12 Propiedades métricas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Calcula el ángulo que forman las siguientes rectas.

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x+y=-3 \\ 2x-z=3 \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = (1,1,-1) \qquad \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,2,-2)$$

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot(-1)+1\cdot 2+(-1)\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \simeq 54^{\circ}\ 44$$

3. Halla los vectores directores de las rectas y el ángulo que forman.

$$r:\begin{cases} 2x-4y+z=-5 \\ -x+y-4z=3 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 3x+z=1 \\ -2x+3y=-4 \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (15,7,-2) \qquad \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3,-2,9)$$

$$\cos\alpha = \frac{|15\cdot(-3)+7\cdot(-2)+(-2)\cdot 9|}{\sqrt{15^2+7^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+9^2}} = \frac{77}{\sqrt{26\,132}} \Rightarrow \alpha \simeq 61^{\circ}\ 33'\ 16''$$

4. Ejercicio resuelto.

5. Calcula el ángulo formado por los planos:

a) $\pi: 2x+3y-z+6=0$ y $\pi': 2y-z+5=0$ **b)** $\pi: 2x-3y+2z-6=0$ y $\pi': 3x+6y+6z-1=0$

a) Vectores normales de π y de π' son $\vec{n}_\pi = (2,3,-1)$ y $\vec{n}_{\pi'} = (0,2,-1)$

$$\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right) = \frac{|\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_{\pi'}|} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{70}} \Rightarrow \left(\widehat{\pi,\pi'}\right) = \arccos\frac{7}{\sqrt{70}} \simeq 33^{\circ}\ 13'$$

b) Vectores normales de π y de π' son $\vec{n}_\pi = (2,-3,2)$ y $\vec{n}_{\pi'} = (3,6,6)$

$$\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_{\pi'} = 2\cdot 3-3\cdot 6+2\cdot 6 = 0$$

Dado que el producto escalar de dichos vectores es nulo, deducimos que los planos son ortogonales.

6. Calcula el valor de *m* para que los planos:

$$\pi: 2x - 3y + z = 1 \qquad \pi': x - 2y + mz = 0$$

a) Sean perpendiculares. **b)** Formen un ángulo de 60º.

a) Los planos serán perpendiculares si sus vectores normales lo son:

$\vec{n}_\pi = (2,-3,1)$ y $\vec{n}_{\pi'} = (1,-2,m)$

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'} = 2 + 6 + m = 0 \Rightarrow m = -8$

b) $\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right) = \dfrac{\left|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{n}_{\pi'}\right|} = \dfrac{8+m}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5+m^2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{70+14m^2} = 16 + 2m \Rightarrow m = \dfrac{16 \pm \sqrt{721}}{5}$

7. Ejercicio resuelto.

8. Calcula el ángulo formado por *r* y π en los siguientes casos.

a) $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-10}{-2}$ $\qquad \pi: 2x - y = 0$

b) $r: x - 1 = \dfrac{y+2}{\sqrt{2}} = z - 3$ $\qquad \pi: 2z - 3 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ $\qquad \pi: x - \dfrac{1}{2}y + z = 0$

a) Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (2,-1,0)$ Vector director de *r*: $\vec{u}_r = (1,1,-2)$

$$\operatorname{sen}\left(\widehat{\pi,r}\right) = \frac{\left|\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{u}_r\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Rightarrow \left(\widehat{\pi,r}\right) = \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{30}} \simeq 10º\ 31'$$

b) Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (0,0,2)$ Vector director de *r*: $\vec{u}_r = \left(1,\sqrt{2},1\right)$

$$\operatorname{sen}\left(\widehat{\pi,r}\right) = \frac{\left|\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{u}_r\right|} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{\pi,r}\right) = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} \simeq 30º$$

c) Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = \left(1,-\dfrac{1}{2},1\right)$ Vector director de *r*: $\vec{u}_r = (1,1,1)$

$$\operatorname{sen}\left(\widehat{\pi,r}\right) = \frac{\left|\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{u}_r\right|} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\widehat{\pi,r}\right) = \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 35º16'$$

9. Calcula el ángulo formado por la recta *r* y el plano π.

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=0\\ x-z=0\end{cases} \qquad \pi: x+y-2z=3$$

Vector normal de π: $\vec{n}_\pi=(1,1,-2)$ Vector director de r: $\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=(3,3,3)\parallel(1,1,1)$

$$\operatorname{sen}\left(\widehat{\pi,r}\right)=\frac{\left|\vec{n}_\pi\cdot\vec{u}_r\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{u}_r\right|}=\frac{1+1-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=0 \Rightarrow \left(\widehat{\pi,r}\right)=\operatorname{arcsen}0\simeq 0^\circ$$

Por tanto, la recta es paralela al plano.

10. Calcula el valor de *m*, si es que existe, para que la recta $r:\begin{cases}x=2+mz\\ y=1+z\end{cases}$ y el plano $\pi: x-3y-3z-2=0$:

a) Sean paralelos. **b)** Sean perpendiculares.

a) Los vectores $\vec{n}_\pi$ y $\vec{u}_r$ deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser nulo:

$\vec{n}_\pi\cdot\vec{u}_r=m-3-3=0\Rightarrow m=6.$

b) Los vectores $\vec{n}_\pi$ y $\vec{u}_r$ deben ser paralelos, es decir, proporcionales:

$$\frac{1}{m}=\frac{-3}{1}=\frac{-3}{1}\Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

11. Calcula la proyección ortogonal de $P(2,-2,0)$ sobre el plano $\pi: y+2z=3$ y sobre la recta $r:\begin{cases}3x+4y=8\\ x+4z=-20\end{cases}$.

Para la calcular la proyección ortogonal de P sobre el plano π. Como $-2+0\neq 3\Rightarrow P\notin\pi$.

Vector normal de π: $\vec{n}_\pi=(0,1,2)$ Recta perpendicular a π que pasa por P: $r:\begin{cases}x=2\\ y=-2+\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}$

Se obtiene P_π, la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π resolviendo el sistema formado por la recta r y el plano π.

$-2+\lambda+4\lambda=3\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow P_\pi(2,1,2)$

Para calcular la proyección ortogonal de P sobre la recta r. Como $3\cdot 2+4\cdot(-2)=-2\neq 8\Rightarrow P\notin r$.

Se calcula el plano perpendicular a r y que pasa por P.

$$\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=(16,-12,-4)\parallel(4,-3,-1)$$

$4x-3y-z+D=0\Rightarrow 8+6-0+D=0\Rightarrow D=-14\Rightarrow\pi: 4x-3y-z-14=0$

Se resuelve el sistema $\begin{cases}3x+4y=8\\ x+4z=-20\\ 4x-3y-z=14\end{cases}$ y se tiene la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r

$P_r\left(\frac{30}{13},\frac{297}{26},-\frac{145}{26}\right)$.

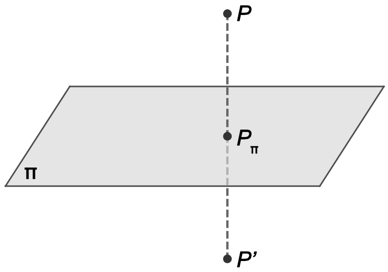
12. Halla el simétrico de $P(1,1,-2)$ respecto del plano $\pi : x - 3y + 4z - 16 = 0$ y respecto de la recta $r : \begin{cases} 24x - 36y = -7 \\ 2z = 1 \end{cases}$.

Para calcular el simétrico de *P* respecto del plano π

Sea *P'* el punto simétrico de *P* respecto del plano π.

Como $1 - 3 - 8 - 16 \neq 0 \Rightarrow P \notin \pi$

Se calcula el punto P_π, proyección ortogonal de *P* sobre π:



$$PP' : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = -2 + 4\lambda \end{cases}$$

$$P_\pi = \pi \cap PP' \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = -2 + 4\lambda \\ x - 3y + 4z - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P_\pi(2,-2,2)$$

Se supone que el punto P' buscado es $P'(a,b,c)$ y se obliga a que P_π sea el punto medio de *P* y de P':

$$\frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow a = 3 \qquad \frac{b+1}{2} = -2 \Rightarrow b = -5 \qquad \frac{c-2}{2} = 2 \Rightarrow c = 6$$

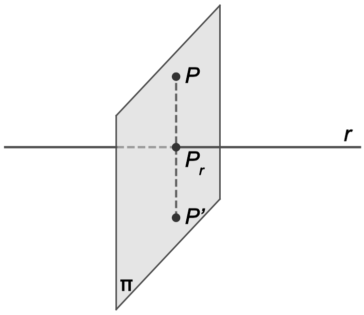
Por tanto, $P'(3,-5,6)$.

Para calcular el simétrico de *P* respecto de la recta *r*:

Sea *P'* el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

Como $2 \cdot (-2) = -4 \neq 1 \Rightarrow P \notin r$

Se calcula el punto P_π, proyección ortogonal de *P* sobre *r*:



$\vec{u}_r = (3,2,0) \Rightarrow$ El plano π perpendicular a *r* y que pasa por *P* es:

$$3x + 2y + D = 0 \Rightarrow 3 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \pi : 3x + 2y - 5 = 0$$

$$P_\pi = \pi \cap r \Rightarrow \begin{cases} 24x - 36y = -7 \\ 2z = 1 \\ 3x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_\pi\left(\frac{83}{78}, \frac{47}{52}, \frac{1}{2}\right)$$

Se supone que el punto *P'* buscado es $P'(a,b,c)$ y se obliga a que P_π sea el punto medio de *P* y de P':

$$\frac{a+1}{2} = \frac{83}{78} \Rightarrow a = \frac{44}{39} \qquad \frac{b+1}{2} = \frac{47}{52} \Rightarrow b = \frac{21}{26} \qquad \frac{c-2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 3$$

Por tanto, $P'\left(\frac{44}{39}, \frac{21}{26}, 3\right)$.

13 a 16. Ejercicios resueltos.

17. Comprueba si el triángulo de vértices $A(2,-1,4)$, $B(1,3,-4)$ y $C(-3,-1,3)$ es equilátero, isósceles o escaleno.

Los lados del triángulo miden:

$$|\overline{BC}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-7)^2} = 9$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-8)^2} = 9 \text{ .}$$

Se trata de un triángulo isósceles.

18. Calcula la distancia del punto *P* al plano π:

a) $P(1,-2,6)$ $\qquad \pi : 2x + y - 2z + 3 = 0$

b) $P\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{2}{3}\right)$ $\qquad \pi : -3x - y - 2z - 16 = 0$

c) $P(4,-1,3)$ $\qquad \pi : x + y - 2z + 3 = 0$

a) $d(P,\pi) = \dfrac{|2\cdot 1 - 2 - 2\cdot 6 + 3|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{9}{3} = 3$ u

b) $d(P,\pi) = \dfrac{\left|-\frac{3}{2} + 1 + \frac{4}{3} - 16\right|}{\sqrt{9+1+4}} = \dfrac{91}{6\sqrt{14}} = \dfrac{13\sqrt{14}}{12}$ u

c) $d(P,\pi) = \dfrac{|4-1-6+3|}{\sqrt{1+1+4}} = 0 \Rightarrow P \in \pi$. La distancia es cero.

19. Calcula los valores de *m* para que la distancia entre los planos paralelos:

$\pi : 3x - 4y - 12z + m = 0$ $\qquad \pi' : \frac{3}{2}x - 2y - 6z + 3 = 0$

sea de 2 unidades de longitud.

