11 Rectas y planos en el espacio

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 3. Ejercicios resueltos.

4. Indica qué tipo de elemento geométrico (curva, recta, plano o superficie) representan, en cada caso, las siguientes ecuaciones. Indica su dimensión y calcula las coordenadas de uno de sus puntos.

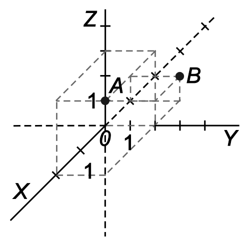
a) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 2 + s \\ y = s - 1 \\ z = s \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = t + s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$

a) La dimensión es 1 y no es lineal, por lo que es una curva. Si $t = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$.

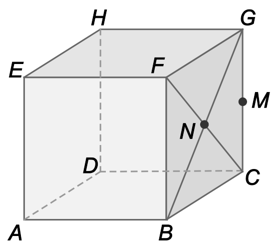
b) La dimensión es 1 y es lineal, por lo que es una recta. Si $s = 0 \Rightarrow P(2,-1,0)$.

c) La dimensión es 2 y es lineal, por lo que es un plano. Si $t = 1, s = -1 \Rightarrow Q(0,1,-1)$.

5. Representa los puntos del espacio de tres dimensiones $A(2,2,3)$ y $B(-1,2,1)$ tomando $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ como referencia.



6. En el cubo de la figura se toma la referencia $\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\}$.



Calcula las coordenadas de los puntos *F*, *G*, *C*, *M* y *N*.

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow F(1,0,1)$$
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow G(1,1,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow C(1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow M\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = AB + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow N\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

7 y 8. Ejercicios resueltos.

9. Las coordenadas de un vector son $(4,0,-2)$ y las de su origen $(-3,2,-1)$. Calcula las coordenadas de su extremo.

$\overrightarrow{AB}=(4,0,-2)$, $A(-3,2,-1)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$. Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, se tiene que:

$$\begin{cases} b_1+3=4 \\ b_2-2=0 \\ b_3+1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=1 \\ b_2=2 \\ b_3=-3 \end{cases} \Rightarrow B(1,2,,-3)$$

10. Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(2,2,-1)$, $B(-1,3,2)$ y $C(0,-2,4)$.

Aplicando la fórmula para el cálculo de las coordenadas del punto medio de un segmento:

M punto medio de $AB \Rightarrow M\left(\frac{2-1}{2},\frac{2+3}{2},\frac{-1+2}{2}\right)\Rightarrow M\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$

N punto medio de $AC \Rightarrow N\left(\frac{2+0}{2},\frac{2-2}{2},\frac{-1+4}{2}\right)\Rightarrow N\left(1,0,\frac{3}{2}\right)$

P punto medio de $BC \Rightarrow P\left(\frac{-1+0}{2},\frac{3-2}{2},\frac{2+4}{2}\right)\Rightarrow P\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\right)$

11. Dado el segmento $\overrightarrow{AB}$, donde $A(-5,4,-2)$ y $B(-2,1,-2)$:

a) Calcula las coordenadas del punto M tal que $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

b) Calcula las coordenadas del punto N tal que $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) $M(m_1,m_2,m_3), \overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow(m_1+5,m_2-4,m_3+2)=\frac{4}{3}(3,-3,0)=(4,-4,0)\Rightarrow$

$m_1+5=4\Rightarrow n_1=-1; m_2-4=-4; n_2=0; m_3+2=0\Rightarrow m_3=-2$. Por tanto, $M(-1,0,-2)$.

b) $N(n_1,n_2,n_3), \overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow(n_1+5,n_2-4,n_3+2)=\frac{2}{3}(3,-3,0)=(2,-2,0)\Rightarrow$

$n_1+5=2\Rightarrow n_1=-3; n_2-4=-2; n_2=2; n_3+2=0\Rightarrow n_3=-2$. Por tanto, $N(-3,2,-2)$.

12. Ejercicio resuelto.

13. Comprueba si los puntos $A(-3,1,3)$, $B(3,1,5)$ y $C(1,-1,2)$ pertenecen o no a la recta que pasa por $P(-1,1,-1)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(-2,0,-3)$. Calcula dos puntos más de esta recta.

Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y tiene como vector director $\vec{v}$: $r:\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=1 \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$

$$A(-3,1,3)\Rightarrow\begin{cases} -3=-1-2\lambda \\ 1=1 \\ 3=-1-3\lambda \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \lambda=1 \\ 1=1 \\ \lambda=-\dfrac{4}{3} \end{cases}\Rightarrow A\notin r$$

$$B(3,1,5)\Rightarrow\begin{cases} 3=-1-2\lambda \\ 1=1 \\ 5=-1-3\lambda \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \lambda=-2 \\ 1=1 \\ \lambda=-2 \end{cases}\Rightarrow B\in r$$

$$C(1,-1,2)\Rightarrow\begin{cases} 1=-1-2\lambda \\ -1=1 \\ 2=-1-3\lambda \end{cases}\Rightarrow C\notin r$$

Dos puntos de esta recta se obtienen sustituyendo λ por dos valores distintos:

$\lambda=0\Rightarrow P_1(-1,1,-1)$ $\qquad$ $\lambda=1\Rightarrow P_2(-3,1,-4)$

14. Considera la recta que pasa por el punto $S(1,-2,5)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v}=(-2,2,0)$.

a) Calcula su ecuación vectorial.

b) Halla sus ecuaciones paramétricas.

a) Ecuación vectorial: $\vec{p}=(1,-2,5)+\lambda(-2,2,0)$

b) Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=5 \end{cases}$

15 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Calcula, en cada caso, unas ecuaciones implícitas de la recta que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(-1,1,3)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}=(-1,-2,4)$.

b) Pasa por el punto $A(-1,-2,0)$ y es paralela al segmento de extremos $B(0,-3,1)$ y $C(1,1,0)$.

c) Pasa por el punto $A(2,-2,-3)$ y es paralela al eje Y.

a) $r:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=3+4\lambda \end{cases}\Rightarrow r:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{4}\Rightarrow\begin{cases} -2x-2=-y+1 \\ 4x+4=-z+3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 4x+z+1=0 \end{cases}$

b) $r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-2+4\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}\Rightarrow r:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{-1}\Rightarrow\begin{cases} 4x+4=y+2 \\ -x-1=z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4x-y+2=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$

c) $r:\begin{cases} x=2 \\ y=-2+\lambda \\ z=-3 \end{cases}\Rightarrow r:\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+3}{0}\Rightarrow\begin{cases} x=2 \\ z=-3 \end{cases}$

19. Halla unas ecuaciones implícitas para cada una de las rectas sobre las que descansan los lados del triángulo de vértices $A(1,-1,1)$, $B(0,1,2)$ y $C(1,2,-3)$.

$$AB:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}\Rightarrow AB:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}\Rightarrow\begin{cases}2x-2=-y-1\\ x-1=-z+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y-1=0\\ x+z-2=0\end{cases}$$

$$AC:\begin{cases}x=1\\ y=-1+3\lambda\\ z=1-4\lambda\end{cases}\Rightarrow AC:\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-4}\Rightarrow\begin{cases}3x-3=0\\ -4y-4=3z-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\\ 4y+3z+1=0\end{cases}$$

$$BC:\begin{cases}x=\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=2-5\lambda\end{cases}\Rightarrow BC:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-5}\Rightarrow\begin{cases}x=y-1\\ -5x=z-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+1=0\\ 5x+z-2=0\end{cases}$$

20. Para cada una de las siguientes rectas, calcula dos puntos de ella y halla unas ecuaciones paramétricas:

a) $r:\begin{cases}x+y=0\\ 2x-y+z=0\end{cases}$

b) $s:\begin{cases}3x-2y-z=0\\ x+y+z-3=0\end{cases}$

a) $r:\begin{cases}x+y=0\\ 2x-y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-3\lambda\end{cases}$. Dos puntos de *r*: $A(0,0,0),B(1,-1,-3)$.

b) $s:\begin{cases}3x-2y-z=0\\ x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda\\ y=4\lambda-3\\ z=6-5\lambda\end{cases}$. Dos puntos de *s*: $A(1,1,1),B(0,-3,6)$.

21. Dada la recta $r:\begin{cases}x=y\\ x+z=0\end{cases}$:

a) Calcula dos puntos de ella y los simétricos de ellos respecto del origen de coordenadas.

b) Calcula la recta simétrica de *r* respecto del origen de coordenadas.

a) Dos puntos de la recta r son: $O(0,0,0)$ y $A(1,1,-1)$.

El simétrico de *O* respecto de *O* es él mismo. Sea $A'(a,b,c)$ el simétrico de *A* respecto de *O*:

$$\frac{1+a}{2}=0;\frac{1+b}{2}=0;\frac{-1+c}{2}=0\Rightarrow A'(-1,-1,1)$$

b) La recta simétrica de *r* respecto de *O* es ella misma porque pasa por *O*.

22 a 24. Ejercicios resueltos.

25. *Comprueba si los puntos $A(3,-2,-2)$, $B(1,0,1)$ y $C(2,1,-1)$ pertenecen o no al plano de ecuaciones paramétricas:

$$\pi:\begin{cases} x = 1-\lambda-\mu \\ y = \lambda-\mu \\ z = 2-\lambda-\mu \end{cases}$$

$A(3,-2,-2) \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda-\mu = 3 \\ \lambda-\mu = -2 \\ 2-\lambda-\mu = -2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1, \mu = 3$. Compatible $\Rightarrow A \in \pi$.

$B(1,0,1) \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda-\mu = 1 \\ \lambda-\mu = 0 \\ 2-\lambda-\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. Compatible $\Rightarrow B \in \pi$.

$C(2,1,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda-\mu = 2 \\ \lambda-\mu = 1 \\ 2-\lambda-\mu = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Sumando las dos primeras ecuaciones se obtiene $1 = 3$. Incompatible $\Rightarrow C \notin \pi$.

26. Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por $A(2,2,2)$ y tiene como vectores de dirección $\vec{u} = (-3,-2,1)$ y $\overrightarrow{AB}$, donde $B(1,2,-1)$.

$A(2,2,2)$, $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-3)$ y $\vec{u} = (-3,-2,1)$

Ecuaciones paramétricas del plano:

$$\begin{cases} x = 2-3\lambda-\mu \\ y = 2-2\lambda \\ z = 2+\lambda-3\mu \end{cases}$$

Ecuación implícita del plano:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & x-2 \\ 0 & -2 & y-2 \\ -3 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2z-4+9y-18-6x+12+y-2 = 0 \Rightarrow \pi: 3x-5y-z+6 = 0$$

27. Calcula unas ecuaciones paramétricas del plano de ecuación implícita $x+y+z=3$ e indica uno de sus puntos y dos vectores de dirección independientes.

Haciendo $x = \lambda$, $y = \mu$: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3-\lambda-\mu \end{cases}$

Un punto sería el $A(0,0,3)$ y dos vectores de dirección independientes $\vec{u} = (1,0,-1)$ y $\vec{v} = (0,1,-1)$.

