y $\vec{w}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

$$\vec{a}=8\vec{u}+4\vec{v}+\vec{w}=8\left(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right)+4\left(-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\right)+\left(2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)=$$

$$=16\vec{i}+24\vec{j}-8\vec{k}-4\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}+2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}=14\vec{i}+34\vec{j}-11\vec{k}$$

113. Las coordenadas del vector $\vec{a}$ respecto de la base de V^3 $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\vec{u}_3\}$ son $\vec{a}=(10,-8,3)$. Halla las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ si $\vec{v}_1=\vec{u}_1-3\vec{u}_2+2\vec{u}_3$, $\vec{v}_2=2\vec{u}_1+\vec{u}_2-2\vec{u}_3$ y $\vec{v}_3=\vec{u}_1-2\vec{u}_2+3\vec{u}_3$.

Se supone que $\vec{a}=10\vec{u}_1-8\vec{u}_2+3\vec{u}_3=x\vec{v}_1+y\vec{v}_2+z\vec{v}_3$.

Entonces:

$$10\vec{u}_1-8\vec{u}_2+3\vec{u}_3=x\vec{v}_1+y\vec{v}_2+z\vec{v}_3=x\left(\vec{u}_1-3\vec{u}_2+2\vec{u}_3\right)+y\left(2\vec{u}_1+\vec{u}_2-2\vec{u}_3\right)+z\left(\vec{u}_1-2\vec{u}_2+3\vec{u}_3\right)=$$

$$=\left(x+2y+z\right)\vec{u}_1+\left(-3x+y-2z\right)\vec{u}_2+\left(2x-2y+3z\right)\vec{u}_3$$

Por tanto, se resuelve el sistema:

$$\begin{cases}x+2y+z=10\\-3x+y-2z=-8\\2x-2y+3z=3\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&10\\-3&1&-2&-8\\2&-2&3&3\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to-2F_1+F_3]{F_2\to3F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&10\\0&7&1&22\\0&-6&1&-17\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to6F_2+7F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&10\\0&7&1&22\\0&0&13&13\end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado con solución única:

$$x=3,y=3,z=1.$$

Por tanto:

$$\vec{a}=3\vec{v}_1+3\vec{v}_2+\vec{v}_3.$$

114. a) Demuestra que:

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$$

b) Calcula los módulos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que son iguales y que sus productos escalar y vectorial valen:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-208 \qquad \vec{u}\times\vec{v}=(-85,-6,10)$$

a) Sea α el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces:

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+|\vec{u}\times\vec{v}|^2=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha)^2+(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}\alpha)^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\cos^2\alpha+|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\operatorname{sen}^2\alpha=$$

$$=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\left(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\right)=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$$

b) $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\Rightarrow|\vec{u}|^2\cdot|\vec{u}|^2=(-208)^2+\left(\sqrt{(-85)^2+(-6)^2+10^2}\right)^2=50\,625\Rightarrow$

$$\Rightarrow|\vec{u}|^4=50\,625\Rightarrow|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt[4]{50\,625}=15$$

115. Se consideran los vectores de V^3:

$$\vec{u}=(u_1,0,0) \qquad \vec{v}=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,0) \qquad \vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$$

a) Calcula $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$.

b) Calcula $(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.

c) Calcula el valor de $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ si $\vec{u}=(1,-2,3)$, $\vec{v}=(-1,4,-2)$ y $\vec{w}=(-3,3,-1)$.

a) $\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\v_1&v_2&0\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=v_2w_3\vec{i}-v_1w_3\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k}$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&0&0\\v_2w_3&-v_1w_3&v_1w_2-v_2w_1\end{vmatrix}=(-u_1v_1w_2+u_1v_2w_1)\vec{j}-u_1v_1w_3\vec{k}$$

b) $(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}=u_1w_1\vec{v}-u_1v_1\vec{w}=u_1w_1\left(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}\right)-u_1v_1\left(w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}\right)=$

$$=(u_1w_1v_1-u_1v_1w_1)\vec{i}+(u_1w_1v_2-u_1v_1w_2)\vec{j}-u_1v_1w_3\vec{k}=(u_1w_1v_2-u_1v_1w_2)\vec{j}-u_1v_1w_3\vec{k}$$

Se deduce que $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$.

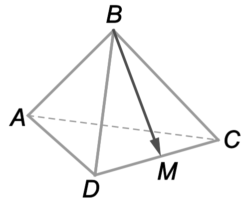
c) $\vec{u}=(1,-2,3)$, $\vec{v}=(-1,4,-2)$ y $\vec{w}=(-3,3,-1)$.

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}=(-3-6-3)\vec{v}-(-1-8-6)\vec{w}=-12(-1,4,-2)+15(-3,3,-1)=(-33,-3,9)$$

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. En el tetraedro *ABCD* de la figura se consideran los vectores $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ y $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ que forman una base del espacio V^3. Escribe, en función de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ el vector $\overrightarrow{BM}$ donde *M* es el punto medio del segmento de extremos *D* y *C*.