El punto $P(-2,0,0) \in \pi'$.

$$d(P,\pi) = \frac{|-6+m|}{\sqrt{9+16+144}} = \frac{|-6+m|}{13} = 2 \Rightarrow \begin{cases} -6+m = 26 \Rightarrow m = 32 \\ 6-m = 26 \Rightarrow m = -20 \end{cases}$$

20. Ejercicio interactivo.

21. Calcula la distancia del punto $P(-2,3,5)$ a la recta *r* en los siguientes casos.

a) $r:\begin{cases}2x-y+z=2\\x+2y+6z=9\end{cases}$

b) $r:\begin{cases}x=2-\lambda\\y=2+2\lambda\\z=2+3\lambda\end{cases}$

c) $r:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-3}$

d) $r:\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$

a) Se obtienen un punto y un vector de dirección de *r*:

$$\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&1\\1&2&6\end{vmatrix}=(-8,-11,5)\qquad Q(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(3,-2,-4),\ \vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-8&-11&5\\3&-2&-4\end{vmatrix}=(54,-17,49),\ |\vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{54^2+17^2+49^2}=\sqrt{5606}$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}=\frac{\sqrt{5606}}{\sqrt{8^2+11^2+5^2}}=\frac{\sqrt{5606}}{\sqrt{210}}=\sqrt{\frac{2803}{105}}\ \text{u.}$$

b) Se obtienen un punto y un vector de dirección de *r*:

$\vec{u}_r=(-1,2,3)\qquad Q(2,2,2)$

$$\overrightarrow{PQ}=(4,-1,-3),\ \vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&3\\4&-1&-3\end{vmatrix}=(-3,9,-7),\ \left|\vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-3)^2+9^2+(-7)^2}=\sqrt{139}$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}=\frac{\sqrt{139}}{\sqrt{1+4+9}}=\sqrt{\frac{139}{14}}\ \text{u.}$$

c) Se obtienen un punto y un vector de dirección de *r*:

$\vec{u}_r=(3,4,-3)\qquad Q(2,0,1)$

$$\overrightarrow{PQ}=(4,-3,-4),\ \vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&4&-3\\4&-3&-4\end{vmatrix}=(-25,0,-25),\ \left|\vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{25^2+25^2}=25\sqrt{2}$$

$$d(P,r)=\frac{\left|u_r\times\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}=\frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{34}}=\frac{25\sqrt{17}}{17}\ \text{u.}$$

d) Se obtienen un punto y un vector de dirección de *r*:

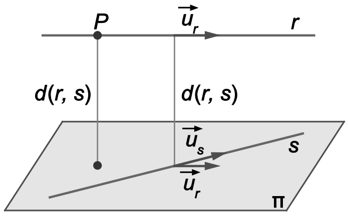
$\vec{u}_r=(0,0,1)\qquad Q(2,-2,0)$

$$\overrightarrow{PQ}=(4,-5,-5),\ \vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&1\\4&-5&-5\end{vmatrix}=(5,4,0),\ \left|\vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}_r\times\overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}=\frac{\sqrt{41}}{1}=\sqrt{41}\ \text{u.}$$

22. Comprueba que las rectas *r* y *s* se cruzan y calcula la distancia entre ellas.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} 2x + 3y + z = -2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$



$\vec{u}_r = (2,-1,1)$, $P(1,1,1)$

$$\vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,-1),\ Q(0,0,-2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(M) = 2$, $|M'| = 6 - 1 + 1 - 1 + 2 - 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M') = 3$

Por tanto, las rectas se cruzan.

Se halla el plano π que contiene a *s* y es paralelo a *r*.

$$\begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: y + z + 2 = 0.$$

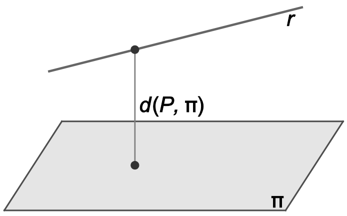
$$d(r,s) = d(P,\pi) = \frac{|1+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ \text{u}$$

23. Comprueba que la recta $r: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ es paralela al plano $\pi: x + 2z = 4$ y calcula la distancia que los separa.

Se comprueba la posición relativa de la recta y el plano:

$\vec{u}_r = (-4,-1,2)$ $\qquad$ $\vec{n}_\pi = (1,0,2)$ $\qquad$ $P(3,-2,-1)$

Como $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = -4 + 4 = 0 \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow r \parallel \pi$



Se calcula la distancia: $d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|3-2-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ u

24. Ejercicio resuelto.

25. Comprueba que *r* y *s* se cruzan y halla su perpendicular común.

$$r:\begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$$

Las ecuaciones paramétricas *r* y *s* son: $r:\begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 2\mu \end{cases}$

El vector $(-1 + 2\mu - 2\lambda, -\mu - \lambda, 2\mu - \lambda)$ debe ser perpendicular a $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$:

$$\begin{cases} -2 + 4\mu - 4\lambda - \mu - \lambda + 2\mu - \lambda = 0 \\ -2 + 4\mu - 4\lambda + \mu + \lambda + 4\mu - 2\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6\lambda + 5\mu = 2 \\ -5\lambda + 9\mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{8}{29},\ \mu = \frac{2}{29}$$

La perpendicular común será la recta que pasa por $A\left(\frac{42}{29}, -\frac{37}{29}, -\frac{8}{29}\right)$ y $B\left(\frac{33}{29}, -\frac{31}{29}, \frac{4}{29}\right)$ es

$$t: \frac{x - \frac{42}{29}}{-9} = \frac{y + \frac{37}{29}}{6} = \frac{z + \frac{8}{29}}{12}.$$

26. Determina si las siguientes rectas se cruzan y, en su caso, halla su perpendicular común.

$$r:\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases} \qquad s: x = y = \frac{z-1}{-1}$$

Las ecuaciones paramétricas *r* y *s* son: $r:\begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

El vector $(\lambda + \mu - 2, \lambda - \mu - 2, 1 - \lambda - \mu)$ debe ser perpendicular a $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$:

$$\begin{cases} -\lambda - \mu + 2 + \lambda - \mu - 2 + 1 - \lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu - 2 + \lambda - \mu - 2 - 1 + \lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda - 3\mu = -1 \\ 3\lambda + \mu = 5 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{7}{4},\ \mu = -\frac{1}{4}$$

La perpendicular común será la recta que pasa por $A\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ y $B\left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{3}{4}\right)$:

$$t: \frac{x - \frac{9}{4}}{1} = \frac{y - \frac{7}{4}}{0} = \frac{z + \frac{1}{4}}{1}$$

27. Calcula el plano mediador del segmento de extremos *A* y *B*.

a) $A(-2,4,5)$; $B(-4,6,5)$

b) $A(-1,2,-3)$; $B(-3,-4,2)$

a) $M(-3,5,5)$ $\qquad \overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$ que es paralelo a $(-1,1,0)$.

$-x + y + D = 0 \Rightarrow 3 + 5 + D = 0 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow -x + y - 8 = 0$

b) $M\left(-2,-1,-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad \overrightarrow{AB} = (-2,-6,5)$

$-2x - 6y + 5z + D = 0 \Rightarrow 4 + 6 - \frac{5}{2} + D = 0 \Rightarrow D = -\frac{15}{2} \Rightarrow -2x - 6y + 5z - \frac{15}{2} = 0$

28. Calcula la ecuación de los planos que dividen a los diedros determinados por los planos $\pi: 2x + y - 2z = 1$ y $\pi': 2x + 2y + z = 5$ en dos partes iguales.

Sea P un punto genérico del espacio.

$$d(P,\pi) = d(P,\pi') \Rightarrow \frac{2x + y - 2z - 1}{\sqrt{4+1+4}} = \pm\frac{2x + 2y + z - 5}{\sqrt{4+4+1}} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 2x + 2y + z - 5 \\ 2x + y - 2z - 1 = -2x - 2y - z + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z - 4 = 0 \\ 4x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$$

29 a 31. Ejercicios resueltos.

32. Escribe la ecuación de las siguientes superficies esféricas.

a) De centro el punto $C(-2,1,2)$ y de radio, $r = 4$.

b) Uno de sus diámetros es el segmento de extremos $A(2,-1,3)$ y $B(4,-1,1)$.

a) $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 = r^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 4 + 1 + 4 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0$

b) El centro estará situado en el punto medio del segmento AB: $M(3,-1,2)$.

El radio será la distancia de M a A: $r = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$

La esfera es: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 9 + 1 + 4 - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 12 = 0$

33. Halla el centro y el radio de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 11 = 0$.

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 11 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} C(1,-2,3) \\ r = \sqrt{3} \end{cases}$$

34. Halla la ecuación de la superficie esférica de centro $P(2,-2,0)$ y tal que el plano que pasa por los puntos $A(0,1,-1)$, $B(-1,0,-1)$ y $C(1,1,1)$ es tangente a ella. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.

Plano π que pasa por A, B y C: $\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2y - z + 1 = 0$

Radio de la esfera: $r = d(P,\pi) = \dfrac{|4+4+1|}{\sqrt{9}} = 3$

La ecuación de la esfera es: $(x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$

El punto de tangencia es:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9 \\ 2x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \\ -4x + 4y = -2z + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$. El punto de tangencia es el $Q(0,0,1)$.

35. Halla la ecuación de la superficie esférica de radio 4, tangente a los planos *XY* e *YZ* y que pase por el punto $A\left(1,2,4+\sqrt{7}\right)$. Calcula los puntos de tangencia con dichos planos.

Siendo el radio $r = 4$ y siendo la superficie esférica tangente a *XY* e *YZ*, el centro deberá ser de la forma $C(4,b,4)$.

Por tanto, $d(C,A) = 4 \Rightarrow \sqrt{9+(b-2)^2+7} = 4 \Rightarrow (b-2)^2 = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow C(4,2,4)$

La ecuación de la superficie esférica será $(x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2 = 16$.

El punto de tangencia con *XY* es $(4,2,0)$, y el punto de tangencia con *YZ*, $(0,2,4)$.

36 y 37. Ejercicios resueltos.

38. Calcula el área del triángulo *ABC*, siendo:

a) $A(3,-2,3)$, $B(3,1,1)$ y $C(3,-1,-1)$.

b) $A(3,1,-1)$, $B(4,-3,0)$ y *C* es el punto intersección de las rectas: $r: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-11}{-2} = \dfrac{z+5}{1}$ $\quad s: \begin{cases} x+y-2z = 15 \\ x = 1+y \end{cases}$

a) $\overrightarrow{AB} = (0,3,-2)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (0,1,-4)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-10,0,0) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{10^2}}{2} = 5 \text{ u}^2.$$

b) $C: \begin{cases} 2x+y = 17 \\ y+2z = 1 \\ x+y-2z = 15 \\ x-y = 1 \end{cases} \Rightarrow C(6,5,-2)$ $\qquad \overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (3,4,-1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (0,4,16) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{4^2+16^2}}{2} = \sqrt{68} \text{ u}^2.$$

39. Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$, $D(0,1,4)$, calcula:

a) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

b) El volumen del tetraedro determinado por los vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

a) $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (3,4,-1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (0,4,16) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{4^2+16^2}}{2} = \sqrt{68} \text{ u}^2.$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1,-4,1)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (3,4,-1)$ $\qquad \overrightarrow{AD} = (-2,1,6)$

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\left|24+3-8+8+1+72\right| = \frac{100}{6} \text{ u}^3.$$

40. Ejercicio interactivo.

41 a 46. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Ángulos

47. Calcula el ángulo que forman las rectas *r* y *s*.

a) $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 2-t \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x+y=4 \\ 2y-z=4 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x-2y=10 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Vectores directores de *r* y de *s*: $\vec{u}_r = (1,-1,2)$ y $\vec{u}_s = (2,-1,-1)$

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s\right|}{\left|\vec{u}_r\right|\left|\vec{u}_s\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \left(\widehat{r,s}\right) = \arccos\frac{1}{6} \simeq 80^\circ 24'$$

b) Vectores directores de *r* y de *s*: $\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,2)$ y $\vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-1,1)$

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s\right|}{\left|\vec{u}_r\right|\left|\vec{u}_s\right|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\widehat{r,s}\right) = \arccos\frac{1}{2} \simeq 60^\circ$$

48. ¿Cuánto mide el ángulo que forman los planos π y π'?