28. Comprueba que las siguientes ecuaciones paramétricas representan el mismo plano. Para ello obtén tres puntos no alineados del primero y comprueba que los puntos obtenidos también pertenecen al segundo plano.

$$\pi:\begin{cases}x=2+\lambda+\mu\\ y=-\mu\\ z=2-\lambda+\mu\end{cases}\qquad \pi':\begin{cases}x=s\\ y=t-s\\ z=4-2t+s\end{cases}$$

Tres puntos no alineados del primero:

$$\lambda=0,\ \mu=0\Rightarrow A(2,0,2)\qquad \lambda=0,\ \mu=1\Rightarrow B(3,-1,3)\qquad \lambda=1,\ \mu=0\Rightarrow C(3,0,1)$$

Los puntos obtenidos pertenecen al segundo plano:

$$A(2,0,2)\Rightarrow\begin{cases}s=2\\ t-s=0\\ 4-2t+s=2\end{cases}\Rightarrow t=2, s=2\text{. Compatible }\Rightarrow A\in\pi'.$$

$$B(3,-1,3)\Rightarrow\begin{cases}s=3\\ t-s=-1\\ 4-2t+s=3\end{cases}\Rightarrow t=2, s=3\text{. Compatible }\Rightarrow B\in\pi'.$$

$$C(3,0,1)\Rightarrow\begin{cases}s=3\\ t-s=0\\ 4-2t+s=1\end{cases}\Rightarrow t=3, s=3\text{. Compatible }\Rightarrow C\in\pi'.$$

29 a 32. Ejercicios resueltos.

33. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2,-2,1)$, $B(1,-2,-1)$ y $C(0,-1,2)$.

$A(2,-2,1)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,0,-2)$ y $\overrightarrow{AC}=(-2,1,1)$.

$$\begin{vmatrix}-1 & -2 & x-2\\ 0 & 1 & y+2\\ -2 & 1 & z-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -z+1+4y+8+2x-4+y+2=0\Rightarrow\pi: 2x+5y-z+7=0$$

34. Halla las ecuaciones de los siguientes planos:

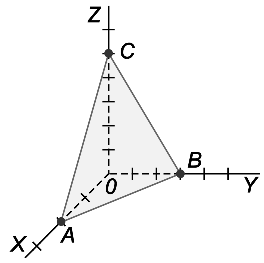
a) Paralelo a XY y que pasa por $A(-1,2,-2)$.

b) Paralelo a XZ y que pasa por $B(3,-2,0)$.

c) Paralelo a YZ y que pasa por $C(0,-2,-2)$.

a) $z=-2$ **b)** $y=-2$ **c)** $x=0$

35. En la figura aparece un tetraedro de vértices los puntos *O*, *A*, *B* y *C*. Calcula las ecuaciones de los planos que contienen a las cuatro caras del tetraedro.



Los puntos son: $O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,5)$.

Las ecuaciones de las caras son:

$OAB: z=0$ $\quad OBC: x=0$ $\quad OAC: y=0$

$$ABC: \begin{vmatrix} -2 & -2 & x-2 \\ 3 & 0 & y \\ 0 & 5 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 15x - 30 + 10y + 6z = 0 \Rightarrow ABC: 15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

36. Indica un vector director y otro normal del plano de ecuación $-2x+2y+z=0$.

Dos puntos del plano:

$x=0, y=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow O(0,0,0)$ $\quad x=0, y=1 \Rightarrow 2+z=0 \Rightarrow z=-2 \Rightarrow A(0,1,-2)$

Un vector director: $\overrightarrow{OA} = (0,1,-2)$. Un vector normal: $\vec{n} = (-2,2,1)$.

37. Halla un vector director y otro normal del plano que pasa por los puntos $A\left(-1,2,\frac{1}{3}\right)$ y $B\left(\frac{1}{2},-1,0\right)$, y por el origen de coordenadas.

La ecuación del plano es $\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & x \\ 2 & -1 & y \\ \frac{1}{3} & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}x - z = 0 \Rightarrow \pi: 2x + y = 0$.

Un vector director es el $\overrightarrow{OA} = \left(-1,2,\frac{1}{3}\right)$ paralelo a $(-3,6,1)$.

Un vector normal es $\vec{n} = (2,1,0)$.

38. Un plano tiene como vector normal el $\vec{n} = (2,-3,2)$ y pasa por el punto $A(-1,2,-5)$. Escribe su ecuación normal, su ecuación implícita y sus ecuaciones paramétricas.

Ecuación normal: $2(x+1) - 3(y-2) + 2(z+5) = 0$

Ecuación implícita: $2x - 3y + 2z + 18 = 0$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -9 - \lambda + \frac{3}{2}\mu \end{cases}$

39. Halla la recta perpendicular al plano $x + z = 2$ y que pasa por el punto $A(1,2,0)$.

Vector normal del plano: $\vec{n} = (1,0,1)$

Este vector $\vec{n}$ será vector director de la recta *r* buscada. Por tanto:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

40. Halla el plano perpendicular a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = z$ y que pasa por el origen de coordenadas.

El vector $(2,1,1)$ es de dirección de la recta y, por tanto, normal del plano. En consecuencia, la ecuación del plano será $\pi : 2x + y + z = 0$.

41 y 42. Ejercicios resueltos.

43. Estudia la posición relativa de los planos π y π' en los siguientes casos.

a) $\pi : 2x - y - z = 0$ $\quad\pi' : -6x + 3y + 3z - 3 = 0$ $\quad$ **b)** $\pi : 2x - y - z = 0$ $\quad\pi' : 2x + y - z - 3 = 0$

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 1, \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Los planos son paralelos.

b) $M = M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\text{rg}(M) = 2, \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

44. Estudia la posición relativa de los planos siguientes.

a) $\pi : x - 3y - 2z = 2$ $\quad\pi' : -2x + 6y + 4z = -1$ $\quad\pi'' : 3x - 9y - 6z = 6$

b) $\pi : x - y - 3z = 1$ $\quad\pi' : -2x + 2y + 6z = -2$ $\quad\pi'' : x + y + z = 0$

c) $\pi : x - y - 2z = 1$ $\quad\pi' : 2x - 3y + z = 15$ $\quad\pi'' : x + z = -4$

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & -6 & 6 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 1 < \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ El sistema es incompatible y los tres planos tienen el mismo vector normal. Además el primer y tercer plano son coincidentes. Por tanto, dos planos son coincidentes y el otro es paralelo a ellos.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 2 = \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado con un parámetro. Además, los dos primeros planos son coincidentes. Se trata, por tanto, de dos planos coincidentes y otro que los corta.

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -15 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 3 = \text{rg}(M') = 3 \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Los planos forman triedro. Para hallar el punto común *P* a los tres planos, se resuelve el sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 15 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{40}{-8} = -5 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 15 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{64}{-8} = -8 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1.$$ Luego $P(-5,-8,1)$.

45 y 46. Ejercicios resueltos.

47. Estudia la posición relativa de la recta *r* y el plano π en los siguientes casos:

a) $r:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-2+4\lambda \end{cases}$ $\qquad \pi: 3x-y+2z+1=0$

b) $r:\begin{cases} x=2t+3 \\ y=t-1 \\ z=t+2 \end{cases}$ $\qquad \pi: x-3y+z-8=0$

a) $3(2+3\lambda)-2\lambda+2(-2+4\lambda)+1=0 \Rightarrow 15\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{5}$. Se cortan en el punto $P\left(\frac{7}{5},-\frac{2}{5}-\frac{14}{5}\right)$.

b) $2t+3-3t+3+t+2-8=0 \Rightarrow 0t=0 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

48. Estudia la posición relativa de la recta $r:\begin{cases} y-z=2 \\ x-3y+7=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x-2y-z+2=0$.

Dos puntos de la recta son, por ejemplo, $A(-1,2,0)$ y $B(-4,1,-1)$.

Unas posibles ecuaciones paramétricas de la recta son $\begin{cases} x=-1-3\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$.

$-1-3\lambda-4+2\lambda+\lambda+2=0 \Rightarrow 0\lambda=3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

49. Calcula el valor de *k* para que la recta $r:\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+z=k \end{cases}$ esté contenida en el plano $x+y-z-1=0$.

Dos puntos de la recta son, por ejemplo, $A(0,0,k)$ y $B(1,-2,k-1)$.

Unas posibles ecuaciones paramétricas de la recta son $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=k-\lambda \end{cases}$.

$x+y-z-1=\lambda-2\lambda-k+\lambda-1=0 \Rightarrow 0\lambda=k+1 \Rightarrow k=-1$

50. Ejercicio interactivo.

51. Ejercicio resuelto.

52. Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=3\lambda\end{cases}$ $s:\begin{cases}x=-2+2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=1-3\lambda\end{cases}$ **b)** $r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=2+3\lambda\end{cases}$ $s:\begin{cases}x=3\lambda\\ y=-2+4\lambda\\ z=1\end{cases}$

a) Punto de *r*: $A(1,-2,0)$; vector de *r*: $\vec{u}=(1,1,3)$. Punto de *s*: $B(-2,-1,1)$; vector de *s*: $\vec{v}=(2,1,-3)$.

Se calcula el rango de las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Como $\text{rg}(M)=2;\text{rg}(M')=3\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

b) Punto de *r*: $A(1,0,2)$; vector de *r*: $\vec{u}=(1,2,3)$. Punto de *s*: $B(0,-2,1)$; vector de *s*: $\vec{v}=(3,4,0)$.

Se calcula el rango de las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Como $\text{rg}(M)=2;\text{rg}(M')=3\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

53. Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $r:\begin{cases}2x+y-z=1\\ x-2y=0\end{cases}$ $s:\begin{cases}x=-2+2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=1+5\lambda\end{cases}$ **b)** $r:\begin{cases}x+y-z=2\\ 2x-z=3\end{cases}$ $s:\begin{cases}x-2y-2z=3\\ 2x-3y=0\end{cases}$

a) $\begin{cases}-4+4\lambda-1+\lambda-1-5\lambda=1\\ -2+2\lambda+2-2\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\lambda=7\\ 0=0\end{cases}\Rightarrow$ No hay ningún punto en común a las dos rectas.

Además, tienen el mismo vector de dirección $(2,1,5)$, por lo que las rectas son paralelas.

b) Puntos de *r*: $A(2,1,1)$ y $B(0,-1,-3)$ Vector de *r*: $\vec{u}=(-2,-2,-4)$

Puntos de *s*: $C(3,2,-2)$ y $D\left(0,0,-\frac{3}{2}\right)$ Vector de *s*: $\vec{v}=\left(-3,-2,\frac{1}{2}\right)$

Se calcula el rango de $M=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -2 & -2\\ -4 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & \frac{1}{2} & -3\end{pmatrix}$. Como $\text{rg}(M)=2\neq 3=\text{rg}(M')\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

54 y 55. Ejercicios resueltos.

56. Escribe la ecuación del haz de rectas:

a) Que son paralelas a $r:\begin{cases}x-y=0\\ y-2z=0\end{cases}$. **b)** De vértice el punto $P(-1,4,0)$.

a) Se debe calcular un vector de dirección de la recta. Para ello, se obtienen dos puntos de ella:

$$A(0,0,0)\text{ y }B(2,2,1)\Rightarrow\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$$

El haz de rectas paralelas a *r* viene dado por la expresión: $\frac{x-\lambda_1}{2}=\frac{y-\lambda_2}{2}=\frac{z-\lambda_3}{1}$

b) $\frac{x+1}{\lambda_1}=\frac{y-4}{\lambda_2}=\frac{z}{\lambda_3}$, con λ_1, λ_2 y λ_3 no nulos los tres a la vez.