$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{v}-\vec{w}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\vec{w}+\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{w})=\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$$

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}=-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$$

2. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(2,-1,-2)$ y $\vec{w}=(0,-3,3)$:

a) Prueba que son linealmente independientes. ¿Forman base de V^3?

b) Escribe $\vec{a}=(8,7,-18)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

a) Tres vectores son linealmente independientes si el determinante formado por ellos no es nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}=-3-6+6=-3\neq 0$$

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sí forman una base de V^3.

b) $\vec{a}=\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(2,-1,-2)+\lambda_3(0,-3,3)\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=8\\-\lambda_1-\lambda_2-3\lambda_3=7\\-2\lambda_2+3\lambda_3=-18\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & -18 \end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_1+F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & 3 & -18 \end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to 2F_2+F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado con solución única $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=-4$.

Por tanto:

$$\vec{a}=2\vec{u}+3\vec{v}-4\vec{w}.$$

Las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de la base $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ serán $(2,3,-4)$.

3. **Dados los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(2,-3,-1)$ y $\vec{w}=(6,-7,-1)$.**

a) Prueba que son linealmente dependientes. ¿Son base de V^3?

b) Escribe $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) Tres vectores son linealmente dependientes si el determinante formado por ellos es nulo:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 6 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 3+6-7-2=0$. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no forman una base de V^3.

b) $(6,-7,-1)=\lambda_1(1,-1,0)+\lambda_2(2,-3,-1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=6 \\ -\lambda_1-3\lambda_2=-7 \\ -\lambda_2=-1 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado con solución única: $\lambda_1=4, \lambda_2=1$

Por tanto: $\vec{w}=4\vec{u}+\vec{v}$.

4. **Calcula los valores de *a* para que los vectores $\vec{u}=(a,a,5)$ y $\vec{v}=(a+7,1,a)$ sean perpendiculares.**

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es nulo:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=a(a+7)+a+5a=a^2+7a+6a=a^2+13a=a(a+13)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow a(a+13)=0 \Rightarrow a=0, a=-13$

5. **Dados los vectores $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{v}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ y $\vec{w}=3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$:**

a) Calcula el producto escalar $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(3\vec{v}-\vec{w})$.

b) Calcula el producto vectorial $3\vec{u}\times(-2w)$.

c) Calcula el producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

$\vec{u}=(-2,1,-3)$ $\quad$ $\vec{v}=(-2,2,2)$ $\quad$ $\vec{w}=(3,4,-5)$

a) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(3\vec{v}-\vec{w})=(-10,8,0)\cdot(-9,2,11)=90+16=106$

b) $3\vec{u}\times(-2\vec{w})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & -9 \\ -6 & -8 & 10 \end{vmatrix}=-42i+114\vec{j}+66\vec{k}$

c) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}=20+24+6+18+16-10=74$

6. Dados los vectores $\vec{u} = 4\vec{i} - 5\vec{k}$, $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ y $\vec{w} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, calcula:

a) La medida de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

b) El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$\vec{u} = (4,0,-5)$ $\qquad \vec{v} = (-4,3,0)$ $\qquad \vec{w} = (-2,-3,5)$

a) $\left|\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}\right| = \dfrac{|\vec{u}\cdot v|}{|\vec{v}|} = \dfrac{16}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{16}{5}$

b) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 20\vec{j} + 12\vec{k}$

$A = |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{15^2 + 20^2 + 12^2} = \sqrt{769}\ \text{u}^2$

c) $V_{\text{P}} = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = \left\|\begin{matrix} 4 & 0 & -5 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 5 \end{matrix}\right\| = |60-60-30| = 30\ \text{u}^3.$

7. Halla las coordenadas de todos los vectores paralelos a $\vec{u} = (6,-6,-7)$ y que tengan módulo igual a 33 unidades de longitud.

Todos los vectores paralelos a $\vec{u}$ son de la forma $(6\lambda,-6\lambda,-7\lambda)$.

Obligando a que su módulo valga 33 se tiene:

$$\sqrt{36\lambda^2 + 36\lambda^2 + 49\lambda^2} = 33 \Rightarrow \sqrt{121\lambda^2} = 33 \Rightarrow \lambda^2 = 9$$

Si $\lambda = 3$, entonces $(18,-18,-21)$.

Si $\lambda = -3$, entonces $(-18,18,21)$.

8. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-12,12)$ y $\vec{v}=(-8,9,-12)$, calcula:

a) El ángulo que forman.

b) Un vector unitario y perpendicular a ambos.

c) Las coordenadas del vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

a) $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{-8-108-144}{\sqrt{1+144+144}\sqrt{64+81+144}}=\dfrac{-260}{289}=-0{,}8997\Rightarrow\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=154^{\circ}7'$

b) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -12 & 12\\ -8 & 9 & -12\end{vmatrix}=36\vec{i}-84\vec{j}-87\vec{k}$, es decir, todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ son de la forma:

$(36\lambda,-84\lambda,-87\lambda)$. Como el módulo debe ser 1, entonces: $\sqrt{36^2\lambda^2+84^2\lambda^2+87^2\lambda^2}=\sqrt{15921\lambda^2}=1$. Luego:

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{15921}} \text{ o } \lambda=-\frac{1}{\sqrt{15921}}$$

Por tanto, existen dos vectores: $\left(\dfrac{36}{\sqrt{15921}},-\dfrac{84}{\sqrt{15921}},-\dfrac{87}{\sqrt{15921}}\right)$ y $\left(-\dfrac{36}{\sqrt{15921}},\dfrac{84}{\sqrt{15921}},\dfrac{87}{\sqrt{15921}}\right)$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-8-108-144=-260<0$

Por ser $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}$ de la misma dirección y diferente sentido que $\vec{v}$, será de la forma:

$$\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}=(-8\lambda,9\lambda,-12\lambda) \text{ para algún } \lambda \text{ negativo.}$$

Obligando a que el módulo de $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}$ valga $\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\dfrac{260}{\sqrt{64+81+144}}=\dfrac{260}{17}$, se obtiene el valor de λ:

$\left|\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}\right|=\sqrt{64\lambda^2+81\lambda^2+144\lambda^2}=\dfrac{260}{17}\Rightarrow 17\lambda=-\dfrac{260}{17}\Rightarrow\lambda=-\dfrac{260}{289}$

El vector proyección buscado es $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}}=\left(\dfrac{2080}{289},-\dfrac{2340}{289},\dfrac{3120}{289}\right)$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores no nulos:

A. El vector $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ se puede escribir como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

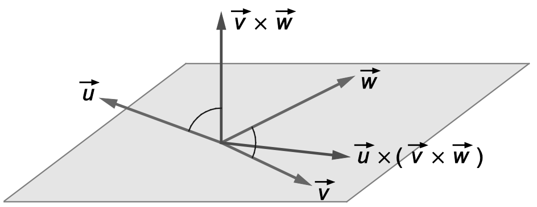
B. El vector $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ se puede escribir como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{w}$.

C. El vector $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ se puede escribir como combinación lineal de $\vec{v}$ y de $\vec{w}$.

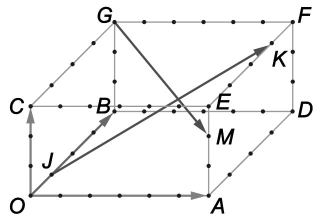
D. Nada de lo anterior es verdad.

La respuesta correcta es la C porque el vector $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ es perpendicular a $\vec{v}\times\vec{w}$ que, a su vez, es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ a la vez.

Por tanto, el vector $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.



2. En el paralelepípedo de la figura el producto escalar $\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{JK}$ vale:



A. 0 **B.** 25 **C.** 61 **D.** 72

La respuesta correcta es B.

$$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EK}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=$$

$$=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=6^2-\frac{1}{2}\cdot4^2-\frac{1}{3}\cdot3^2=36-8-3=25$$

3. Se sabe que $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}$ y que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son nulos:

A. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

B. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares.

C. Los vectores $\vec{u}\times\vec{v}$ y $-\vec{v}\times\vec{u}$ tienen diferente sentido.

D. Los vectores $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{v}\times\vec{u}$ tienen el mismo sentido.

La respuesta correcta es B. porque la dirección de $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular a los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. En particular es perpendicular al vector $\vec{u}$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se consideran los vectores $\vec{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

A. Los vectores tienen el mismo módulo.

B. Son ortogonales.

C. Forman un ángulo de 60º.

D. Llevan la misma dirección.

Las respuestas correctas son A. y C.

$|\vec{u}|=\sqrt{\frac{1}{2}+1+\frac{2}{4}}=\sqrt{2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{\frac{2}{4}+1+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, es decir, los vectores tienen el mismo módulo.

$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\arccos\frac{1}{2}=60^\circ$, es decir, forman un ángulo de 60º.

5. Sabiendo que $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0$, se puede afirmar con seguridad que:

A. Por lo menos uno de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tiene módulo cero.
B. Los vectores son linealmente dependientes.
C. El vector $\vec{w}$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
D. Por lo menos dos de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ llevan la misma dirección

La respuesta correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

6. Se quiere calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Para ello se dan los siguientes datos:

1. $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{314}$ **2.** $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\sqrt{154}$ **3.** $\left|\vec{v}\right|=5\left|\vec{u}\right|$ **4.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=40$

A. Puede eliminarse el dato 1.
B. No puede eliminarse el dato 2.
C. Pueden eliminarse los datos 1 y 2 a la vez.
D. Todos los datos son necesarios

La respuesta correcta es A., es decir, se puede eliminar el dato 1.primer dato:

$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|=\sqrt{154},\ \left|\vec{v}\right|=5\left|\vec{u}\right|,\ \vec{u}\cdot\vec{v}=40$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2}{2}\Rightarrow 40=\frac{26\left|\vec{u}\right|^2-154}{2}\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{9}=3,\left|\vec{v}\right|=5\cdot 3=15$$