a) $\pi: 2x+3y-z+6=0$ $\qquad \pi': 2y-z+5=0$

b) $\pi: 2x-3y+2z-6=0$ $\qquad \pi': 3x+6y+6z-1=0$

c) $\pi: x-2y+z-1=0$ $\qquad \pi': 2x+2y+z-3=0$

a) $\vec{n}_\pi = (2,3,-1)$ $\qquad \vec{n}_{\pi'} = (0,2,-1)$

$$\cos(\pi,\pi') = \frac{\left|3\cdot 2 - 1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{70}} \Rightarrow (\pi,\pi') = \arccos\frac{7}{\sqrt{70}} \simeq 33^\circ 12' 39''$$

b) $\vec{n}_\pi = (2,-3,2)$ $\qquad \vec{n}_{\pi'} = (3,6,6)$

$$\cos(\pi,\pi') = \frac{\left|2\cdot 3 - 3\cdot 6 + 2\cdot 6\right|}{\sqrt{4+9+4}\cdot\sqrt{9+36+36}} = 0 \Rightarrow (\pi,\pi') = \arccos 0 \simeq 90^\circ$$

c) $\vec{n}_\pi = (1,-2,1)$ $\qquad \vec{n}_{\pi'} = (2,2,1)$

$$\cos(\pi,\pi') = \frac{\left|1\cdot 2 - 2\cdot 2 + 1\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{54}} \Rightarrow (\pi,\pi') = \arccos\frac{1}{\sqrt{54}} \simeq 82^\circ 10' 44''$$

49. Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

a) $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-10}{-2}$ $\qquad \pi: 2x - y = 0$

b) $r: x = y = z$ $\qquad \pi: 2x - y + 2z = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ $\qquad \pi: x - 2y + 3z + 8 = 0$

a) Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (2,-1,0)$ $\qquad$ Vector director de r: $\vec{u}_r = (1,1,-2)$

$$\text{sen}(\widehat{\pi,r}) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{n}_\pi||\vec{u}_r|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Rightarrow (\widehat{\pi,r}) = \text{arcsen}\frac{1}{\sqrt{30}} \simeq 10^\circ 31'$$

b) Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (2,-1,2)$ $\qquad$ Vector director de r: $\vec{u}_r = (1,1,1)$

$$\text{sen}(\widehat{\pi,r}) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{n}_\pi||\vec{u}_r|} = \frac{3}{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow (\widehat{\pi,r}) = \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 35^\circ 16'$$

c) Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (1,-2,3)$ $\qquad$ Vector director de r: $\vec{u}_r = (3,-1,1)$

$$\text{sen}(\widehat{\pi,r}) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{n}_\pi||\vec{u}_r|} = \frac{8}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{154}} \Rightarrow (\widehat{\pi,r}) = \text{arcsen}\frac{8}{\sqrt{154}} \simeq 40^\circ 8'24''$$

50. Halla el ángulo que forma la recta que une los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(-2,0,3)$ con el plano $\pi: -2x + y - z - 3 = 0$.

Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (-2,1,-1)$ $\qquad$ Vector director de r: $\vec{u}_r = \overrightarrow{PQ} = (-4,1,3)$

$$\text{sen}(\widehat{\pi,r}) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{n}_\pi||\vec{u}_r|} = \frac{|-2\cdot(-4) + 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{26}} = \frac{6}{\sqrt{156}} \Rightarrow (\widehat{\pi,r}) = \text{arcsen}\frac{6}{\sqrt{156}} \simeq 28^\circ 42'38''$$

Proyecciones ortogonales. Puntos simétricos

51. Calcula la proyección ortogonal de P sobre el plano π.

a) $P(1,-2,1)$ y $\pi: 2x + y - z = 0$

b) $P(-1,2,3)$ y π es el plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ y al punto $Q(0,2,-3)$.

a) El vector normal del plano π es un vector director de la recta buscada r: $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

$$P_\pi = r \cap \pi \Rightarrow 2(1+2\lambda) - 2 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6} \Rightarrow P_\pi\left(\frac{4}{3}, -\frac{11}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

b) La ecuación de π es: $\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-2,-5)$

$$x + 2y - z + \lambda(2x - y + 3) = 0 \Rightarrow 4 + 3 + \lambda(-2+3) = 0 \Rightarrow \lambda = -7 \Rightarrow \pi: -13x + 9y - z = 21$$

El vector normal del plano π es un vector director de la recta buscada r: $r: \begin{cases} x = -1 - 13\lambda \\ y = 2 + 9\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

$$P_\pi = r \cap \pi \Rightarrow -13(-1-13\lambda) + 9(2+9\lambda) - (3-\lambda) = 21 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{251} \Rightarrow P_\pi\left(-\frac{160}{251}, \frac{439}{251}, \frac{760}{251}\right)$$

52. En los siguientes casos, calcula la proyección ortogonal de *P* sobre la recta *r*.

a) $P(-2,-4,9)$ y $r:\begin{cases} x-2y-2z=0 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$

b) $P(-1,-5,6)$ y *r* es la recta que pasa por los puntos $A(0,-8,4)$ y $B(1,-4,12)$.

a) Plano perpendicular a *r* y que pasa por *P*: $\vec{u}_r=\vec{n}_\pi=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(-8,-7,3)\Rightarrow -8x-7y+3z+k=0$

Como $-8(-2)-7\cdot(-4)+3\cdot 9+k=0\Rightarrow k=-71\Rightarrow \pi:-8x-7y+3z-71=0$

$$P_\pi=r\cap\pi\Rightarrow\begin{cases} x-2y-2z=0 \\ 2x-y+3z=1 \\ -8x-7y+3z=71 \end{cases}\Rightarrow P_\pi\left(-\frac{1294}{3},-\frac{765}{6},\frac{118}{61}\right)$$

b) $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-8+4\lambda \\ z=4+8\lambda \end{cases}$

Plano perpendicular a *r* y que pasa por *P*: $x+4y+8z+k=0$.

Como $-1-20+48+k=0\Rightarrow k=-27\Rightarrow \pi: x+4y+8z-27=0$

$$P_\pi=r\cap\pi\Rightarrow\begin{cases} x=\lambda \\ y=-8+4\lambda \\ z=4+8\lambda \\ x+4y+8z-27=0 \end{cases}\Rightarrow 81\lambda=27\Rightarrow\lambda=\frac{1}{3}\Rightarrow P_\pi\left(\frac{1}{3},-\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)$$

53. Halla la proyección ortogonal de la recta *r* de ecuación $r:\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$ sobre el plano π de ecuación $\pi: x+y-z=4$.

$$r\cap\pi:\begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3-\lambda \\ x+y-z=4 \end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{19}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Se calcula la proyección del punto $Q(1,-2,3)$ de *r* sobre π:

$$s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}\qquad P_\pi=s\cap\pi\Rightarrow 1+\lambda-2+\lambda-3+\lambda=4\Rightarrow\lambda=\frac{8}{3}\Rightarrow Q_\pi\left(\frac{11}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

La recta r', proyección ortogonal de *r* sobre π, será la recta que pasa por *P* y Q_π:

$$r':\frac{x-\frac{11}{3}}{2}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{3}}{1}$$

54. Calcula el simétrico del punto P respecto del plano π en los siguientes casos.

a) $P(2,-5,6)$ y $\pi: x+y-5z+6=0$.

b) $P(1,-4,3)$ y π es el plano que pasa por los puntos $A(1,0,-2)$, $B(0,1,-3)$, $C(-1,0,0)$.

c) $P(1,0,2)$ y π es el plano perpendicular al eje X y pasa por el punto $B(4,1,-2)$.

a) Se calcula la proyección de P sobre π:

$$r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -5+\lambda \\ z = 6-5\lambda \end{cases}$$

$$P_\pi = r \cap \pi \Rightarrow 2+\lambda-5+\lambda-30+25\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda = \frac{27}{27} = 1 \Rightarrow P_\pi(3,-4,1)$$

Suponiendo que el simétrico buscado es $P'(a,b,c) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2+a}{2} = 3 \Rightarrow a = 4 \\ \dfrac{-5+b}{2} = -4 \Rightarrow b = -3 \\ \dfrac{6+c}{2} = 1 \Rightarrow c = -4 \end{cases} \Rightarrow P'(4,-3,-4)$

b) $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 2x+4y+2z+2=0 \Rightarrow x+2y+z+1=0$

Se calcula la proyección de P sobre π:

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -4+2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

$$P_\pi = r \cap \pi \Rightarrow 1+\lambda-8+4\lambda+3+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow P_\pi\left(\frac{3}{2},-3,\frac{7}{2}\right)$$

Suponiendo que el simétrico buscado es $P'(a,b,c) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+a}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = 2 \\ \dfrac{-4+b}{2} = -3 \Rightarrow b = -2 \\ \dfrac{3+c}{2} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow c = 4 \end{cases} \Rightarrow P'(2,-2,4)$

c) $\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x-4=0$

Se calcula la proyección de P sobre π:

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$P_\pi = r \cap \pi \Rightarrow (1+\lambda)-4=0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow P_\pi(4,0,2)$$

Suponiendo que el simétrico buscado es $P'(a,b,c) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+a}{2} = 4 \Rightarrow a = 7 \\ \dfrac{0+b}{2} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \dfrac{2+c}{2} = 2 \Rightarrow c = 2 \end{cases} \Rightarrow P'(7,0,2)$.

Distancias

55. Calcula el perímetro del triángulo de vértices $A(4,-5,-2)$, $B(-6,10,3)$, $C(14,0,3)$ y comprueba que es rectángulo en *A*.

$$AB = d(A,B) = \sqrt{(-6-4)^2+(10+5)^2+(3+2)^2} = \sqrt{350}$$

$$AC = d(A,C) = \sqrt{(14-4)^2+(0+5)^2+(3+2)^2} = \sqrt{150}$$

$$BC = d(B,C) = \sqrt{(14+6)^2+(0-10)^2+(3-3)^2} = \sqrt{500}$$

Perímetro: $\sqrt{350}+\sqrt{150}+\sqrt{500}$ u.

El triángulo es rectángulo en *A* porque aplicando el teorema de Pitágoras se tiene: $\left(\sqrt{350}\right)^2+\left(\sqrt{150}\right)^2=\left(\sqrt{500}\right)^2$

56. Halla el valor de *a* sabiendo que el segmento que tiene por extremos $A(-2,3,1)$, $B(-1,-1,a)$ tiene una longitud de nueve unidades. ¿Hay una única solución?

$$9=\sqrt{(-1+2)^2+(-1-3)^2+(a-1)^2} \Rightarrow a=9,\ a=-7.$$

57. Calcula la distancia entre el punto *P* y el plano π.

a) $P(1,-2,3)$ $\quad \pi: 2x+y+z+3=0$

b) $P(2,-2,4)$ $\quad \pi: \begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=1-\lambda+2\mu \\ z=-2+2\lambda+\mu \end{cases}$

a) $d(P,\pi)=\dfrac{|2\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot 3+3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$ u

b) $\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: -5x+y+3z+5=0$ $\qquad d(P,\pi)=\dfrac{|-5\cdot 2-2+4\cdot 3+5|}{\sqrt{5^2+1^2+3^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{35}}{7}$ u

58. Halla la distancia entre el punto *P* y la recta *r*.

a) $P(1,0,-3)$ $\quad r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

b) $P(-2,1,0)$ $\quad r: \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$

a) Punto de la recta: $A_r(1,2,0)$ $\qquad$ Vector director: $\vec{u}_r=(1,-1,1)$

$\overrightarrow{A_rP}=(0,-2,-3)$ $\qquad d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{A_rP}\times\vec{u}_r\right|}{|\vec{u}_r|}=\dfrac{|(5,3,-2)|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{38}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{114}}{3}$ u

b) Se calcula un punto y un vector director de *r*:

Punto de la recta: $A_r(0,2,0)$ $\qquad$ Vector director: $\vec{u}_r=(-1,3,-2)$

$\overrightarrow{A_rP}=(-2,-1,0)$ $\qquad d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{A_rP}\times\vec{u}_r\right|}{|\vec{u}_r|}=\dfrac{|(2,-4,-7)|}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{69}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\dfrac{69}{14}}$ u

59. Calcula la distancia del punto $P(-2,1,0)$ al plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y al punto $Q(-1,2,6)$.

El plano tiene como vectores de dirección a $\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{AQ}$. Su ecuación es $\pi: 18x+8y+3z-16=0$.

$$d(P,\pi)=\frac{|18\cdot(-2)+8\cdot 1-16|}{\sqrt{18^2+8^2+3^2}}=\frac{44}{\sqrt{397}}\text{ u.}$$

60. Dadas las rectas paralelas:

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1} \qquad s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Halla la distancia entre ellas.