57. Escribe las ecuaciones de los siguientes haces de planos.

a) Paralelos al plano $\pi: 3x+3y-z-3=0$

b) Que tienen como vector normal el $\vec{n}=(-1,2,-3)$

c) Que contienen a la recta $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

d) Paralelos al plano coordenado *XZ.*

a) $3x+3y-z+\lambda=0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $-x+2y-3z+\lambda=0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $x-y+z+\lambda(2x-y+z)=0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y además el plano $2x-y+z=0$.

d) $y+\lambda=0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

58. Escribe la ecuación del haz de planos que contiene a la recta que pasa por los puntos $A(1,-1,3)$ y $B(0,2,-1)$.

Las ecuaciones en forma continua de *AB* son:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=-y-1 \\ -4x+4=-z+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y-2=0 \\ 4x-z-1=0 \end{cases}$$

La ecuación del haz es:

$3x+y-2+\lambda(4x-z-1)=0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ añadiendo $4x-z-1=0$

59. Escribe la ecuación del haz de planos que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=2+2t \end{cases}$$

Las ecuaciones en forma continua de *AB* son: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x-1=y+2 \\ 2x-2=z-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$

La ecuación del haz es: $x-y-3+\lambda(2x-z)=0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ añadiendo $2x-z=0$.

60. Comprueba que todos los planos que tienen por ecuación $\pi:(2+\lambda)x+y+\lambda z-1=0$, siendo λ cualquier número real, contienen una misma recta. Escribe la ecuación de dicha recta.

$$(2+\lambda)x+y+\lambda z-1=0 \Rightarrow 2x+\lambda x+y+\lambda z-1=0 \Rightarrow 2x+y-1+\lambda(x+z)=0$$

Por tanto, todos los planos de esta forma contienen a la recta $r:\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

61 y 62. Ejercicios resueltos.

63. Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano $\pi: 2x+2y-3z=6$ y que pasa por el punto $A(-2,3,4)$.

La recta buscada *r* tiene como vector de dirección a $\vec{n}=(2,2,-3)$ normal del plano π y pasa por $A(-2,3,4)$.

Por tanto, $r:\begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=4-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{-3} \Rightarrow \begin{cases} x-y+5=0 \\ 3x+2z-2=0 \end{cases}$

64. Calcula la ecuación del plano perpendicular a $\pi : x - y + 3z = 4$ y que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

El plano buscado tiene como vectores de dirección $\vec{u} = (1, -1, 2)$ de la recta *r* y el normal $\vec{n} = (1, -1, 3)$ del plano π.

Además, pasa por el punto $(1, 2, 3)$ de la recta *r*. Plano buscado: $\pi' : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y-2 \\ 2 & 3 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0$

65. Verifica si los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son o no coplanarios.

a) $A(2,1,0), B(4,2,0), C(1,-2,0), D(1,2,0)$

b) $A(1,1,1), B(2,2,-1), C(-1,2,2), D(2,1,2)$

a) Todos los puntos pertenecen al plano $z = 0$. Por tanto, son coplanarios.

b) Se calcula la ecuación del plano que pasa por los puntos *A*, *B* y *C*:

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,-2); \overrightarrow{AC} = (-2,1,1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & x-1 \\ 1 & 1 & y-1 \\ -2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow 3x + 3y + 3z - 9 = 0 \Rightarrow \pi : x + y + z = 3$$

El punto *D* no pertenece a π ya que $2 + 1 + 2 - 3 \neq 0 \Rightarrow$ *A*, *B*, *C* y *D* no son coplanarios.

66. Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $r : \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ y = z \end{cases}$ y al punto $A(2,2,-2)$.

$$x - 2y + 3z - 6 + \lambda(y - z) = 0 \Rightarrow 2 - 4 - 6 - 6 + \lambda(2 + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{2}$$

$$x - 2y + 3z - 6 + \frac{7}{2}(y - z) = 0 \Rightarrow \pi : 2x + 3y - z - 12 = 0$$

67 a 76. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Coordenadas de un vector

77. Para cada uno de los siguientes casos calcula las coordenadas del vector de origen el punto *A* y de extremo el punto *B*.

a) $A(2,0,-3); B(0,3,-5)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{2}\right); B\left(-1, \frac{3}{5}, 2\right)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2,3,-2)$

b) $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{13}{5}, 1\right)$

78. Del vector $\overrightarrow{PQ} = (-2,0,3)$ se sabe que el origen tiene coordenadas $P(1,-2,3)$. Calcula las coordenadas del extremo *Q*.

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = (1,-2,3) + (-2,0,3) = (-1,-2,6)$, luego $Q = (-1,-2,6)$.

79. Del vector $\overrightarrow{PQ}=(4,-1,2)$ se sabe que el extremo tiene coordenadas $Q(2,-3,-4)$. Calcula las coordenadas del origen *P*.

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{PQ}=(2,-3,-4)-(4,-1,2)=(-2,-2,-6)\Rightarrow P=(-2,-2,-6)$$

División de un segmento

80. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos *A* y *B* para cada uno de los siguientes casos.

a) $A(-3,2,-3);B(1,-2,1)$ **b)** $A\left(\frac{1}{3},-3,-\frac{4}{3}\right);B\left(-2,\frac{2}{3},2\right)$ **c)** $A(5,3,-2);B(10,2,-7)$

a) $M(-1,0,-1)$ **b)** $M\left(-\frac{5}{6},-\frac{7}{6},\frac{1}{3}\right)$ **c)** $M\left(\frac{15}{2},\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)$

81. Calcula las coordenadas de dos puntos *A* y *B* que dividan al segmento de extremos $P(2,2,-1)$ y $Q(5,-4,-7)$ en tres segmentos de la misma longitud.

$$\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PA}\Rightarrow(3,-6,-6)=3(a_1-2,a_2-2,a_3+1)\Rightarrow a_1=3,a_2=0,a_3=-3\Rightarrow A(3,0,-3)$$

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PB}\Rightarrow(3,-6,-6)=\frac{3}{2}(b_1-2,b_2-2,b_3+1)\Rightarrow b_1=3,b_2=-2,b_3=-5\Rightarrow B(4,-2,-5)$$

82. Calcula las coordenadas de tres puntos *A*, *B* y *C* que dividan al segmento de extremos $P\left(1,\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$ y $Q\left(-3,\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$ en cuatro segmentos de la misma longitud.

$$\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PA}\Rightarrow\left(-4,1,\frac{4}{3}\right)=4\left(a_1-1,a_2-\frac{1}{2},a_3+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow a_1=0,\ a_2=\frac{3}{4},\ a_3=-\frac{1}{3}\Rightarrow A\left(0,\frac{3}{4},-\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{PB}\Rightarrow\left(-4,1,\frac{4}{3}\right)=2\left(b_1-1,b_2-\frac{1}{2},b_3+\frac{2}{3}\right)b_1=-1,\ b_2=1,\ b_3=0\Rightarrow B(-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PC}\Rightarrow\left(-4,1,\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}\left(c_1-1,c_2-\frac{1}{2},c_3+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow c_1=-2,\ c_2=\frac{5}{4},\ c_3=\frac{1}{3}\Rightarrow C\left(-2,\frac{5}{4},\frac{1}{3}\right)$$

83. Dado el segmento de extremos $A(2,1,-1)$ y $B(5,-2,8)$:

a) Calcula las coordenadas del punto *C* de forma que *B* sea el punto medio del segmento *AC*.

b) Calcula las coordenadas de dos puntos *P* y *Q* pertenecientes al segmento *AB* y tales que dividan a este segmento en tres segmentos de igual longitud.

a) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow(c_1-2,c_2-1,c_3+1)=2(3,-3,9)\Rightarrow c_1=8,\ c_2=-5,c_3=17\Rightarrow C(8,-5,17)$

b) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AP}\Rightarrow(3,-3,9)=3(p_1-2,p_2-1,p_3+1)\Rightarrow p_1=3,\ p_2=0,\ p_3=2\Rightarrow P(3,0,2)$

$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AQ}\Rightarrow(3,-3,9)=\frac{3}{2}(q_1-2,q_2-1,q_3+1)\Rightarrow q_1=4,\ q_2=-1,\ q_3=5\Rightarrow Q(4,-1,5)$

Ecuaciones de la recta

84. Escribe las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta:

a) Que pasa por los puntos $A(1,-2,0)$ y $B(2,-3,-1)$.

b) Que pasa por el punto $A(-2,-2,0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}=(-1,-1,4)$.

c) Que pasa por el punto $A\left(-\frac{2}{3},-2,\frac{1}{2}\right)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{2}\right)$.

a) $AB:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=-\lambda\end{cases}\Rightarrow AB:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-1}\Rightarrow AB:\begin{cases}-x+1=y+2\\ -x+1=z\end{cases}\Rightarrow AB:\begin{cases}x+y+1=0\\ x+z-1=0\end{cases}$

b) $r:\begin{cases}x=-2-\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=4\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\frac{x+2}{-1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}\Rightarrow r:\begin{cases}x+2=y+2\\ 4x+8=-z\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x-y=0\\ 4x+z+8=0\end{cases}$

c) $r:\begin{cases}x=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\lambda\\ y=-2\\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow r:\begin{cases}y+2=0\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}y+2=0\\ 3x-2z+3=0\end{cases}$

85. Dados los puntos $A(1,-1,2)$ y $B(-1,-2,0)$, calcula unas ecuaciones paramétricas y unas implícitas para la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector de dirección al vector $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-2)$

Ecuaciones paramétricas: $AB:\begin{cases}x=-2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases}$ Ecuaciones implícitas: $AB:\begin{cases}x-2y=0\\ x-z=0\end{cases}$

86. Calcula dos puntos de cada una de las siguientes rectas.

a) $r:\begin{cases}x=-2+2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{cases}$ **b)** $r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$ **c)** $r:\begin{cases}x-2y+z=0\\ 2x-y-z=0\end{cases}$

a) $A(-2,-1,-1);B(0,0,1)$ **b)** $A(1,-2,0);B(0,0,-2)$ **c)** $A(0,0,0);B(1,1,1)$

87. Calcula un punto y un vector de dirección de cada una de las siguientes rectas.

a) $r:\begin{cases}x=-3\lambda\\ y=-2+3\lambda\\ z=1-4\lambda\end{cases}$ **b)** $r:\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{3}$ **c)** $r:\begin{cases}2x+y=3\\ 2x-z=1\end{cases}$

a) $P(0,-2,1);\vec{u}=(-3,3,-4)$

b) $P(0,2,-2);\vec{u}=(-2,1,3)$

c) $P(0,3,-1);\vec{u}=(1,-2,2)$

88. Calcula la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=3-3\lambda\end{cases}$$

Se despeja el valor del parámetro λ: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}\Rightarrow\begin{cases}2x+y-4=0\\ 3x-z=0\end{cases}$

89. Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta de ecuaciones implícitas:

$$\boldsymbol{r:\begin{cases}3x-y-z-1=0\\ x+y-z-3=0\end{cases}}$$

Dos puntos de la recta:

$x=0\Rightarrow\begin{cases}-y-z=1\\ y-z=3\end{cases}\Rightarrow z=-2, y=1\Rightarrow A(0,1,-2)$ $\quad$ $x=1\Rightarrow\begin{cases}-y-z=-2\\ y-z=2\end{cases}\Rightarrow z=0, y=2\Rightarrow B(1,2,0)$

Vector de dirección: $\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$

Ecuaciones paramétricas: $r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=-2+2\lambda\end{cases}$ $\quad$ Ecuación en forma continua: $r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$

90. Escribe las ecuaciones de cada una de las siguientes rectas.

a) Eje *X*.

b) Paralela al eje *Y* y que pasa por el punto $(3,0,2)$.

c) Bisectriz de los ejes positivos *X* e *Y*.

a) $\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$ $\quad$ **b)** $\begin{cases}x=3\\ z=2\end{cases}$ $\quad$ **c)** $\begin{cases}z=0\\ x=y\end{cases}$

91. Escribe la ecuación en forma continua de las rectas que se indican a continuación. Calcula un punto y un vector director de cada una de ellas. Ten en cuenta que las ecuaciones dadas no están en forma continua.

a) $r:\frac{x}{2}=\frac{2y-2}{3}=\frac{z-1}{-3}$ $\quad$ **b)** $r:\frac{-x+1}{3}=\frac{2y-4}{2}=\frac{3z-2}{-4}$

a) $r:\frac{x}{2}=\frac{2y-2}{3}=\frac{z-1}{-3}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-1}{\frac{3}{2}}=\frac{z-1}{-3}$ $\quad$ Punto: $(0,1,1)$ $\quad$ Vector director: $\left(2,\frac{3}{2},-3\right)\parallel(4,3,-6)$

b) $r:\frac{-x+1}{3}=\frac{2y-4}{2}=\frac{3z-2}{-4}\Rightarrow\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}}$ $\quad$ Punto: $\left(1,2,\frac{2}{3}\right)$ $\quad$ Vector director: $\left(-3,1,-\frac{4}{3}\right)\parallel(-9,3,-4)$

92. Se considera la recta que pasa por el punto $A(-1,2,-3)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u}=(2,-1,2)$.

a) Escribe las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones continuas de la recta.

b) Decide cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta y cuáles no:

$P(5,-1,3)$ $\quad$ $Q(-3,3,-4)$ $\quad$ $R\left(0,\frac{3}{2},-2\right)$

c) Escribe dos puntos más de dicha recta.

a) Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$ Ecuación en forma continua: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$

b) *P* sí pertenece $(\lambda=3)$; *Q* no pertenece (no existe ningún valor de λ); *R* sí pertenece $\left(\lambda=\frac{1}{2}\right)$.

c) $S(-5,4,-7)$ para $\lambda=-2$ y $T(3,0,1)$ para $\lambda=2$.

93. Verifica si los siguientes puntos pertenecen o no a una misma recta. En caso afirmativo, calcula sus ecuaciones paramétricas.

a) $A(2,-1,2), B(3,0,3)$ y $C(4,1,4)$

b) $A(1,-1,1), B(-1,-2,1)$ y $C(3,-1,1)$

c) $A(3,0,-2), B(-4,2,0)$ y $C(3,1,0)$

a) $\overrightarrow{AB}=(1,1,1), \overrightarrow{AC}=(2,2,2)$. Como $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, entonces *A*, *B* y *C* están alineados: $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$

b) $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,0), \overrightarrow{AC}=(2,0,0)$. Como no son proporcionales, *A*, *B* y *C* no están alineados.

c) $\overrightarrow{AB}=(-7,2,2), \overrightarrow{AC}=(0,1,2)$. Como no son proporcionales, *A*, *B* y *C* no están alineados.

Ecuaciones del plano

94. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano:

a) Que pasa por el punto $A(-1,3,1)$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u}=(1,-1,3)$ y $\vec{v}=(-1,-1,4)$.

b) Que pasa por los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$ y $C(-3,1,0)$.

c) Que pasa por el punto $A\left(-\frac{3}{2},2,\frac{1}{2}\right)$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u}=\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

d) Que contiene al triángulo de vértices $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$.

a) $\begin{cases} x=-1+\lambda-\mu \\ y=3-\lambda-\mu \\ z=1+3\lambda+4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & x+1 \\ -1 & -1 & y-3 \\ 3 & 4 & z-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+7y+2z-22=0$

b) $\overrightarrow{AB}=(1,1,-3);\ \overrightarrow{AC}=(-4,2,-2)\parallel(-2,1,-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1+\lambda-2\mu \\ y=-1+\lambda+\mu \\ z=2-3\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & x-1 \\ 1 & 1 & y+1 \\ -3 & -1 & z-2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x+7y+3z-1=0$

c) $\begin{cases} x=\frac{3}{2}+2\lambda+\mu \\ y=2-\mu \\ z=\frac{1}{2}+3\lambda+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & y-2 \\ 3 & 3 & z-\frac{1}{2} \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 6x-6y-4z+23=0$

d) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0);\overrightarrow{AC}=(-1,0,1) \Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow x+y+z-1=0$

95. Dados los puntos $A(1,1,-2)$, $B(-1,-2,-3)$ y $C(1,1,0)$, calcula la ecuación implícita del plano que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}=(-2,-3,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,0,2)$

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & x \\ -3 & 0 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -6x+4y=0 \Rightarrow 3x-2y=0$

96. Calcula dos puntos de cada uno de los siguientes planos.

a) $\pi:\begin{cases} x=-1-\lambda+\mu \\ y=2+2\lambda-\mu \\ z=3-3\lambda-2\mu \end{cases}$ **b)** $\pi: 2x+y-3z=1$

a) $A(-1,2,3)$, $B(0,1,1)$ **b)** $A(0,-2,-1)$, $B(1,2,1)$

97. Calcula un punto, dos vectores de dirección linealmente independientes y un vector normal de cada uno de los siguientes planos.

a) $\pi: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3\lambda - 2\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ **b)** $\pi: 3x - y - 2z = 0$

a) $P(-1,0,1); \vec{u} = (-1,3,-2), \vec{v} = (0,-2,-1); \begin{vmatrix} -1 & 0 & x+1 \\ 3 & -2 & y \\ -2 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x - y + 2z - 9 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (-7,-1,2)$

b) $\vec{n} = (3,-1,-2); \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda - 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow O(0,0,0); \vec{u} = (1,3,0), \vec{v} = (0,-2,1)$

98. Escribe unas ecuaciones paramétricas para el plano de ecuación implícita $\pi: x - 2y + 3z = 1$.

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

99. Escribe las ecuaciones paramétricas para el plano que pasa por $A(1,3,-2)$ y tiene como vector normal $\vec{n} = (1,-2,0)$.

$x - 2y + D = 0$. Como $A(1,3,-2) \in \pi \Rightarrow 1 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 5 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$.

Ecuaciones paramétricas: $\pi: \begin{cases} x = -5 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

100. Escribe la ecuación implícita del plano de ecuaciones paramétricas:

$$\pi: \begin{cases} x = -2 - 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 - 2\lambda - 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 2\mu \end{cases}$$

Ecuación implícita: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & x+2 \\ -2 & -2 & y-1 \\ 2 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + y + 5z + 2 = 0$

101. Verifica si los siguientes puntos pertenecen o no a un mismo plano. En caso afirmativo, calcula su ecuación.

a) $A(2,1,1), B(1,0,-2), C(-1,2,0)$ y $D(-2,0,-5)$

b) $A(1,1,1), B(-1,2,1), C(2,-1,1)$ y $D(-2,2,2)$

c) $A(1,-1,1), B(-1,-2,1), C(3,-1,1)$ y $D(2,1,6)$

d) $A(1,-1,2), B(2,0,-1), C(-3,1,0)$ y $D(-3,3,3)$

Si $\text{rg}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = 3 \Rightarrow$ No coplanarios.

Si $\text{rg}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) < 3 \Rightarrow$ Coplanarios.

a) $\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ Coplanarios: $x + 2y - z - 3 = 0$

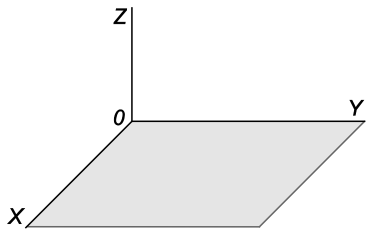
b) $\text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ No coplanarios.

c) $\text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ No coplanarios.

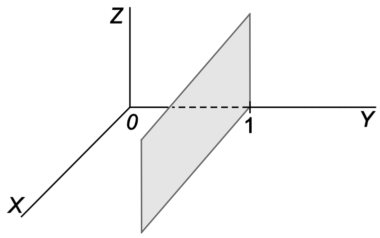
d) $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ No coplanarios.

102. Escribe las ecuaciones de cada uno de los siguientes planos.

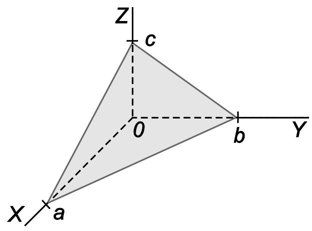
a)



b)



c)



a) $z = 0$

b) $y = 1$

c) $\begin{vmatrix} -a & -a & x-a \\ b & 0 & y \\ 0 & c & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bc(x-a) + acy + abz = 0 \Rightarrow bcx + acy + abz = abc \Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

Posiciones relativas de dos planos

103. Estudia la posición relativa de los dos planos π y π' en los siguientes casos.

a) $\pi: 2x - y + z = 0$, $\pi': -2x + y + z = 1$ **b)** $\pi: 2x - y + z = 0$, $\pi': -4x + 2y - 2z = 1$ **c)** $\pi: 2x - y + z = 0$, $\pi': -4x + 2y - 2z = 0$ **d)** $\pi: x + y - 1 = 0$, $\pi': x + z - 2 = 0$

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{rg}(M) = 2; \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Se cortan en una recta.

b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{rg}(M) = 1; \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Planos paralelos.

c) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\text{rg}(M) = 1; \text{rg}(M') = 1 \Rightarrow$ Planos coincidentes.

d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\text{rg}(M) = 2; \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Se cortan en una recta.