Vectores directores de *r* y de *s*: $\vec{u}_r=(1,-2,1)$, $\vec{u}_s=(1,-2,1)$. Al ser iguales, las rectas serán paralelas o coincidentes. Como el punto $A(0,0,1)$ pertenece a *r* pero no a *s*, se comprueba que, efectivamente, *r* y *s* son paralelas.

Sea $P(1,1,0)$ un punto de *s*: $d(r,s)=d(A,s)=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\times\vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|}=\dfrac{|(-1,-2,-3)|}{|(1,-2,1)|}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ u.

61. Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s* y calcula la mínima distancia que las separa.

a) $r:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ $\qquad s:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$

b) $r:\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$ $\qquad s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

c) $r:\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ $\qquad s:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$

a) $\vec{u}_r=(1,2,3)$ $\qquad \vec{u}_s=(-1,1,2)$ $\qquad P_r(0,2,3)$, $P_s(1,1,2)$ $\qquad \overrightarrow{P_rP_s}=(1,-1,-1)$

$\text{rg}(\vec{u}_r,\vec{u}_s)=2$ y $\text{rg}(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_rP_s})=3 \Rightarrow$ *r* y *s* se cruzan.

$$d(r,s)=\frac{|\det(\overrightarrow{P_rP_s},\vec{u}_r,\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}=\frac{|3|}{|(1,-5,3)|}=\frac{3}{\sqrt{35}}=\frac{3\sqrt{35}}{35}\text{ u}$$

b) Son rectas paralelas. $d(r,s)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ u

c) $\vec{u}_r=(1,-1,-1)$ $\qquad \vec{u}_s=(1,1,1)$ $\qquad P_r(0,0,0)$, $P_s(1,1,0)$ $\qquad \overrightarrow{P_rP_s}=(1,1,0)$

$\text{rg}(\vec{u}_r,\vec{u}_s)=2$ y $\text{rg}(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_rP_s})=3 \Rightarrow$ *r* y *s* se cruzan.

$$d(r,s)=\frac{|\det(\overrightarrow{P_rP_s},\vec{u}_r,\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}=\frac{|2|}{|(0,-2,2)|}=\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ u}$$

62. Calcula la distancia entre los siguientes planos paralelos.

a) $\pi : x + y + z = 0$ y $\pi' : 2x + 2y + 2z + 3 = 0$

b) $\pi : 3x - y = 0$ y $\pi' : -2x + \frac{2}{3}y = 5$

a) Los vectores normales a los planos son proporcionales; por tanto, los planos son efectivamente paralelos, ya que no son coincidentes. Sea $O(0,0,0)$ uno de los puntos de π:

$$d(\pi,\pi') = d(O,\pi') = \frac{|2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3|}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.}$$

b) Los vectores normales a los planos son proporcionales; por tanto, los planos son efectivamente paralelos, ya que no son coincidentes. Sea $O(0,0,0)$ uno de los puntos de π.

$$d(\pi,\pi') = d(O,\pi') = \frac{\left|-2\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 0 + 0\cdot 0 - 5\right|}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{40}{9}}} = \frac{15}{\sqrt{40}} = \frac{3\sqrt{40}}{8} \text{ u.}$$

63. Dados la recta $r : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi : 2x + y - z = 2$:

a) Demuestra que la recta es paralela al plano.

b) Calcula la distancia que separa la recta del plano.

a) Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (2,1,-1)$ Vector director de r: $\vec{u}_r = (1,-1,1)$. Como el producto escalar de ambos vectores es nulo, deducimos que son ortogonales y, por tanto, la recta es paralela al plano.

b) Sea $A(-1,0,0) \in r$ $\quad d(r,\pi) = d(A,\pi) = \frac{|-2-2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ u.

64. Dadas las rectas $r : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ y $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$:

a) Demuestra que se cruzan.

b) Calcula la ecuación del plano π que contiene a *s* y es paralelo a *r*.

c) Demuestra que $P(2,2,-2)$ es un punto de *r* y calcula la distancia que separa a *P* de π. ¿Cómo será esta distancia en relación a la distancia que separa a las rectas *r* y *s*?

a) $\vec{u}_r = (1,1,-1)$ $\quad \vec{u}_s = (1,1,1)$ $\quad P_r(0,0,0)$, $P_s(1,0,0)$ $\quad \overrightarrow{P_rP_s} = (1,0,0)$

$\text{rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y $\text{rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s}) = 3 \Rightarrow$ Las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) Plano que contiene a *s* y es paralelo a *r*: $P_s(1,0,0)$, $\vec{u}_r = (1,1,-1)$, $\vec{u}_s = (1,1,1)$

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : x - y - 1 = 0$$

c) $\frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} \Rightarrow P \in r$ $\quad d(r,s) = d(P,\pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u.

Perpendicular común

65. Calcula las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$\mathbf{r: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}} \qquad \mathbf{s: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}}$$

$\vec{u}_r = (1,-2,3)$ $\quad \vec{u}_s = (-1,1,2)$ $\quad A_r(0,0,1)$ $\quad A_s(0,1,0)$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = (-7,-5,-1)$$

Plano que contiene a r y que tiene a $\vec{u}_r \times \vec{u}_s$ como vector de dirección:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -7 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 17x - 20y - 19z + 19 = 0$$

Plano que contiene a s y que tiene a $\vec{u}_r \times \vec{u}_s$ como vector de dirección:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & 1 & 2 \\ -7 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 5y + 4z + 5 = 0$$

La perpendicular común es $t: \begin{cases} 17x - 20y - 19z + 19 = 0 \\ 3x - 5y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$

66. Dadas las rectas $\mathbf{r: x - 1 = y = z}$ y $\mathbf{s: x = y = -z + 1}$

a) Comprueba que *r* y *s* se cruzan y escribe las ecuaciones de la perpendicular común a ambas.

b) Halla la distancia que separa a *r* de *s*.

a) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$

Punto de *r*: $P_r(1,0,0)$ $\quad$ Vector de *r*: $\vec{u}_r = (1,1,1)$ $\quad$ Punto de *s*: $P_s(0,0,1)$ $\quad$ Vector de *s*: $\vec{u}_s = (1,1,-1)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{rg}(A) = 2,\ \text{rg}(B) = 3 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

La perpendicular común a *r* y *s* es la recta que pasa por el punto P_r de *r* y P_s de *s.*

Un punto genérico de *r*: $(1+\lambda,\lambda,\lambda)$ $\quad$ Un punto genérico de *s*: $(\mu,\mu,1-\mu)$

El vector determinado por estos dos puntos genéricos es $(\mu - 1 - \lambda, \mu - \lambda, 1 - \mu - \lambda)$. Debe ser perpendicular a los dos vectores de dirección $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$. Por tanto:

$\begin{cases} \mu - 3\lambda = 0 \\ 3\mu - \lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}\ \ \mu = \frac{3}{4} \Rightarrow$ punto de *r*: $P\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, punto de *s*: $Q\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$. Luego $\overrightarrow{QP} = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$.

La perpendicular común es $t: \dfrac{x - \frac{5}{4}}{1} = \dfrac{y - \frac{1}{4}}{-1} = \dfrac{y - \frac{1}{4}}{0}$.

b) $d(r,s) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u.

67. Dadas las rectas:

$$r: x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-1} \qquad s: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$

a) Comprueba que *r* y *s* se cruzan y escribe las ecuaciones de la perpendicular común a ambas.

b) Halla la distancia que separa a *r* de *s*.

a) $r: x-1=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-1}$ $\qquad s: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$

Punto de *r*: $P_r(1,0,-2)$ Vector de *r*: $\vec{u}_r=(1,2,-1)$

Punto de *s*: $P_s(1,1,0)$ Vector de *s*: $\vec{u}_s=(2,2,-1)$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad \text{rg}(A)=2$, $\text{rg}(B)=3 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

La perpendicular común a *r* y *s* es la recta que pasa por el punto P_r de *r* y P_s de *s*.

Un punto genérico de *r*: $(1+\lambda, 2\lambda, -2-\lambda)$ Un punto genérico de *s*: $(1+2\mu, 1+2\mu, -\mu)$

El vector determinado por estos dos puntos genéricos es $(2\mu-\lambda, 1+2\mu-2\lambda, -\mu+2+\lambda)$. Debe ser perpendicular a los dos vectores de dirección $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$.

Por tanto:

$\begin{cases}7\mu-6\lambda=0\\ 9\mu-7\lambda=0\end{cases} \Rightarrow \lambda=\mu=0 \Rightarrow$ punto de *r*: $P(1,0,-2)$, punto de *s*: $Q(1,1,0)$. Luego $\overrightarrow{PQ}=(0,1,2)$

La perpendicular común es $t: \begin{cases}x=1\\ y=t\\ z=-2+2t\end{cases}$

b) $d(r,s)=d(P,Q)=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ u.

Lugares geométricos del espacio

68. Calcula la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A(-1,-1,4)$ y $B(3,-3,0)$. Identifica este lugar geométrico.

Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera del plano. Se obliga a que *P* verifique la propiedad que define el lugar:

$$d(P,A)=d(P,B)=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2+z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1+z^2-8z+16=x^2-6x+9+y^2+6y+9+z^2 \Rightarrow 8x-4y-8z=0 \Rightarrow 2x-y-2z=0$$

Se trata del plano mediador del segmento de extremos *A* y *B*. Es decir, el plano perpendicular a ese segmento y que pasa por su punto medio.

69. Calcula la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos:

$$\pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \qquad \pi': x - y = 0$$

Identifica este lugar geométrico.

La ecuación implícita del plano π es $x + y - z = 0$.

Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera del lugar. Se obliga a que P verifique la propiedad:

$$d(P,\pi) = d(P,\pi') \Rightarrow \frac{x+y-z}{\sqrt{3}} = \pm\frac{x-y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha: \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)y + \sqrt{2}z = 0 \\ \beta: \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

Se trata de los planos α y β bisectores del diedro que forman π y π'. Son dos planos perpendiculares y tales que dividen al diedro en dos partes iguales.

70. Calcula la ecuación del plano mediador del segmento de extremos $A(1,-2,3)$ y $B(5,0,3)$.

Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera del lugar.

$$d(P,A) = d(P,B) \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + y^2 + (z-3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + z^2 - 6z + 9 \Rightarrow 8x + 4y - 20 = 0$$

La ecuación del plano mediador es $\pi: 2x + y - 5 = 0$.

71. Calcula las ecuaciones de los planos bisectores de los planos π, que pasa por los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,2,0)$ y $C(-1,3,2)$, y π', de ecuación $2x + 2y - z + 5 = 0$.

Plano $\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x + y + z - 4 = 0$. Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera del lugar.

$$d(P,\pi) = d(P,\pi') \Rightarrow \frac{x+y+z-4}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \pm\frac{2x+2y-z+5}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} \Rightarrow \frac{x+y+z-4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2x+2y-z+5}{3}$$

Los planos bisectores serán:

$$\begin{cases} \sqrt{3}(x+y+z-4) = 2x + 2y - z + 5 \\ \sqrt{3}(x+y+z-4) = -2x - 2y + z - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha: \left(2-\sqrt{3}\right)x + \left(2-\sqrt{3}\right)y - \left(1+\sqrt{3}\right)z + 5 + 4\sqrt{3} = 0 \\ \beta: \left(2+\sqrt{3}\right)x + \left(2+\sqrt{3}\right)y + \left(\sqrt{3}-1\right)z + 5 - 4\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

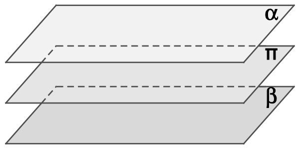
72. Calcula el lugar geométrico de los puntos del espacio que distan 3 unidades de la recta $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

La recta r es el eje X. Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera del lugar.

$$3 = d(P,r) \Rightarrow 3 = \sqrt{y^2 + z^2} \Rightarrow y^2 + z^2 = 9$$

73. Calcula el lugar geométrico de los puntos del espacio que distan 3 unidades del plano $\pi : x + y = 0$.

Se trata de dos planos paralelos a $\pi : x + y = 0$.



Sea $P(x,y,z)$ un punto cualquiera del lugar.

$$d(P,\pi) = \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha : x + y = 3\sqrt{2} \\ \beta : x + y = -3\sqrt{2} \end{cases}$$

74. *Calcula las ecuaciones de las rectas cuyos puntos equidistan de las rectas *r* y *s* y están contenidos en el plano determinado por ellas.

a) $r : \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x - 3z = -1 \end{cases}$

b) $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - z = 5 \end{cases}$

c) $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 12 + 3\lambda \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$

a) Las rectas son secantes, ya que las dos contienen al punto $P(1,-1,1)$ y sus vectores de dirección son:

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-6,4,5) \qquad \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3,9,-2)$$

El vector $\dfrac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|} + \dfrac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}$ es un vector de dirección de una de las bisectrices.

El vector $\dfrac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|} - \dfrac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}$ es un vector de dirección de la otra bisectriz.

$$\frac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|} + \frac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|} = \left(-\frac{6}{\sqrt{77}}, \frac{4}{\sqrt{77}}, \frac{5}{\sqrt{77}}\right) + \left(-\frac{3}{\sqrt{94}}, \frac{9}{\sqrt{94}}, -\frac{2}{\sqrt{94}}\right) = \left(-\frac{6}{\sqrt{77}} - \frac{3}{\sqrt{94}}, \frac{4}{\sqrt{77}} + \frac{9}{\sqrt{94}}, \frac{5}{\sqrt{77}} - \frac{2}{\sqrt{94}}\right)$$

$$\frac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|} - \frac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|} = \left(-\frac{6}{\sqrt{77}}, \frac{4}{\sqrt{77}}, \frac{5}{\sqrt{77}}\right) - \left(-\frac{3}{\sqrt{94}}, \frac{9}{\sqrt{94}}, -\frac{2}{\sqrt{94}}\right) = \left(-\frac{6}{\sqrt{77}} + \frac{3}{\sqrt{94}}, \frac{4}{\sqrt{77}} - \frac{9}{\sqrt{94}}, \frac{5}{\sqrt{77}} + \frac{2}{\sqrt{94}}\right)$$

Las ecuaciones de las bisectrices son:

$$b_1 : \frac{x-1}{-\frac{6}{\sqrt{77}} - \frac{3}{\sqrt{94}}} = \frac{y+1}{\frac{4}{\sqrt{77}} + \frac{9}{\sqrt{94}}} = \frac{z-1}{\frac{5}{\sqrt{77}} - \frac{2}{\sqrt{94}}}$$

$$b_2 : \frac{x-1}{-\frac{6}{\sqrt{77}} + \frac{3}{\sqrt{94}}} = \frac{y+1}{\frac{4}{\sqrt{77}} - \frac{9}{\sqrt{94}}} = \frac{z-1}{\frac{5}{\sqrt{77}} + \frac{2}{\sqrt{94}}}$$

b) Las rectas son secantes, ya que las dos contienen al punto $P(2,-1,-1)$ y sus vectores de dirección son: $\vec{u}_r=(1,-1,-3)$, $\vec{u}_s=(1,-1,2)$.

El vector $\dfrac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}+\dfrac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}$ es un vector de dirección de una de las bisectrices.

El vector $\dfrac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}-\dfrac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}$ es un vector de dirección de la otra bisectriz.

$$\frac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}+\frac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{3}{\sqrt{11}}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}-\frac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{3}{\sqrt{11}}-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Las ecuaciones de las bisectrices son:

$$b_1:\frac{x-2}{\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{6}}}=\frac{y+1}{-\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}}=\frac{z+1}{-\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$b_2:\frac{x-2}{\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}}=\frac{y+1}{-\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{6}}}=\frac{z+1}{-\frac{3}{\sqrt{11}}-\frac{2}{\sqrt{6}}}$$

c) Las rectas son secantes, ya que las dos contienen al punto $P(-1,-3,3)$ y sus vectores de dirección son: $\vec{u}_r=(1,1,3)$, $\vec{u}_s=(1,-3,-1)$.

El vector $\dfrac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}+\dfrac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}$ es un vector de dirección de una de las bisectrices.

El vector $\dfrac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}-\dfrac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}$ es un vector de dirección de una de la otra bisectriz.

$$\frac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}+\frac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{3}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\approx(1,-1,1)$$

$$\frac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}-\frac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{3}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)=\left(0,\frac{4}{\sqrt{11}},\frac{4}{\sqrt{11}}\right)\approx(0,1,1)$$

Las ecuaciones de las bisectrices son:

$$b_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-3}{1}$$

$$b_2:\frac{x+1}{0}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{1}$$

La superficie esférica

75. Calcula las coordenadas del centro y la medida del radio de las siguientes superficies esféricas.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 8y - 4z + 5 = 0$

a) Sea $C(a,b,c)$ el centro de la esfera y r el radio. Se verifica:

$$\begin{cases} D = -2 = -2a \\ E = 4 = -2b \\ F = -6 = -2c \\ G = -2 = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -2, c = 3, r = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow\ C(1,-2,3);\ r = \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{16}{4} + \frac{36}{4} + 2} = 4$$

b) La ecuación de la esfera se puede escribir como $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - z + \frac{5}{4} = 0$.

$$\begin{cases} D = -1 = -2a \\ E = -2 = -2b \\ F = -1 = -2c \\ G = \frac{5}{4} = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}, r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow\ C\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right);\ r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}} = \frac{1}{2}$$

76. Dada la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$:

a) Calcula las coordenadas de su centro y la medida de su radio.

b) Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $P(0,0,3)$.

a) $C(0,0,1)$, $r = \sqrt{\frac{4}{4} + 3} = \sqrt{4} = 2$ u.

b) El vector $\overrightarrow{CP} = (0,0,2) \parallel (0,0,1)$ es un vector normal al plano tangente. Por tanto, dicho plano tendrá por ecuación $z + D = 0$. Además, el plano debe pasar por P: $3 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow z - 3 = 0$.

77. Determina la posición relativa de los planos $\pi: 3y + 5z = 22$, $\pi': y + 2z = 3$ y $\pi'': z = 4$ respecto de la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 5 = 0$.

El centro de la esfera es el punto $C(2,-1,2)$ y el radio mide $r = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{4}{4} + \frac{16}{4} - 5} = \sqrt{4} = 2$.

$d(C, \pi) = \frac{15}{\sqrt{3^2 + 5^2}} > r = 2 \Rightarrow$ El plano π es exterior a la esfera.

$d(C, \pi') = \frac{0}{\sqrt{1^2 + 2^2}} < r = 2 \Rightarrow$ El plano π es secante a la esfera. La corta en una circunferencia.

$d(C, \pi'') = \frac{2}{\sqrt{1^2}} = r = 2$ El plano π es tangente a la esfera en el punto $P(2,-1,4)$.

78. Se considera la superficie esférica de centro $C(1,1,1)$ y tangente al plano de ecuación $9x-2y+6z=2$.

a) Calcula la medida del radio.

b) Calcula la ecuación de la superficie esférica.

c) Escribe la ecuación del plano tangente a la superficie que pasa por el punto $P(1,2,1)$.

a) La medida del radio será: $r=d(C,\pi)=\dfrac{|9-2+6-2|}{\sqrt{81+4+36}}=\dfrac{11}{11}=1$

b) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$

c) Vector normal del plano $\vec{n}_\pi=\overrightarrow{CP}=(0,1,0) \Rightarrow y+D=0 \Rightarrow 2+D=0 \Rightarrow D=-2$

Por tanto, la ecuación del plano tangente es: $y-2=0$

79. Halla la ecuación de la superficie esférica de radio 1 concéntrica con $4x^2+4y^2+4z^2-4x+16y+1=0$.

$4x^2+4y^2+4z^2-4x+16y+1=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-x+4y+\dfrac{1}{4}=0$

Centro $C\left(\dfrac{1}{2},-2,0\right)$, radio $r=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{16}{4}-\dfrac{1}{4}}=2$

La esfera concéntrica de radio 1 será:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2+z^2=1^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-x+4y-\frac{13}{4}=0 \Rightarrow 4x^2+4y^2+4z^2-4x+16y-13=0$$

Áreas y volúmenes

80. Calcula el área del triángulo *ABC* en los siguientes casos.

a) $A(4,-6,2)$, $B(-3,4,-2)$, $C(0,-8,0)$

b) $A\left(\dfrac{1}{2},-2,\dfrac{1}{4}\right)$, $B\left(-2,\dfrac{1}{2},-2\right)$, $C\left(\dfrac{3}{4},-1,\dfrac{1}{2}\right)$

a) $\overrightarrow{AB}=(-7,10,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,-2,-2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -7 & 10 & -4\\ -4 & -2 & -2\end{vmatrix}=(-28,2,54) \Rightarrow S=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{3704}}{2}\text{ u}^2$$

b) $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2},-\dfrac{9}{4}\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{1}{4},1,\dfrac{1}{4}\right)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{4}\\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=\left(\frac{23}{8},\frac{1}{16},-\frac{25}{8}\right) \Rightarrow S=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{4617}}{32}\text{ u}^2$$

81. Calcula el área determinada por el triángulo de vértices $A(1,-3,-2)$, $B(-1,1,3)$ y $C(4,0,3)$ y halla la medida de la altura de dicho triángulo que parte del vértice *A*.

$\overrightarrow{AB}=(-2,4,5)$, $\overrightarrow{AC}=(3,3,5)$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(5,25,-18)$

Área *ABC*: $A=\dfrac{|AB\times AC|}{2}=\dfrac{\sqrt{5^2+25^2+(-18)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{974}}{2}\ \text{u}^2$

Altura que parte del vértice *A*: $A=\dfrac{d(B,C)h_{BC}}{2}\Rightarrow h_{BC}=\dfrac{2A}{d(B,C)}=\dfrac{\sqrt{974}}{\sqrt{26}}=\sqrt{\dfrac{487}{13}}\ \text{u}$

82. Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vértices $A(2,-1,2)$, $B(1,2,2)$, $C(0,1,0)$ y $D(1,1,1)$.

$V=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\dfrac{|-2|}{6}=\dfrac{1}{3}\ \text{u}^3$

83. a) Demuestra que los puntos $A(-2,1,0)$, $B(-2,-1,-1)$, $C(0,-1,0)$ y $D(1,2,2)$ pertenecen a un mismo plano.

b) Calcula el área del cuadrilátero *ABCD* cuyos vértices son los puntos del apartado anterior.

a) $\overrightarrow{AB}=(0,-2,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$, $\overrightarrow{AD}=(3,1,2)$. Luego $\text{rg}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=2\Rightarrow$ *A*, *B*, *C*, *D* son coplanarios.

b) $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{CDA}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|+\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{6}+\sqrt{24}=3\sqrt{6}\ \text{u}^2$

CUESTIONES

84. Dada una recta *r* y un punto *P* exterior a ella, indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

c) Existe una única recta que pase por *P* y que sea paralela a *r*.

d) Existen infinitas rectas que pasen por *P* y que sean paralelas a *r*.

e) Existe una única recta que pase por *P* y que sea perpendicular a *r*.

f) Existen infinitas rectas que pasen por *P* y que sean perpendiculares a *r*.

g) Existe una única recta que pase por *P*, que sea perpendicular a *r* y que sea secante con ella.

a) Verdadera.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Verdadera.

e) Verdadera.

85. Dada una recta *r* y un punto exterior *P* a ella, indica:

a) Un método geométrico que permita calcular la distancia de *P* a *r*.

b) Un método algebraico que permita calcular la distancia de *P* a *r*.

a) Se calcula el plano π que es perpendicular a *r* y pasa por *P*.

Se calcula el punto *Q* intersección de *r* y del plano π.

Se calcula la distancia de *P* a *Q*.

b) Se calculan las ecuaciones paramétricas de *r* y se toma un punto *X* genérico de ella.

Se obliga a que el vector $\overrightarrow{PX}$ sea perpendicular al vector de dirección de *r* y se obtiene el valor del parámetro y las coordenadas del punto *Q*.