Posiciones relativas de tres planos

104. Estudia la posición relativa de los tres planos π, π' y π'' en los siguientes casos.

a) $\pi: 2x - y + z = 0$, $\pi': 3x + y + 4z = 0$, $\pi'': x + y - z = 3$

b) $\pi: 2x + y + z = 0$, $\pi': x + y - z = 0$, $\pi'': x + 2z = 1$

c) $\pi: x + y - z = 0$, $\pi': 3x + 2y + 1 = 0$, $\pi'': x + 2z + 1 = 0$

d) $\pi: -2x - y + 3z = 3$, $\pi': 6x + 3y - 9z = -9$, $\pi'': -10x - 5y + 15z = 15$

e) $\pi: 2x - y + z = 0$, $\pi': x - 2y + 3z = 1$, $\pi'': 3x - 3y + 4z = 1$

f) $\pi: 2x - 4y + 6z + 1 = 0$, $\pi': x + 2y + z = 0$, $\pi'': x - 2y + 3z - 1 = 0$

g) $\pi: 2x - y + 3z = 4$, $\pi': x - 2y - z = -7$, $\pi'': -2x + y - z = 2$

h) $\pi: x + y - z = 0$, $\pi': x - y + z = 0$, $\pi'': x = 0$

a) $\text{rg}(M) = 3; \text{rg}(M') = 3 \Rightarrow$ Se cortan en un punto.

b) $\text{rg}(M) = 2; \text{rg}(M') = 3 \Rightarrow$ No existe ninguna pareja de planos paralelos, los tres planos forman un prisma.

c) $\text{rg}(M) = 2; \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Se cortan en una recta sin que haya ninguna pareja de planos coincidentes.

d) $\text{rg}(M) = 1; \text{rg}(M') = 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

e) $\text{rg}(M) = 2; \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Se cortan en una recta sin que haya ninguna pareja de planos coincidentes.

f) $\text{rg}(M) = 2; \text{rg}(M') = 3 \Rightarrow$ Como π y π'' son paralelos, son dos planos paralelos y uno que los corta.

g) $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 3 \Rightarrow$ Se cortan en un punto.

h) $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Se cortan en una recta sin que haya ninguna pareja de planos coincidentes.

Posiciones relativas de recta y plano

105. En cada uno de los siguientes casos, estudia la posición relativa del plano $\pi: x - y + 2z = 1$ y las rectas siguientes.

a) $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}$ **b)** $s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{1}$ **c)** $t: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}$

a) $1 + t + 2t + 6t = 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$ La recta corta al plano en el punto $P(1,0,0)$.

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 4x - 2y = 0 \\ x - 2z = -2 \end{cases}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 2; \text{rg}(M') = 3 \Rightarrow$ Recta paralela al plano.

c) $1 + 2t - 4t + 2t = 1 \Rightarrow 0t = 0 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

106. En los siguientes casos, calcula el punto de intersección de la recta *r* con el plano π.

a) $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$ $\quad \pi: 2x + y - z = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = -7 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ $\quad \pi: 3x + 2y - z + 1 = 0$

a) Escribiendo la recta *r* en paramétricas y sustituyendo en el plano se obtiene:

$2t - t - t = 0 \Rightarrow 0t = 0 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

b) Se sustituye la recta *r* en el plano:

$3(10 - 3t) + 2(-7 + 2t) + 1 - t + 1 = 0 \Rightarrow -6t = -18 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow$ La recta corta al plano en el punto $P(1, -1, 2)$.

Posiciones relativas de dos rectas

107. Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s* en los siguientes casos.

a) $r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{2} = z + 1$ $\quad s: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+8}{2} = z + 5$

b) $r: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ $\quad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases}$

c) $r: x = -y = z$ $\quad s: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$

d) $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ $\quad s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$

e) $r: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{4}$ $\quad s: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -5 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

a) Recta *r*: $\vec{u} = (-1, 2, 1)$, $P(2, 0, -1)$ $\quad$ Recta *s*: $\vec{v} = (1, 2, 1)$, $Q(-2, -8, -5)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (-4, -8, -4) = -4(1, 2, 1)$

$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 2 = \text{rg}(M') \Rightarrow$ Rectas secantes.

b) Recta *r*: $\vec{u} = (-2, 2, 3)$, $P(0, -1, 0)$ $\quad$ Recta *s*: $\vec{v} = (2, -2, -3)$, $Q(0, 0, 0)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0)$

$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 1 \neq \text{rg}(M') = 2 \Rightarrow$ Rectas paralelas.

c) Recta *r*: $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $P(0, 0, 0)$ $\quad$ Recta *s*: $\vec{v} = (-1, 1, -1)$, $Q(0, 0, 0)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (0, 0, 0)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 1 = \text{rg}(M') \Rightarrow$ Rectas coincidentes.

d) Recta *r*: $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $P(0, 0, 0)$ $\quad$ Recta *s*: $\vec{v} = (3, 2, 1)$, $Q(1, 1, 0)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 2 \neq \text{rg}(M') = 3 \Rightarrow$ Rectas que se cruzan.

e) Recta *r*: $\vec{u} = (3, 2, 4)$, $P(0, 2, 5)$ $\quad$ Recta *s*: $\vec{v} = (1, -1, 3)$, $Q(-3, -5, 6)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (-3, -7, 1)$

$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. $\text{rg}(M) = 2 = \text{rg}(M') \Rightarrow$ Rectas secantes.

Haces de rectas y planos

108. Escribe las ecuaciones de los haces de rectas:

a) Paralelas a $r:\begin{cases}2x+3z=0\\2x-y+2z=-8\end{cases}$

b) Que pasan por el punto de intersección del plano $\pi: x+2y-z=4$ y la recta $r:\begin{cases}2x+y+z=2\\x-y+z=-1\end{cases}$

a) Se calculan dos puntos de la recta y, con ellos, un vector de dirección: $A(0,8,0)$, $B(-3,6,2)$, $\overrightarrow{BA}=(3,2,-2)$.

La ecuación del haz de rectas paralelas es: $\dfrac{x-\lambda_1}{3}=\dfrac{y-\lambda_2}{2}=\dfrac{z-\lambda_3}{-2}$

b) El punto de intersección de la recta y el plano es:

$\begin{cases}x+2y-z=4\\2x+y+z=2\\x-y+z=-1\end{cases}\Rightarrow x=1, y=1, z=-1\Rightarrow P(1,1,-1)$. Ecuación del haz de rectas secantes: $\dfrac{x-1}{\lambda_1}=\dfrac{y-1}{\lambda_2}=\dfrac{z+1}{\lambda_3}$

109. Escribe la ecuación del haz de planos secantes en las rectas:

a) $r:\begin{cases}x=1-\lambda\\y=-2+\lambda\\z=1-2\lambda\end{cases}$ **b)** $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{3}$

a) $r:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x+y+1=0\\2x-z-1=0\end{cases}\Rightarrow$ Haz: $x+y+1+\lambda(2x-z-1)=0 \quad \lambda\in\mathbb{R}$, añadiendo $2x-z-1=0$.

b) $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{3}\Rightarrow\begin{cases}x+2y+3=0\\3x-2z-3=0\end{cases}\Rightarrow$ Haz: $x+2y+3+\lambda(3x-2z-3)=0 \quad \lambda\in\mathbb{R}$,

añadiendo $3x-2z-3=0$

110. Escribe la ecuación del haz de planos paralelos, tal que uno de ellos pase por los puntos $A(-2,1,1)$, $B(3,0,-3)$ y $C(-2,1,4)$.

Plano que pasa por *A*, *B* y *C*: $\begin{vmatrix}5 & 0 & x+2\\-1 & 0 & y-1\\-4 & 3 & z-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi: x+5y-3=0\Rightarrow$ Haz: $x+5y+\lambda=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Síntesis

111. Dados los puntos $A(-1,2,0)$ y $B(5,-2,4)$, calcula las coordenadas del punto *C* que está situado en el interior del segmento de extremos *A* y *B*, tal que la distancia de *C* a *B* sea el triple que la distancia de *C* a *A*.

Equivale a partir el segmento en cuatro partes iguales, luego buscamos *C* tal que $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Tomando coordenadas, se tiene que: $(c_1+1, c_2-2, c_3)=\dfrac{1}{4}(6,-4,4)\Rightarrow c_1=\dfrac{1}{2}, c_2=1, c_3=1\Rightarrow C\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$

112. *Calcula el valor de a para que los puntos $A(2,0,-1)$, $B(5,2,-2)$ y $C(1,a,a)$ pertenezcan a una misma recta.

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Rightarrow (3,2,-1) \parallel (-1,a,1+a) \Rightarrow \frac{3}{-1} = \frac{2}{a} = \frac{-1}{1+a} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

113. Calcula todos los valores de m que hacen que los puntos del espacio $A(0,2,2)$, $B\left(1,1,m^2-1\right)$ y $C(2,0,2m)$ pertenezcan a una misma recta.

Escribe unas ecuaciones implícitas para esa recta.

$$\overrightarrow{AB} = \left(1,-1,m^2-3\right);\ \overrightarrow{AC} = (2,-2,2m-2) \Rightarrow 2\left(m^2-3\right) = 2m-2 \Rightarrow 2m^2-2m-4=0 \Rightarrow m=2, m=-1$$

Si $m = 2$: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-z=-2 \end{cases}$

Si $m = -1$: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+z=2 \end{cases}$

114. Calcula el valor de m para que los puntos del espacio $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.

Para que A, B, C y D sean coplanarios se debe verificar que el rango de la matriz cuyas filas son los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sea 2. Por tanto:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \\ m & -2 & 2m-2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow m^2-4=0 \Rightarrow m=2, m=-2$$

115. Calcula el valor de a para que los puntos $A(3,0,2)$, $B(0,a,a)$, $C(1,2,2)$ y $D(-1,-1,0)$ sean coplanarios.

Para este valor hallado, calcula la ecuación del plano que contiene a los cuatro puntos.

Ecuación del plano que pasa por A, C y D: $\begin{vmatrix} -2 & -4 & x-3 \\ 2 & -1 & y \\ 0 & -2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 2x+2y-5z+4=0$

Para que B pertenezca a π, se debe verificar: $2a-5a+4=0 \Rightarrow a = \dfrac{4}{3}$

116. Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x-kz=2 \\ y-z=-3 \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{2} = y+1 = z$$

¿Existe algún valor de k que haga que estas rectas sean secantes?

$\begin{cases} x-kz=2 \\ y-z=-3 \\ x-2z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces, $|M'| = 0 \Leftrightarrow k = 2$

Para $k = 2$, $\text{rg}(M) = 2$ y $\text{rg}(M') = 3$.

Para $k \neq 2$, $\text{rg}(M) = 3$ y $\text{rg}(M') = 4$.

En cualquier caso, el sistema es incompatible. Por tanto, no existe ningún valor de k para el cual las rectas se corten en un punto.

117. Dadas las rectas:

$$r:\begin{cases} x+y-z=-6 \\ 2x-z=-2 \end{cases} \qquad s:\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+1}{2}$$

Estudia sus posiciones relativas según los valores de *m*.

Recta *r*: Punto: $A(-1,-5,0)$, vector director: $\vec{u}_r=(1,1,2)$. Recta *s*: Punto: $B(-2,2,-1)$, vector director: $\vec{u}_s=(2,m,2)$

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2\end{pmatrix},\ M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2\\ -1 & 7 & -1\end{pmatrix},\ \text{rg}(M)=2,\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2\\ -1 & 7 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow m=-14$$

Si $m=-14$, $\text{rg}(M')=2$ y las rectas se cortan. Si $m\neq-14$, $\text{rg}(M')=3$ y las rectas se cruzan.