Se calcula la distancia de *P* a *Q*.

PROBLEMAS

86. Dados los puntos del espacio:

$$\boldsymbol{A(1,-1,2)} \qquad \boldsymbol{B(0,3,-2)} \qquad \boldsymbol{C(4,0,-3)}$$

a) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que pasa por *A* y *B*.

b) Escribe la ecuación general del plano π que pasa por *A*, *B* y *C*.

c) Escribe la ecuación del plano π' que es perpendicular a π y que contiene a *r*.

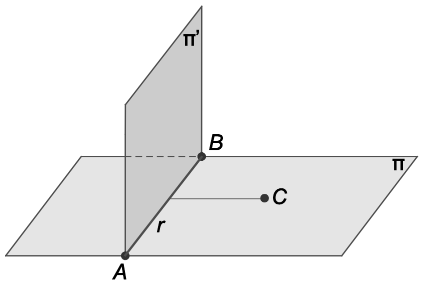
d) Halla la distancia que separa a *C* de π' y la distancia que separa a *C* de *r*.

a) $r:\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1+4\lambda \\ z = 2-4\lambda \end{cases}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1,4,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (3,1,-5)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 16x + 17y + 13z - 25 = 0$$

c) $$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 16 & 17 & 13 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi': 40x - 17y - 27z - 3 = 0$$



d) $d(C,\pi') = d(C,r) = \dfrac{|40\cdot 4 - 3\cdot(-27) - 3|}{\sqrt{40^2+17^2+27^2}} = \dfrac{238}{\sqrt{2618}}$ u.

87. Dadas las rectas que tienen por ecuaciones:

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{m} \qquad s: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -2x+y+nz=4 \end{cases}$$

a) Halla los valores de *m* y *n* para que *r* y *s* sean paralelas.

b) Para los valores calculados de *m* y *n*, calcula la ecuación del único plano que contiene a las dos rectas.

c) Halla la distancia que separa las dos rectas.

a) $\vec{u}_r = (4,2,m)$, $P(3,-1,-1) \in r$, $\vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & n \end{vmatrix} = (2n+1, 2-n, 5)$, $Q(-1,2,0) \in r$

Los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ deben ser proporcionales $\Rightarrow \dfrac{4}{2n+1} = \dfrac{2}{2-n} = \dfrac{m}{5} \Rightarrow \begin{cases} 8-4n = 4n+2 \\ 10 = 2m - nm \end{cases} \Rightarrow n = \dfrac{3}{4} \quad m = 8$.

b) $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 11x + 18y - 10z - 25 = 0$

c) Se calcula el plano π' que pasa por *P* y es perpendicular a las dos rectas paralelas *r* y *s*:

$2x + y + 4z + D = 0 \Rightarrow 6 - 1 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \pi': 2x + y + 4z - 1 = 0$

Se calcula la intersección de π' con *s*:

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ -2x+y+\frac{3}{4}z=4 \\ 2x+y+4z-1=0 \end{cases} \Rightarrow R\left(-\frac{19}{21}, \frac{43}{21}, \frac{4}{21}\right) \Rightarrow d(r,s) = d(P,R) = \sqrt{\left(\frac{82}{21}\right)^2 + \left(\frac{64}{21}\right)^2 + \left(\frac{25}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{11445}}{21} \text{ u.}$$

88. Se consideran los puntos:

$$A(1,-2,4) \qquad B(2,2,-1) \qquad C(-1,0,2)$$

a) Calcula las coordenadas del punto *D* de forma que *ABCD* sean los cuatro vértices de un paralelogramo.

b) Calcula el área del paralelogramo.

c) Calcula la medida de la altura del paralelogramo correspondiente a la base de extremos *A* y *B*.

a) Sea *M* el punto medio de *A* y *C*: $M(0,-1,3)$

M debe ser también el punto medio de *B* y *D*. Por tanto, $D(-2,-4,7)$.

b) El área del paralelogramo coincide con el módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB} = (1,4,-5)$ y $\overrightarrow{AD} = (-3,-2,3)$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (2,12,10) \quad S = \sqrt{4+144+100} = \sqrt{248} \text{ u}^2$

c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+16+25} = \sqrt{42} \Rightarrow \text{altura} = \dfrac{\sqrt{248}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\dfrac{124}{21}}$ u

89. Dado el punto $A(-3,0,-4)$ y la recta $s:\begin{cases} x-y=-2 \\ y+z=2 \end{cases}$

a) Calcula las coordenadas de la proyección ortogonal de *A* sobre *s*.

b) Calcula la distancia del punto *A* a la recta *s*.

c) Calcula el punto simétrico de *A* respecto de *s*.

d) Comprueba que la distancia del punto simétrico de *A* a *s* coincide con la distancia de *A* a *s*.

a) Plano π perpendicular a *s* y que pasa por *A*:

El vector de dirección de *s* es el vector normal de π: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$

$\pi: x+y-z+D=0$. Como $D=-1$, entonces $\pi: x+y-z-1=0$

A_s es la intersección de π y de *s*: $A_s\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

b) $d(A,s)=d(A,A_s)=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{25}{9}+\frac{169}{9}}=\frac{\sqrt{258}}{3}$ u

c) A_s es el punto medio de *A* y A': $A'\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3},\frac{14}{3}\right)$

d) $d(A',A_s)=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{25}{9}+\frac{169}{9}}=\frac{\sqrt{258}}{3}$ u

90. Dada la recta $r:\frac{x-1}{2}=-\frac{y}{2}=1-z$ y el punto $P(-2,0,3)$:

a) Calcula la ecuación del plano π que es perpendicular a *r* y que pasa por *P*.

b) ¿Cuántas rectas hay que sean perpendiculares a *r* y que pasen por *P*?

c) Calcula la ecuación de la recta *s* perpendicular a *r*, que pasa por *P* y de forma que *r* y *s* sean secantes.

d) Calcula la distancia que separa a *P* de *r*.

a) La ecuación de la recta en forma continua es $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{-1}$

El vector de dirección de *r* es perpendicular al plano. Por tanto $\pi: 2x-2y-z+D=0$. Como, además, $P\in\pi \Rightarrow -4-3+D=0 \Rightarrow D=7 \Rightarrow \pi \equiv 2x-2y-z=-7$

b) Hay infinitas: todas las rectas contenidas en π y que pasan por *P*.

c) El punto de intersección de *r* y *s* coincidirá con el punto de intersección de *r* y π. Este punto será:

$$2(1+2t)-2\cdot(-2t)+t-1=-7 \Rightarrow t=-\frac{8}{9}$$

$$Q=r\cap s=\left(-\frac{7}{9},\frac{16}{9},\frac{17}{9}\right)$$

La recta buscada pasa por *P* y por *Q*. Entonces: $s:\begin{cases} x=-2+11t \\ y=16t \\ z=3-10t \end{cases}$

d) $d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\frac{121}{81}+\frac{256}{81}+\frac{100}{81}}=\frac{\sqrt{53}}{3}$ u.

91. Se considera la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2-3x-11y-9z+2=0$.

a) Calcula las coordenadas de su centro y la medida de su radio.

b) Comprueba que los puntos $A(0,-1,2)$ y $B(1,1,-1)$ pertenecen a la superficie.

c) Calcula la longitud de la cuerda que tiene por extremos las intersecciones de dicha superficie esférica con la recta $r:\begin{cases} y+z=20 \\ y-z=2 \end{cases}$

d) Calcula el valor, o los valores, de m para que el plano $\pi: 3x+13y+5z+m=0$ sea tangente a la superficie esférica.

a) $x^2+y^2+z^2-3x-11y-9z+2=0$

$$c_1=-\frac{D}{2}=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2} \qquad c_2=-\frac{E}{2}=-\left(\frac{-11}{2}\right)=\frac{11}{2} \qquad c_3=-\frac{F}{2}=-\left(\frac{-9}{2}\right)=\frac{9}{2}\Rightarrow C\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right)$$

$$r=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}+\frac{F^2}{4}-G}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{121}{4}+\frac{81}{4}-2}=\sqrt{\frac{203}{4}}=\frac{\sqrt{203}}{2}$$

b) Al sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación de la superficie esférica, esta se verifica. Por tanto, ambos puntos pertenecen a la superficie:

$A(0,-1,2)\Rightarrow 1+4+11-18+2=0$ $\qquad$ $B(1,1,-1)\Rightarrow 1+1+1-3-11+9+2=0$

c) Al resolver el sistema formado por las ecuaciones de la superficie esférica y las de la recta, se obtienen los puntos $P(1,11,9)$ y $Q(2,11,9)$.

Longitud de la cuerda: $L=d(P,Q)=1$

d) Para que el plano π sea tangente a la superficie esférica se debe verificar que la distancia del centro de la superficie al plano sea igual al radio:

$$d(C,\pi)=\frac{\left|3\cdot\frac{3}{2}+13\cdot\frac{11}{2}+5\cdot\frac{9}{2}+m\right|}{\sqrt{3^2+13^2+5^2}}=\frac{\sqrt{203}}{2}=\frac{\left|\frac{197}{2}+m\right|}{\sqrt{203}}\Rightarrow\begin{cases}\frac{203}{2}=\frac{197}{2}+m\Rightarrow m=3\\ \frac{203}{2}=-\frac{197}{2}-m\Rightarrow m=-200\end{cases}$$

Por tanto, los valores son $m=3$ y $m=-200$.

92. Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,2)$, que es paralelo a la recta que pasa por $A(-1,0,2)$ y $B(0,2,1)$ y que es perpendicular al plano $\pi: 2x+y-z=1$.

¿Cuánto mide la distancia de C al punto de corte de la recta AB y el plano π?

El plano π' tiene como vectores de dirección los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,2,-1)$ y $\vec{n}_\pi=(2,1,-1)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \pi': x+y+3z-8=0$$

El punto de corte de la recta AB con π es: $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2-\lambda \\ 2x+y-z=1 \end{cases}\Rightarrow \lambda=1\Rightarrow P(0,2,1)$

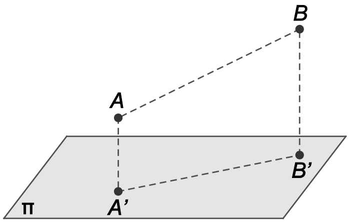
La distancia de C a P es: $d(P,C)=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ u

93. Los puntos A' y B' son las proyecciones ortogonales de los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(1,-3,0)$ en el plano $\pi : 2x-y-z-3=0$.

a) Calcula las coordenadas de A' y B'.

b) Comprueba que A, B, A' y B' son cuatro puntos coplanarios.

c) Calcula el área del cuadrilátero de vértices A, B, A' y B'.



a) Recta $AA': \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$, $A'=AA'\cap\pi \Rightarrow A'\left(\dfrac{10}{6},-\dfrac{5}{6},\dfrac{7}{6}\right)$

Recta $BB': \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{-1}$, $B'=BB'\cap\pi \Rightarrow B'\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{8}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

b) Las rectas AA' y BB' son, evidentemente, paralelas.

Por tanto, A, B, A' y B' son coplanarios.

c) $S_{ABA'B'}=S_{AA'B'}+S_{B'BA}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'A}\times\overrightarrow{A'B'}\right|+\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{B'A}\times\overrightarrow{B'B}\right|=$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{6}{36},-\frac{18}{36},\frac{30}{36}\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\left(-\frac{12}{36},\frac{36}{36},-\frac{60}{36}\right)\right|=\frac{\sqrt{35}}{12}+\frac{\sqrt{35}}{6}=\frac{\sqrt{35}}{4}\ \text{u}^2$$

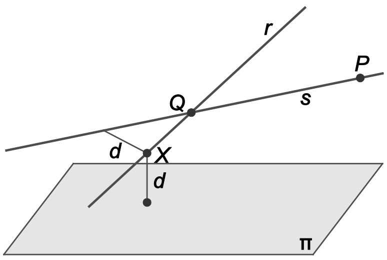
94. Dada la recta $r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=0\\ z=1-\lambda\end{cases}$ y los puntos $A(-1,0,2)$, $B(-1,2,2)$, $C(1,0,1)$ y $P(-1,0,1)$:

a) Calcula la ecuación del plano π que pasa por A, B y C.

b) Calcula la ecuación de la recta s que pasa por P, es paralela a π y corta a r.

c) Calcula las coordenadas de un punto que pertenezca a r y que equidiste de π y de s.

a) $\begin{vmatrix}x+1 & y & z-2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi : x+2z-3=0$



b) El punto Q es la intersección de la recta r con el plano paralelo a π y que pasa por P:

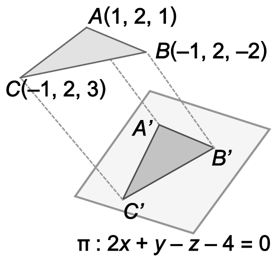
$$\begin{cases}x+z=1\\ y=0\\ x+2z-1=0\end{cases} \Rightarrow Q(1,0,0)$$

La recta s pasa por P y por Q: $s:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=0\\ z=-\lambda\end{cases}$

c) Sea $X(t,0,1-t)$ un punto genérico de r:

$$\left.\begin{array}{l} d(X,\pi)=\dfrac{|-1-t|}{\sqrt{5}}\\ d(X,s)=\dfrac{|t-1|}{\sqrt{5}}\end{array}\right\}\Rightarrow t=0\Rightarrow X(0,0,1)$$

95. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo $A'B'C'$ que se obtiene al proyectar ortogonalmente el triángulo ABC sobre el plano π. Calcula las áreas de ambos triángulos.



$$AA':\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \Rightarrow A'=AA'\cap\pi=\left(\frac{8}{6},\frac{13}{6},\frac{5}{6}\right)$$

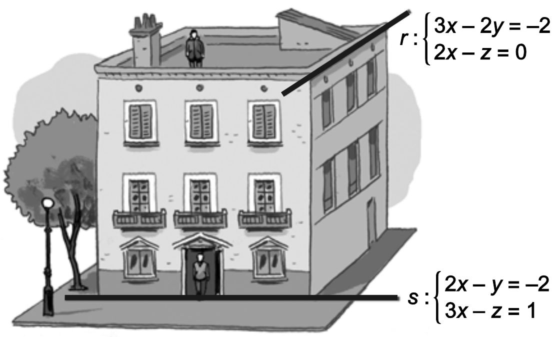
$$BB':\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-2-\lambda \end{cases} \Rightarrow B'=BB'\cap\pi=\left(-\frac{1}{3},\frac{7}{3},-\frac{7}{3}\right)$$

$$CC':\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \Rightarrow C'=CC'\cap\pi=\left(\frac{8}{6},\frac{19}{6},\frac{11}{6}\right)$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(-2,0,-3)\times(-2,0,2)\right|=\frac{1}{2}\left|(0,10,0)\right|=5\ \text{u}^2.$$

$$S_{A'B'C'}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}\right|=\frac{1}{2}\left|\left(-\frac{10}{6},\frac{1}{6},-\frac{19}{6}\right)\times(0,1,1)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{20}{6},\frac{10}{6}-\frac{10}{6}\right)\right|=\frac{5\sqrt{6}}{6}\ \text{u}^2.$$

96. ¿A qué distancia se encuentran estos dos individuos?



Hay que calcular la distancia de dos rectas que se cruzan.

Punto de r: $P(0,1,0)$ Vector director de r: $\vec{u}_r=(2,3,4)$

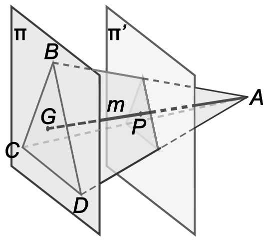
Punto de s: $Q(0,2,-1)$ Vector director de s: $\vec{u}_s=(1,2,3)$

Plano que contiene a s paralelo a r: $\pi:\begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: x-2y+z+5=0$

$$d(r,s)=d(P,\pi)=\frac{|0-2\cdot1+0+5|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Por tanto, la distancia entre los dos individuos es $\frac{\sqrt{6}}{2}$ u.

97. Dado el tetraedro de vértices $A(-3,-1,3)$, $B(2,-1,0)$, $C(0,0,-2)$ y $D(1,-2,-1)$:



a) Calcula su volumen.

b) Calcula el plano π que contiene la base determinada por los vértices *B*, *C* y *D*.

c) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta *m* que pasa por *A* y por el baricentro *G* de la base *BCD*.

d) Halla el plano π' paralelo a π que pasa por el punto medio del segmento *AB*. Comprueba que también contiene a los puntos medios de *AC* y *AD*.

e) Halla el punto *P* de *m* que pertenece a π'. ¿Cuál es la relación entre las distancias de *P* al vértice *A* y *P* a la base *BCD*?

a) El volumen del tetraedro *ABCD* se puede calcular hallando el valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}=(5,0,-3),\ \overrightarrow{AC}=(3,1,-5),\ \overrightarrow{AD}=(4,-1,-4),\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}5 & 0 & -3\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & -1 & -4\end{vmatrix}=-20+9+12-25=-24$$

Por tanto, el volumen del tetraedro será $V=\frac{1}{6}\left|-24\right|=4\ \text{u}^3$.

b) El plano π tiene como vectores de dirección $\overrightarrow{BC}=(-2,1,-2)$ y $\overrightarrow{BD}=(-1,-1,-1)$ y pasa por el punto $B(2,-1,0)$ y, por tanto, tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z\\ -2 & 1 & -2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \pi: 2z-x+2+2y+2-2x+4-2y-2+z=0\Rightarrow \pi: -3x+3z+6=0\Rightarrow \pi: x-z-2=0$$

c) El baricentro de la base *BCD* es el punto $G\left(\frac{2+0+1}{3},\frac{-1+0-2}{3},\frac{0-2-1}{3}\right)\Rightarrow G(1,-1,-1)$

La recta *m* tendrá como vector director el $\overrightarrow{AG}=(4,0-4)$ paralelo al vector $(1,0,-1)$. Por tanto, sus ecuaciones paramétricas serán $m:\begin{cases}x=1+t\\ y=-1\\ z=-1-t\end{cases}$

d) El punto medio de *AB* es $\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$ y, por tanto, el plano π' es:

$$\pi': x-z+D=0\Rightarrow -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+D=0\Rightarrow D=2\Rightarrow \pi': x-z+2=0$$

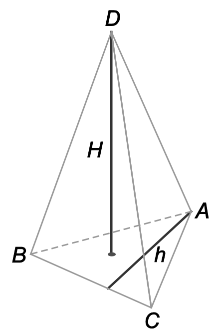
Este plano también pasa por $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ punto medio de *AC,* ya que $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+2=0$.

Así mismo, también pasa por $\left(-1,-\frac{3}{2},1\right)$ punto medio de *AD,* ya que $-1-1+2=0$.

$$P=\pi'\cap m\Rightarrow\begin{cases}x-z+2=0\\ x=1+t\quad y=-1\quad z=-1-t\end{cases}\Rightarrow 1+t+1+t+2=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow P(-1,-1,1)$$

e) La distancia de *P* a *A* es $d(P,A)=\sqrt{(-3+1)^2+(-1+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. La distancia de *P* a la base *BCD* es $d(P,BCD)=d(P,G)=\sqrt{(1+1)^2+(-1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Las distancias son iguales.

98. Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(3,3,0)$ y $D(1,1,2)$:



a) Calcula el área determinada por el triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

b) Calcula la medida de la altura *h* que parte del vértice *A* en el triángulo *ABC*.

c) Calcula el volumen del tetraedro determinado por *A*, *B*, *C* y *D*.

d) Calcula la medida de la altura *H* que parte del vértice *D* en el tetraedro *ABCD*.

a) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-1,2,0)\times(2,3,0)\right| = \frac{1}{2}\left|(0,0,-7)\right| = \frac{7}{2}$

b) $S = \frac{d(B,C)h}{2} \Rightarrow h = \frac{2S}{d(B,C)} = \frac{7}{\sqrt{3^2+1^2+0^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$

c) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|-6-8\right| = \frac{7}{3}$

d) $V = \frac{SH}{3} \Rightarrow H = \frac{3V}{S} = 7 : \frac{7}{2} = 2$

99. Calcula el valor, o los valores, de *m* para que el ángulo que forma la recta $r : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - z = 3 \end{cases}$ con el plano $x + 2y + mz + 5 = 0$ sea de 30º.

Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (1,2,m)$ Vector director de *r*: $\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,1)$

$$\operatorname{sen}\left(\widehat{\pi,r}\right) = \frac{\left|\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{u}_r\right|} = \frac{|4+m|}{\sqrt{5+m^2}\cdot\sqrt{6}} = \operatorname{sen}30 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2|4+m| = \sqrt{30+6m^2} \Rightarrow m = 17,\ m = -1.$$

100. Calcula el valor, o los valores, de *m* para que la distancia del punto $P(1,2,m)$ a la recta $r : x = \frac{y-6}{-1} = z-2$ sea de $\sqrt{6}$ unidades de longitud.

Se obtienen un punto y un vector de dirección de *r*:

$\vec{u}_r = (1,-1,1)$ $Q(0,6,2)$

$\overrightarrow{PQ} = (-1,4,2-m)$ $\vec{u}_r \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2-m \end{vmatrix} = (m-6, m-3, 3)$

$|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(m-6)^2 + (m-3)^2 + 9}$

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{(m-6)^2+(m-3)^2+9}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} \Rightarrow (m-6)^2 + (m-3)^2 + 9 = 18 \Rightarrow m = 6,\ m = 3$$

101. Halla el valor de m para que las rectas $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=4-7\lambda \\ z=-2+m\lambda \end{cases}$ y $s:\begin{cases} 2x+5y+z=-6 \\ 5y+z=-10 \end{cases}$ sean coplanarias y calcula, en este caso, la distancia que separa a su punto de corte del origen de coordenadas.

$\vec{u}_r=(1,-7,m)$ $\qquad$ $P(1,4,-2)\in r$

$\vec{u}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}=(0,-2,10)\parallel(0,-1,5)$ $\qquad$ $Q(2,-2,0)\in s$

Las rectas no pueden ser paralelas. Por tanto, para que sean coplanarias deben ser secantes:

$A=\begin{pmatrix} 1 & -7 & m \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -7 & m \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. Para que sean secantes debe verificarse que $|B|=0\Rightarrow\ m=7$.

El punto de corte de las rectas es $R(2,-3,5)$. La distancia de R a O es $d(R,O)=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$ u.

102. Calcula el valor, o los valores, de m para que el área del triángulo que se obtiene al cortar el plano $\pi: 2x+3y+z=m$ con los ejes coordenados valga $\frac{\sqrt{14}}{6}$ u².

Los puntos de corte son:

$$A:\begin{cases} 2x+3y+z=m \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{m}{2},0,0\right)$$

$$B:\begin{cases} 2x+3y+z=m \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow B\left(0,\frac{m}{3},0\right)$$

$$C:\begin{cases} 2x+3y+z=m \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow C(0,0,m)$$

$\overline{AB}=\left(-\frac{m}{2},\frac{m}{3},0\right)$ $\qquad$ $\overline{AC}=\left(-\frac{m}{2},0,m\right)$ $\qquad$ $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{m}{2} & \frac{m}{3} & 0 \\ -\frac{m}{2} & 0 & m \end{vmatrix}=\left(\frac{m^2}{3},\frac{m^2}{2},\frac{m^2}{6}\right)$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^4}{9}+\frac{m^4}{4}+\frac{m^4}{36}}=\frac{\sqrt{14}}{6}\Rightarrow m=\sqrt{2}\quad m=-\sqrt{2}$$

103. Calcula la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que distan 5 unidades de la recta $r:\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$. Comprueba que el eje *Z* está incluido en ese lugar.

Sea $X(x,y,z)$ un punto genérico del lugar, entonces $d(X,r)=5$.