CUESTIONES

118. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Dos rectas paralelas determinan un único plano.

b) Desde un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a ella.

c) Desde un punto exterior a una recta solo se puede trazar una perpendicular a ella.

d) Dos rectas que se cruzan no forman ningún ángulo.

e) Dadas dos rectas que se cruzan y un punto exterior a ellas, solo hay una recta que pase por ese punto y toque a las dos rectas.

a) Verdadero, porque basta tomar dos puntos *A* y *B* de una de las rectas y otro punto *C* de la otra recta. Entonces se puede definir el plano que pasa por *A* y lleva la dirección $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que es el plano determinado por las dos rectas paralelas.

b) Verdadero, porque sería la recta que pasa por ese punto y tiene por vector director el de la recta dada.

c) Falso, hay infinitas rectas perpendiculares a una recta que pasan por un punto exterior, solo una de ellas cortará a la recta, pero la afirmación no exige que sea secante.

d) Falso, porque el ángulo que forman dos rectas que se cruzan es el formado por los vectores directores de esas rectas.

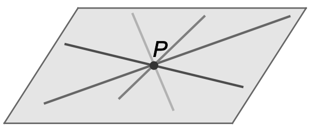
e) Verdadero, puede ser una o ninguna. Si el plano que contiene a una de las rectas y pasa por el punto exterior es paralelo a la otra recta, no hay ninguna. Y si dicho plano es secante a la recta en un punto, la recta buscada es la que pasa por el punto de corte y el punto exterior.

119. Dado un plano y un punto de él:

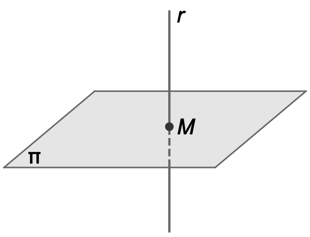
a) ¿Cuántas rectas se pueden trazar que estén contenidas en el plano y que pasen por el punto?

b) ¿Cuántas rectas se pueden trazar y que sean perpendiculares al plano y que pasen por el punto?

a) Infinitas, porque existen infinitas direcciones en el plano.



b) Una única recta.



PROBLEMAS

120. Dado el plano $\pi : 6x + 4y - 3z - D = 0$:

a) Calcula el valor de *D* para que el plano pase por el punto $P(2,0,0)$.

b) Calcula las coordenadas de *A*, *B* y *C*, que son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano π.

c) Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

a) $6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - D \Rightarrow D = 12 \Rightarrow \pi : 6x + 4y - 3z + 12 = 0$

b) Eje *X*: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2$ Eje *Y*: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 3$ Eje *Z*: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -4$

c) Baricentro: $G\left(\frac{2}{3}, 1, -\frac{4}{3}\right)$

121. Dos de los vértices de un triángulo son los puntos $A(-2,1,3)$ y $B(2,-1,4)$. El baricentro está situado en el punto $G\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3\right)$.

Calcula las coordenadas del tercer vértice *C*.

Sea $C(a,b,c)$ el vértice buscado. Entonces:

$\frac{-2+2+a}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 1$ $\frac{1-1+b}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -1$ $\frac{3+4+c}{3} = 3 \Rightarrow c = 2$

Por tanto, $C(1,-1,2)$

122. Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3,1,-1)$ y $B(2,0,3)$, y es paralelo a la recta de ecuaciones:

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{4}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,4),\ \vec{u}_r = (1,3,4) \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-3 \\ -1 & 3 & y-1 \\ 4 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : 8x - 4y + z - 19 = 0$$

123. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-2,-3,2)$ y es paralelo a las rectas:

$$r : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-4} \qquad s : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = (-1,3,-4),\ \vec{u}_s = (3,1,-1) \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & x+2 \\ 3 & 1 & y+3 \\ -4 & -1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : x - 13y - 10z - 17 = 0$$

124. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,-3,0)$ y es paralela a la recta determinada por la intersección de los planos:

$$\pi : 2x - 3y + z = 0 \qquad \pi' : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = t - s \\ z = 2 + 2t + s \end{cases}$$

$$\pi' : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & y \\ 2 & 1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' : 3x + y - 2z + 1 = 0 \Rightarrow r \| s : \begin{cases} 3x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (5, 7, 11)$$

La recta buscada es $r : \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = -3 + 7\lambda \\ z = 11\lambda \end{cases}$.

125. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1,1,-2)$ y es perpendicular a la recta $r : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (2,-1,-3) \text{ es normal a } \pi \Rightarrow 2x - y - 3z + D = 0 \Rightarrow -2 - 1 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \pi : 2x - y - 3z - 3 = 0$$

126. Halla la ecuación de la recta perpendicular al plano $\pi : 2x - y + 2z - 1 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1,0,3)$.

El vector normal del plano es el de dirección de la recta buscada. Por tanto, $r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

127. Halla la ecuación del plano paralelo al plano $\pi : -x + 2y + 3z - 4 = 0$ que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-2,3)$ y $B(-3,4,-3)$.

Punto medio de *A* y *B*: $M(-1,1,0)$ Todos los planos paralelos a π son: $-x + 2y + 3z + D = 0$

De todos ellos, el que pasa por *M* cumplirá: $1 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow \pi' : -x + 2y + 3z - 3 = 0$

128. Determina el plano perpendicular al segmento de extremos $A(2,-1,0)$ y $B(-2,2,-1)$ y que pasa por su punto medio.

El punto medio es $M\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. El vector normal al plano será $\overrightarrow{AB} = (-4,3,-1)$.

El plano será $-4x + 3y - z + D = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \pi : -4x + 3y - z - 2 = 0$.

129. Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,-1,1)$ y $B(0,3,-2)$ y es paralelo al eje *Z*.

Vectores de dirección: $\overrightarrow{AB} = (-1,4,-3)$, vector director del eje *Z*: $(0,0,1)$.

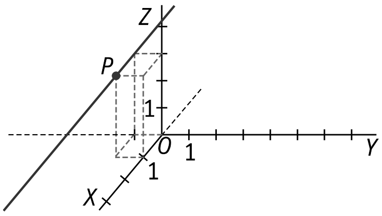
El plano será: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 4 & 0 & y+1 \\ -3 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : 4x + y - 3 = 0$

130. Determina la ecuación del plano paralelo a los ejes de coordenadas X e Y, y que pasa por el punto de intersección de la recta $r:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3t \end{cases}$ con el plano $\pi: x+2y-2z+3=0$.

Punto de intersección de r con el plano $\pi: 2+t+2-2t-6t+3=0 \Rightarrow -7t=-7 \Rightarrow t=1 \Rightarrow P(3,0,3)$.

La ecuación del plano es: $\pi': z=3$

131. Halla la ecuación de la recta de la figura.



$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{0} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=3 \end{cases}$$

132. Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*, donde:

$$r: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-2}=z \qquad s:\begin{cases} x=2t \\ y=t+1 \\ z=t-1 \end{cases}$$

Vectores de dirección: $\vec{u}_r=(2,-2,1)$, $\vec{u}_s=(2,1,1)$ Punto de r: $P_r(-1,0,0)$

El plano es: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & x+1 \\ -2 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: x-2z+1=0$

133. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,1,3)$ y corta a las rectas siguientes. Para ello, estudia previamente la posición relativa que ocupan las dos rectas.

a) $r: \frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$ $\quad s:\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x-2y-z=-2 \end{cases}$

b) $r:\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+2y+z=8 \end{cases}$

a) Vector director de r: $\vec{u}_r=(3,2,-1)$ Punto de r: $A(0,0,2)$

Vector director de s: $\vec{u}_s=(2,1,2)$ Punto de s: $B(-1,0,0)$

Vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=(-1,0,-2)$

Como $\text{rg}(\vec{u}_r,\vec{u}_s)=2$ y $\text{rg}(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{AB})=3 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

El plano π que pasa por P y tiene como vectores $\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{PA}$: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & x \\ 2 & -1 & y-1 \\ -1 & -1 & z-3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-y+z=2$

El plano π' que pasa por P y tiene como vectores $\vec{u}_s$ y $\overrightarrow{PB}$: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 1 & -1 & y-1 \\ 2 & -3 & z-3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-4y+z=-1$

La recta buscada será $t:\begin{cases} x-y+z=2 \\ x-4y+z=-1 \end{cases}$.

b) Vector director de r: $\vec{u}_r = (1,1,1)$ Punto de r: $A(0,1,2)$

Vector director de s: $\vec{u}_s = (-1,0,1)$ Punto de s: $B(4,2,0)$

Vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (4,1,-2)$

Como $\text{rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y $\text{rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{AB}) = 2 \Rightarrow$ Las rectas se cortan.

El punto de corte es:

$$\begin{cases} t-1-t+2+t=2 \\ t+2+2t+2+t=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow Q(1,2,3)$$

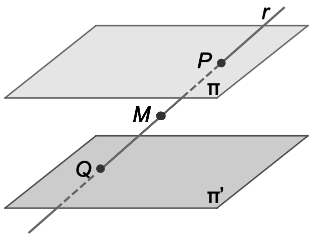
La recta t buscada pasa por P y Q. $\overrightarrow{PQ} = (1,1,0) \Rightarrow t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 3 \end{cases}$

134. Se considera la recta *r* que pasa por el punto $A(3,0,0)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{n} = (1,1,-1)$. Se consideran, también, los planos paralelos de ecuaciones $\pi : 2x + y = 0$ y $\pi' : 2x + y + 3 = 0$.

La recta *r* determina un segmento *PQ* interior a los planos π y π'.

Calcula las coordenadas del punto medio *M* de dicho segmento.

Ecuación de la recta: $r : \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$



Intersección de la recta r y el plano π, es decir, el punto P:

$$2(3+t)+t=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow P(1,-2,2)$$

Intersección de la recta r y el plano π', es decir, el punto Q:

$$2(3+t)+t+3=0 \Rightarrow t=-3 \Rightarrow Q(0,-3,3)$$

Por tanto, el punto medio es $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

135. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1,2,3)$ y que toca a los ejes de coordenadas *X* y *Z*.

Obviamente, la recta buscada es la que pasa por $O(0,0,0)$ y por $P(-1,2,3)$.

Por tanto: $t : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

136. Escribe una expresión algebraica que determine todos los planos que contienen a la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$. De todos los planos anteriores, escribe la ecuación del que pasa por el punto $B(-1,0,4)$.

Haz de planos secantes en la recta $r: x+2y-1+\lambda(2y+z)=0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $2y+z=0$ añadiendo el plano.

Si pasa por B, verifica que $-1-1+4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x+2y-1+\frac{1}{2}(2y+z)=0$

Por tanto, $\pi: 2x+6y+z-2=0$.

137. Del paralelogramo *ABCD* se conocen los vértices $A(-2,0,1)$, $B(1,-1,2)$ y $C(4,2,-3)$.

a) Calcula las coordenadas del vértice *D*.

b) Calcula la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

c) Calcula las ecuaciones de las diagonales del paralelogramo.

a) En un paralelogramo, las diagonales se cortan en su punto medio. El punto medio de estas diagonales es *M*, que es el punto medio de *AC*, es decir, $M(1,1,-1)$

$$\begin{cases} B(1,-1,2) \\ D(a,b,c) \\ M(1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+a}{2} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \frac{-1+b}{2} = 1 \Rightarrow b = 3 \\ \frac{2+c}{2} = -1 \Rightarrow c = -4 \end{cases} \Rightarrow D(1,3,-4)$$

b) La ecuación del plano que contiene a *A*, *B*, *C* y *D* es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & x+2 \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ABCD: x+9y+6z-4=0$$

c) Diagonal *AC*: $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ Diagonal *BD*: $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}$

138. Dado el tetraedro de vértices $A(0,-1,2)$, $B(1,1,-1)$, $C(-1,1,2)$ y $D(-1,0,1)$:

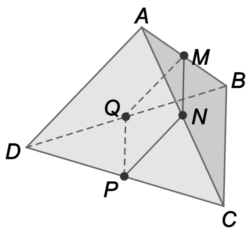
a) Calcula las coordenadas de los puntos medios *M*, *N*, *P* y *Q* de sus aristas *AB, AC*, *DC* y *DB*.

d) Comprueba que los puntos *M*, *N, P* y *Q* son coplanarios.

e) Estudia la posición relativa de la recta que contiene a la arista *AD* y del plano que contiene a *M*, *N*, *P* y *Q*.

a) $M\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{2},0,2\right)$, $P\left(-1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, $Q\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.

b) Plano que pasa por *M*, *N* y *P*:

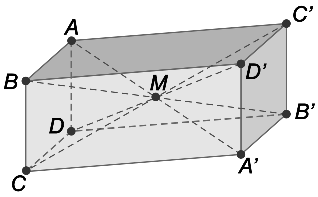


$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & x-\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & y \\ \frac{3}{2} & 1 & z-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 6x+10y+4z-5=0$$

Se comprueba que *Q* pertenece a π: $6\cdot 0+10\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 0-5=0$

c) La recta es paralela al plano.

139. Tres vértices de una de las caras de un paralelepípedo *ABCDA'B'C'D'* son los puntos $A(1,2,-1)$, $B(0,2,1)$ y $C(3,2,-5)$.



a) Calcula las coordenadas del vértice *D.*

b) Sabiendo que todas las diagonales del paralelepípedo se cortan en el punto $M(1,4,1)$, calcula las coordenadas de los otros cuatro vértices de la figura.

a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow(x-1,y-2,z+1)=(3,0,-6)\Rightarrow D=(4,2,-7)$ Por tanto, las coordenadas del vértice *D* serán $D(4,2,-7)$.

b) *M* es el punto medio de *AA'*, *BB'* y *CC'* y *DD'*.

Por tanto:

$A'(1,6,3)$ $B'(2,6,1)$ $C'(-1,6,7)$ $D'(-2,6,9)$.

140. Se consideran los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$, $C(2,0,1)$ y $D(2,1,0)$.

a) Verifica si de esos cuatro puntos hay tres que están alineados. ¿Forman un cuadrilátero?

b) Comprueba que pertenecen a un mismo plano y calcula su ecuación.

a) Se consideran los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-1,0)$ y $\overrightarrow{AD}=(1,0,-1)$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

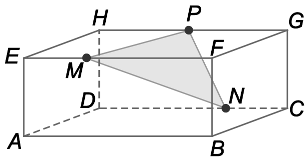
Por tanto, *A*, *B* y *C* están alineados y, por tanto, *ABCD* no es un cuadrilátero.

b) Plano que pasa por *A*, *B* y *D*:

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & x-2\\ 1 & 0 & y-1\\ 0 & -1 & z\end{vmatrix}=0\Rightarrow ABCD: x+y+z-3=0$$

PARA PROFUNDIZAR

141. En el paralelepípedo de la figura se toma como referencia el origen *A* y los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$.



a) Calcula las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* y *H*.

b) Calcula las ecuaciones de los planos *HGC* y *BCD*.

c) Calcula las ecuaciones de las rectas que contienen a las diagonales *DB* y *DG.*

d) Calcula las coordenadas de:

P: punto medio del segmento *HG*.

M: punto tal que $\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{EM}$.

N: punto tal que $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{NC}$.

e) Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo *MPN*.

f) Calcula la ecuación del plano determinado por los puntos *M*, *P* y *N*.

g) Calcula las ecuaciones de la recta que contiene al segmento *MN*.

a) $A(0,0,0)$ $\quad E(0,0,1)$

$B(1,0,0)$ $\quad F(1,0,1)$

$C(1,1,0)$ $\quad G(1,1,1)$

$D(0,1,0)$ $\quad H(0,1,1)$.

b) $HGC: y = 1$ $\quad BCD: z = 0$

c) $DB: \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\quad DG: \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$

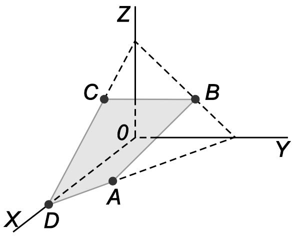
d) $P\left(\frac{1}{2},1,1\right)$, $M\left(\frac{1}{3},0,1\right)$, $N\left(\frac{2}{3},1,0\right)$

e) Baricentro: $G\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

f) $\begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & x-\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow PMN: 6x - y + z - 3 = 0$

g) $MN: \dfrac{x-\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-3}$

142. Se consideran los puntos $A(2,1,0)$, $B(0,2,1)$, $C(1,0,2)$ y $D(3,0,0)$, vértices de un cuadrilátero.



a) Comprueba que pertenecen a un mismo plano y calcula su ecuación.

b) Comprueba que entre los cuatro puntos no hay tres que estén alineados.

c) Calcula las coordenadas del punto donde se cortan las diagonales del cuadrilátero.

d) Calcula las coordenadas de *M*, *N*, *P* y *Q*, puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA*.

e) Comprueba que *MNPQ* es un paralelogramo.

f) Calcula las coordenadas del punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo *MNPQ*.

a) $\overrightarrow{AB}=(-2,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,-1,2)$ y $\overrightarrow{AD}=(1,-1,0)$. $\overrightarrow{BC}=(1,-2,1)$, $\overrightarrow{BD}=(3,-2,-1)$.

Plano que pasa por *A*, *B*, *C* y *D*: $x+y+z-3=0$

b) Entre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ no hay dos proporcionales. $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$ tampoco son proporcionales. Por tanto, no hay tres puntos alineados.

c) Diagonal *AC*: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 2x+z-4=0 \end{cases}$. Diagonal *BD*: $\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$

Punto de corte: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 2x+z-4=0 \\ 2x+3y-6=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow R\left(\frac{9}{5},\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$

d) Punto medio del lado *AB*: $M\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

Punto medio del lado *BC*: $N\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$

Punto medio del lado *CD*: $P(2,0,1)$

Punto medio del lado *DA*: $Q\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},0\right)$

e) $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$, $QP=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$

Como $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, *MNPQ* es un paralelogramo.

f) Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Por tanto, $S\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$

143. Dada la familia de los planos que tienen por ecuación:

$$(2+\lambda)x + y + (\lambda - 1)z = 0$$

a) Calcula dos de ellos.

b) Comprueba que los planos elegidos pasan por el punto $P(1,-3,-1)$.

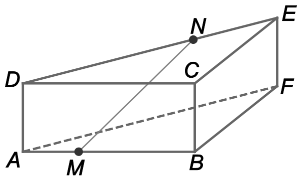
c) ¿Hay alguna recta que esté contenida en todos los planos considerados? En caso afirmativo, escribe su ecuación.

a) $\lambda = 0 \Rightarrow 2x + y - z = 0 \qquad \lambda = 1 \Rightarrow 3x + y = 0$

b) $(2+\lambda) - 3 + (\lambda - 1)(-1) = 2 + \lambda - 3 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow P$ pertenece a todos los planos.

c) $2x + y - z + \lambda(x+z) = 0 \Rightarrow r: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

144. En el prisma de la figura se toma como referencia el origen *A* y los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{AD}$.



a) Calcula las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*.

b) Calcula la ecuación del plano *CBE*.

c) Calcula las ecuaciones de la recta que contiene a la diagonal *BE*.

d) Calcula las coordenadas de:

M: punto tal que $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM}$

N: punto tal que $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{NE}$

e) Calcula las ecuaciones de la recta que contiene al segmento *MN*.

a) $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,0,1)$, $D(0,0,1)$, $E(0,1,1)$, $F(0,1,0)$

b) $CBE: x + y - 1 = 0$

c) $BE: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x + y = 1 \end{cases}$

d) $M\left(\dfrac{1}{3},0,0\right) \qquad N\left(0,\dfrac{2}{3},1\right)$

e) $MN: \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x - \frac{1}{3}}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 6x + 3y = 2 \end{cases}$

145. Considera la recta $r:\begin{cases} x-y+2z=7 \\ x-y-5z=-8 \end{cases}$ y el plano $ax+2y+z=b$.

a) Calcula los valores de *a* y de *b* para que la recta sea paralela al plano.

b) Calcula los valores de *a* y de *b* para que la recta corte al plano.

c) Calcula los valores de *a* y de *b* para que la recta esté contenida en el plano.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix},\ M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & -8 \\ a & 2 & 1 & b \end{pmatrix}$$

$$|M|=7a+14 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -1 & -5 & -8 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix}=23+7b$$

$$7a+14=0\Rightarrow a=-2 \qquad 23+7b=0\Rightarrow b=-\frac{23}{7}$$

a) Para $a=-2$ y $b\neq-\frac{23}{7}$, $\text{rg}(M)=2, \text{rg}(M')=3\Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

b) Para $a\neq 2$, $\text{rg}(M)=\text{rg}(M')=3\Rightarrow$ La recta corta a plano.

c) Para $a=-2$ y $b=-\frac{23}{7}$, $\text{rg}(M)=\text{rg}(M')=2\Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

146. Escribe la condición que deben verificar *a*, *b* y *c* para que los puntos $A(1,0,a)$, $B(1,b,0)$ y $C(c,0,1)$ estén alineados.

$\overrightarrow{AB}=(0,b,-a)$; $\overrightarrow{AC}=(c-1,0,1-a)$

Para que *A*, *B* y *C* estén alineados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben ser proporcionales: $c=1$, $b=0$ y cualquier valor de *a*.

147. ¿Qué condición deben verificar *a*, *b* y *c* para que $A(1,0,a)$, $B(1,b,0)$, $C(c,0,1)$ y $D(1,1,1)$ sean coplanarios?

$\overrightarrow{AB}=(0,b,-a)$, $\overrightarrow{AC}=(c-1,0,1-a)$, $\overrightarrow{AD}=(0,1,1-a)$

Para que *A*, *B*, *C* y *D* sean coplanarios, debe verificarse que $\text{rg}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)<3$. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 0 & c-1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ -a & 1-a & 1-a \end{vmatrix}=0\Rightarrow(1-c)a+b(1-c)(1-a)=0\Rightarrow(1-c)(a+b-ab)=0\Rightarrow\begin{cases} c=1 \\ a+b=ab \end{cases}$$

148. Estudia la posición relativa de los siguientes planos según los diferentes valores de *m*:

$$\begin{aligned} &\pi: mx+y+z=1 \\ &\pi': x+my+z=1 \\ &\pi'': x+y+mz=1 \end{aligned}$$

$|M|=(m-1)^2(m+2)$

Si $m\neq-2$, los tres planos forman triedro y se cortan en el punto $P\left(\frac{1}{m+2},\frac{1}{m+2},\frac{1}{m+2}\right)$.

Si $m=-2$, los tres planos forman un prisma.

Si $m=1$, los tres planos son coincidentes.

149. Calcula los valores de los parámetros *a* y *b* que hacen que los siguientes planos se corten todos en una misma recta.

$$\pi : x + 2y - z = 0$$
$$\pi' : x + 2y - 2z + 1 = 0$$
$$\pi'' : ax + 2y + bz - 1 = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ a & 2 & b \end{pmatrix},\ M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ a & 2 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Para que los planos se corten en una recta, el sistema debe ser compatible indeterminado con un parámetro.

Por tanto: $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ a & 2 & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Luego, los parámetros buscados para que los dos planos se corten en una misma recta son $a = 1$ y $b = 0$.

150. Estudia la posición relativa de los siguientes planos según los diferentes valores de *m* y *n*:

$$\pi : x + y + z = 1$$
$$\pi' : x + 2y + 3z = 1$$
$$\pi'' : y + mz = n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & m & n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 & n \end{pmatrix}$$

Si $m \neq 2$, los tres planos forman un triedro y se cortan en el punto $P\left(1 + \frac{n}{m-2}, \frac{2n}{2-m}, \frac{n}{m-2}\right)$.

Si $m = 2$ y $n = 0$ los tres planos tienen una recta en común.

Si $m = 2$ y $n \neq 0$ los tres planos forman un prisma.

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. En cada caso, calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta *r* que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por los puntos $A(-1,2,4)$ y $B(-3,4,-7)$.

b) Pasa por el punto $A(-3,4,0)$ y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u}=(-1,2,-3)$ y $\vec{v}=(0,-2,5)$.

a) Un vector director será el $\overrightarrow{AB}=(-2,2,-11) \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2t \\ y=2+2t \\ z=4-11t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{-11}$

b) Un vector director será el $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}=4\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} x=-3+4t \\ y=4+5t \\ z=2t \end{cases}$

2. En cada caso, calcula las ecuaciones paramétricas y la general del plano α que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por los puntos $A(-1,2,-1)$, $B(-1,0,3)$ y $C(-1,2,3)$.

b) Pasa por el punto $A(-3,-2,1)$ y uno de sus vectores normales es el $\vec{n}=(1,-2,-3)$.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x+1 \\ -2 & 0 & y-2 \\ 4 & 4 & z+1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+1=0$

b) El plano pedido será de la forma $x-2y-3z+D=0$. Como debe pasar por *A*, entonces:

$$-3+4-3+D=0 \Rightarrow D=2$$

Por tanto, $x-2y-3z+2=0$

3. a) Decide si los puntos *A*, *B* y *C* están alineados o forman triángulo: $A(1,2,-2)$, $B(2,0,1)$ y $C(0,4,-4)$.

b) Decide si los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son coplanarios o forman tetraedro: $A(2,1,1)$, $B(1,0,-2)$, $C(-1,2,0)$ y $D(-2,0,-5)$

a) $\overrightarrow{AB}=(1,-2,3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,-2)$, $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow$ *A*, *B* y *C* forman triángulo.

b) *A*, *B*, *C* y *D* son coplanarios $\Leftrightarrow \text{rg}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\le 2$. $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,1-1)$, $\overrightarrow{AD}=(-4,-1,-6)$.

$rg\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow$ *A*, *B*, *C* y *D* son coplanarios.

4. Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1,-1,2)$ y por la recta dada por la ecuación $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = z$.

La recta *r* pasa por $A(1,2,0)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (-2,-1,1)$.

El plano pedido será el que pasa por *A* y tiene como vectores directores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP} = (-2,-3,2)$.

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & x+1 \\ -1 & -3 & y+1 \\ 1 & 2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y + 4z - 5 = 0$$

5. **a)** Estudia la posición relativa de los planos $\pi: 2x + 3y - 5z - 25 = 0$, $\pi': 3x + 2y + 3z + 4$ y $\pi'': 2x + 2y - 5z - 21 = 0$.

b) Estudia la posición relativa de la recta *r* y del plano π.

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \qquad \pi: x - y + z = -1$$

c) Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{-1} \qquad s: \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -5 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(M) = 3 = \text{rg}(M') \Rightarrow$ Los planos se cortan en un punto.

Las coordenadas del punto de corte se obtienen resolviendo el sistema. Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 25 \\ \quad -5y + 21z = -83 \Rightarrow P(-1,4,-3) \\ \qquad -21z = 63 \end{cases}$$

b) Sustituyendo los valores de la recta en el plano: $\lambda + 2\lambda - 1 - 3\lambda = -1 \Rightarrow 0\lambda = 0 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

c) Tomamos dos puntos de la recta s: $A(0,-1,4)$ y $B(-1,1,3)$

$\vec{u}_r = (1,2,-1)$, $\vec{u}_s = \overrightarrow{AB} = (-1,2,-1)$. Punto de *r*: $A_r(0,-5,6)$. Punto de *s*: $A_s(0,1,-4)$. $\overrightarrow{A_rA_s} = (0,6,-10)$.

Como $\text{rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y $rg(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2 \Rightarrow$ Las rectas *r* y *s* se cortan en un punto.

Las coordenadas del punto de corte se obtienen al resolver el sistema: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + z = 6 \\ 2x + y = -1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow P(1,-3,5)$

6. Dadas las rectas $r: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+k}{-2}$ **y** $s: \begin{cases} x = -4+4\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = -4+5\lambda \end{cases}$

a) Calcula el valor de *k* para que las rectas se corten.

b) Para el valor hallado en el apartado anterior, calcula las coordenadas del punto de corte y la ecuación del plano que determinan las dos rectas.

a) $\vec{u}_r = (-2,1,-2)$, $\vec{u}_s = (4,3,5)$, $A_r(-2,3,-k)$, $A_s(-4,-1,-4)$, $\overrightarrow{A_rA_s} = (-2,-4,k-4)$

Para que las rectas se corten en un punto debe ocurrir que $\text{rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y $\text{rg}(\overrightarrow{A_rA_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$. Entonces:

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ k-4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 10 - 10k = 0 \Rightarrow k = 1$$

b) Sustituyendo los valores de *s* en *r*: $\frac{-2+4\lambda}{-2} = \frac{-4+3\lambda}{1} = \frac{-3+5\lambda}{-2} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P(0,2,1)$

El plano que determinan *r* y *s* en este caso es: $\begin{vmatrix} -2 & 4 & x \\ 1 & 3 & y-2 \\ -2 & 5 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 11x + 2y - 10z + 6 = 0$

7. Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,-2,0)$, que es paralela al plano $\pi: 2x + y = 3$ y que es perpendicular a la recta $r: x = y - 1 = z$.

Sean $\vec{u}_r = (1,1,1)$ vector director de *r* y $\vec{n}_\pi = (2,1,0)$ vector normal al plano. El vector $\vec{w}$, director de la recta buscada, debe ser perpendicular a $\vec{u}_r$ y $\vec{n}_\pi$ a la vez. Por tanto, $\vec{w} = \vec{u}_r \times \vec{n}_\pi = (-1,2,-1)$.

La recta *s* pedida tendrá por ecuaciones: $s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Calcula el valor de *m* para que la recta $r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+3\lambda \end{cases}$ **sea paralela al plano $\pi: 2x + y - mz + 1 = 0$.**

A. $m = 2$

B. $m = 1$

C. En ningún caso la recta es paralela al plano.

D. La recta siempre es paralela al plano.

La solución es B. Un vector de dirección de la recta es $(1,1,3)$. Un vector normal del plano es $(2,1,-m)$. Para que la recta sea paralela al plano, los dos vectores deben ser perpendiculares y, por tanto, su producto escalar nulo:

$$(1,1,3) \cdot (2,1-m) = 2 + 1 - 3m = 0 \Rightarrow m = 1$$

2. **Dada la recta $r: \frac{2x-6}{4} = y-1 = -z$, un punto P y un vector de dirección $\vec{u}$ de ella son:**

A. $P(-6,-1,0)$ $\vec{u}=(4,0,0)$

B. $P(6,1,0)$ $\vec{u}=(4,1,1)$

C. $P(3,1,0)$ $\vec{u}=(2,1,-1)$

D. $P(3,1,0)$ $\vec{u}=(2,1,1)$

La solución es C. $r: \frac{x-3}{2} = y-1 = \frac{z}{-1}$. Se observa que el punto y el vector director son los indicados en esa respuesta.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

3. **Si A y B son dos puntos diferentes del espacio y el vector $\vec{n}=(2,1,3)$ es un vector normal del plano π.**

A. Si A y B son dos puntos del plano $\pi \Rightarrow \vec{n}$ y $\overrightarrow{AB}$ son perpendiculares.

B. $\vec{n}$ y $\overrightarrow{AB}$ son perpendiculares $\Rightarrow$ A y B son puntos del plano π.

C. Si al menos uno de los dos puntos A y B pertenece a $\pi \Rightarrow \vec{n}$ y $\overrightarrow{AB}$ son perpendiculares.

D. $\vec{n}$ y $\overrightarrow{AB}$ no son perpendiculares $\Rightarrow$ Al menos uno de los dos puntos A y B no pertenecen a π.

Una solución es A porque $\vec{n}$ es perpendicular a cualquier vector de dirección del plano y a $\overrightarrow{AB}$. La otra solución correcta es D porque si A y B pertenecen al plano, entonces $\vec{n}$ es perpendicular $\overrightarrow{AB}$.

4. **Se consideran los puntos del espacio $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ y $O(0,0,0)$.**

A. Si $a=b=0 \Rightarrow A$, B, C y D son coplanarios.

B. Si A, B, C y O son coplanarios $\Leftrightarrow abc=0$

C. Si alguno de los valores a, b y c es no nulo $\Rightarrow$ el volumen del tetraedro es diferente de 0.

D. El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y O es abc.

El plano que pasa por los puntos A, B y C es $bcx+acy+abz=abc$. Para que O pertenezca a este plano es suficiente con que uno de los valores a, b o c sea igual a 0.

Las soluciones son A y B.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

5. **Se consideran los planos $\pi_1: Ax+By+Cz+D=0$, $\pi_2: A'x+B'y+C'z+D'=0$, $\pi_3: A''x+B''y+C''z+D''=0$ y la matriz $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$.**

1. El rango de la matriz M es 2.

2. Los planos se cortan en una recta.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$.

D. 1 y 2 no se pueden dar a la vez.

El rango de la matriz $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ puede ser 3, por tanto $1 \not\Rightarrow 2$. Por tanto, la solución es C.

Señala el dato innecesario para contestar

6. **Para calcular el área y el perímetro del cuadrilátero es *ABCD* se dan los siguientes datos:**

1. Las coordenadas de los vértices opuestos *A* y *C*.

2. Las coordenadas del vértice *B*.

3. Las coordenadas del punto donde se cortan las diagonales.

4. El hecho de que el cuadrilátero es un paralelogramo.

Puede eliminarse el dato:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

No es necesario conocer el punto donde se cortan las diagonales del cuadrilátero. Por tanto, la respuesta correcta es C.