Se obtienen un punto y un vector de dirección de *r*:

$\vec{u}_r=(0,0,1)$ $\qquad Q(3,4,0)$ $\qquad \overrightarrow{QX}=(x-3,y-4,z)$

$\vec{u}_r\times\overrightarrow{QX}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x-3 & y-4 & z \end{vmatrix}=(4-y,x-3,0)$ $\qquad |\vec{u}_r\times\overrightarrow{QX}|=\sqrt{(4-y)^2+(x-3)^2}$

$$d(X,r)=\frac{|\vec{u}_r\times\overrightarrow{QX}|}{|\vec{u}_r|}=\frac{\sqrt{(4-y)^2+(x-3)^2}}{1}=5\Rightarrow x^2+y^2-6x-8y=0$$

El lugar geométrico $x^2+y^2-6x-8y=0$ contiene a la recta $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, ya que todos los puntos de esa recta verifican la ecuación del lugar.

PARA PROFUNDIZAR

104. Dados los puntos $A(-5,0,0)$ y $B(5,0,0)$:

a) Calcula la distancia *d* que los separa.

b) Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que distan *d* unidades de *A* y de *B* a la vez.

c) Identifica el lugar hallado.

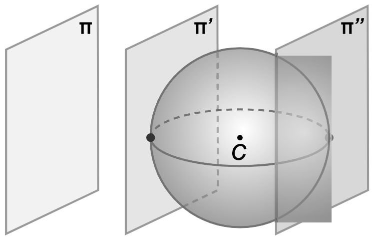
a) $d(A,B)=\sqrt{10^2}=10$ u.

b) Sea $P(x,y,z)$ un punto genérico. Entonces $d(P,A)=10$ y $d(P,B)=10$.

$$\begin{cases} \sqrt{(x+5)^2+y^2+z^2}=10 \\ \sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2}=10 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2+y^2+z^2+10x-75=0 \\ x^2+y^2+z^2-10x-75=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2+y^2+z^2+10x-75=0 \\ x=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y^2+z^2-75=0 \\ x=0 \end{cases}$$

c) Se trata de la circunferencia que se obtiene al cortar la esfera de centro $C(0,0,0)$ y radio $r=\sqrt{75}$ contenida en el plano $x = 0$.

105. Dado el plano $\pi: x + 2y - 2z + 18 = 0$ y la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$:



a) Calcula el haz de planos paralelos a π.

b) Calcula las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie esférica y que son paralelos a π.

a) Haz de planos paralelos a $\pi: x + 2y - 2z + D = 0$.

b) Los planos buscados deben pertenecer al haz anterior y además deben verificar que la distancia del centro de la esfera a ellos coincide con la medida del radio.

Centro: $C(1,-2,0)$. Radio: $r = \sqrt{1+4+4} = 3$

$$d(C,\pi) = \frac{|1-4+D|}{\sqrt{1+4+4}} = 3 \Rightarrow \begin{cases} D = 12 \Rightarrow \pi: x + 2y - 2z + 12 = 0 \\ D = -6 \Rightarrow \pi': x + 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

106. Calcula la ecuación de la superficie esférica cuyo diámetro es el segmento de extremos $A(-2,0,3)$ y $B(0,2,1)$. Calcula el valor o los valores de k para que la recta $r: x - k = y = z$ sea tangente a la superficie esférica.

Centro de la esfera: $C\left(\frac{-2+0}{2},\frac{0+2}{2},\frac{3+1}{2}\right) \Rightarrow C(-1,1,2)$. Radio: $r = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

La ecuación de la superficie esférica es:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z + 3 = 0$$

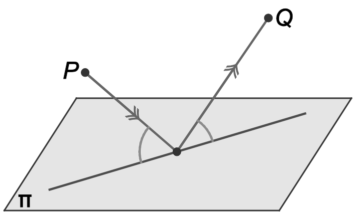
Para hallar el valor o los valores de k se estudia la intersección de r con la superficie esférica.

$$r: \begin{cases} x = k + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow 3\lambda^2 + (2k-4)\lambda + k^2 + 2k + 3 = 0$$

Para que la recta sea tangente, la ecuación anterior debe tener solución única. Por tanto:

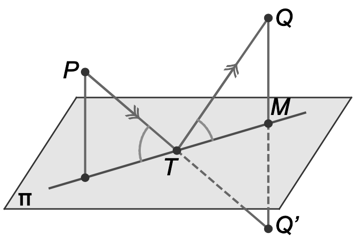
$$\Delta = -8k^2 - 40k - 20 = 0 \Rightarrow k = \frac{-5+\sqrt{15}}{2},\ k = \frac{-5-\sqrt{15}}{2}$$

107. Un rayo parte del punto $P(1,0,-2)$ y se refleja el plano $\pi : x+y=2$.



Calcula el punto donde el rayo toca al plano sabiendo que el rayo reflejado pasa por $Q(-1,-2,0)$.

Sea Q' el simétrico de Q respecto del plano π. La recta que pasa por P y Q' cortará al plano π en el punto T buscado.



$$QQ':\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2+t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M = QQ' \cap \pi \Rightarrow M\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

Como M es el punto medio de $QQ' \Rightarrow Q'(2,1,2)$. $\overrightarrow{PQ'}=(1,1,4)$.

$$PQ':\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=-2+4t \end{cases} \Rightarrow T = PQ' \cap \pi \Rightarrow T\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el ángulo que forman los planos $\pi_1: 2x-3y+2z-6=0$ y $\pi_2: 3x+6y+6z-1=0$.

Vectores normales de π y de π': $\vec{n}_\pi=(2,-3,2)$ y $\vec{n}_{\pi'}=(3,6,6)$.

$$\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\frac{\left|\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_{\pi'}\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{n}_{\pi'}\right|}=0\Rightarrow\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\arccos 0\simeq 90^\circ$$

2. Calcula el ángulo que forma la recta $r: x=y=z$ con el plano $\pi: 2x-y+2z=0$.

Vector normal de π: $\vec{n}_\pi=(2,-1,2)$ Vector director de r: $\vec{u}_r=(1,1,1)$

$$\operatorname{sen}(\pi,r)=\frac{\left|\vec{n}_\pi\cdot\vec{u}_r\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{u}_r\right|}=\frac{3}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\left(\widehat{\pi,r}\right)=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}\simeq 35^\circ 16'$$

3. Comprueba que el triángulo de vértices $A(3,4,5)$, $B(9,4,-1)$, $C(1,2,-3)$ es equilátero.

Los lados del triángulo miden:

$$a=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{8^2+2^2+2^2}=\sqrt{72},\ b=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-8)^2}=\sqrt{72},\ c=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6^2+0^2+(-6)^2}=\sqrt{72}$$

Se trata de un triángulo equilátero.

4. Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s* y calcula la mínima distancia que las separa.

a) $r:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ $s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$ **b)** $r:\begin{cases}5x+y+z-22=0\\x-y+z-12=0\end{cases}$ $s:\begin{cases}x+y+z-6=0\\x-4y-16=0\end{cases}$

a) $\vec{u}_r=(1,2,3)$ $P(0,2,3)$ $\vec{u}_s=(-1,1,2)$ $Q(1,1,2)$

$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&2\end{pmatrix}$ $M'=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ $\operatorname{rg}(M)=2$, $|M'|=3\neq 0\Rightarrow\operatorname{rg}(M')=3\Rightarrow$ las rectas se cruzan.

Se halla el plano π que contiene a s y es paralelo a r:

$$\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-2\\1&2&3\\-1&1&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi: x-5y+3z-2=0$$

$$d(r,s)=d(P,\pi)=\frac{|-10+9-2|}{\sqrt{1^2+5^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{35}}=\frac{3\sqrt{35}}{35}$$

b) $\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(2,-4,-6)\,||\,(1,-2,-3)$ $P(0,5,17)$

$\vec{u}_s=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&-4&0\end{vmatrix}=(4,1,-5)$ $Q(16,0,-10)$

$M=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&1&-5\end{pmatrix}$ $M'=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&1&-5\\16&-5&-27\end{pmatrix}$ $\operatorname{rg}(M)=2$, $|M'|=0\Rightarrow\operatorname{rg}(M')=2\Rightarrow$ las rectas se cortan en un punto. Por tanto, la mínima distancia que las separa es 0.

5. **Dado el plano $\pi : 2x + y - z = 0$ y el punto $P(1,-2,1)$:**

a) Calcula las ecuaciones de la recta perpendicular a π y que pasa por *P*.

b) El punto P_π es la proyección ortogonal del *P* sobre el plano π. Calcula sus coordenadas.

a) Vector normal de π: $\vec{n}_\pi = (2,1,-1)$

Recta perpendicular a π y que pasa por *P*: $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

b) Se obtiene P_π al resolver el sistema formado por la recta *r* y el plano π:

$$2 + 4\lambda - 2 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6} \Rightarrow P_\pi\left(\frac{4}{3}, -\frac{11}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

6. **Dada la recta $r : x = y = z$, calcula las ecuaciones de la recta que es perpendicular a *r*, que corta a *r* y que pasa por el punto $P(1,0,0)$.**

Se calcula el plano perpendicular a *r* y que pasa por *P*:

$\vec{u}_r = (1,1,1)$ $\qquad x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \pi : x + y + z - 1 = 0$

Se obtiene P_r al resolver el sistema formado por la recta *r* y el plano π:

$$\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_r\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

La recta *s* buscada es la recta que pasa por *P* y por P_r:

$\overrightarrow{PP_r} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \approx (-2,1,1)$ $\qquad s : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow s : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

7. **a)** Demuestra que los puntos $A(-3,0,-1)$, $B(-3,-2,-2)$, $C(-1,-2,-1)$ y $D(0,1,1)$ son coplanarios.

b) Calcula el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

a) $\overrightarrow{AB} = (0,-2,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,-2,0)$, $\overrightarrow{AD} = (3,1,2)$. $\text{rg}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 2 \Rightarrow$ *A*, *B*, *C* y *D* son coplanarios.

b) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CA}\right| = \frac{\sqrt{24} + 2\sqrt{24}}{2} = 3\sqrt{6}$ u^2.

8. **a)** Demuestra que los puntos $A(3,0,1)$, $B(1,-2,1)$, $C(2,1,3)$ y $D(3,-1,1)$ no son coplanarios.

b) Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

a) $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,1,2)$, $\overrightarrow{AD} = (0,-1,0)$. $\text{rg}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 3 \Rightarrow$ *A*, *B*, *C* y *D* no son coplanarios y forman un triedro.

b) $V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{2}{3}$ u^3

9. Comprueba que las rectas *r* y *s* se cruzan y calcula su perpendicular común.

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3} \qquad s: \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$\vec{u}_r = (1,-2,3)$ $\qquad \vec{u}_s = (-1,1,2)$ $\qquad A_r = (0,0,1)$ $\qquad A_s = (0,0,0)$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = (-7,-5,-1)$$

Plano que contiene a *r* y que tiene a $\vec{u}_r \times \vec{u}_s$ como vector de dirección:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -7 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 17x - 20y - 19z + 19 = 0$$

Plano que contiene a *s* y que tiene a $\vec{u}_r \times \vec{u}_s$ como vector de dirección:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 2 \\ -7 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9x - 15y + 12z = 0$$

La perpendicular común es $t: \begin{cases} 17x - 20y - 19z + 19 = 0 \\ 9x - 15y + 12z = 0 \end{cases}$.

10. Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos:

$$\pi: 2x - y + 2z - 6 = 0 \qquad \pi': 3x + 6y + 6z - 1 = 0$$

¿Qué nombre recibe dicho lugar?

Sea $X(x,y,z)$ un punto genérico del lugar.

$$d(X, \alpha) = d(X, \beta) \Rightarrow \frac{|2x - y + 2z - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|3x + 6y + 6z - 1|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{2x - y + 2z - 6}{3} = \frac{3x + 6y + 6z - 1}{9} \Rightarrow 3x - 9y - 17 = 0$$

$$\frac{2x - y + 2z - 6}{3} = -\frac{3x + 6y + 6z - 1}{9} \Rightarrow 9x + 3y + 12z - 19 = 0 .$$

El lugar está formado por los dos planos bisectores.

11. Dada la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0$:

a) Halla su centro y su radio.

b) Calcula la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto $P(0,0,3)$.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4 \Rightarrow$ Centro: $(0,0,1)$. Radio: $r = 2$

b) El vector normal del plano será $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{CP} = (0,0,2) \parallel (0,0,1)$.

$$z + D = 0 \Rightarrow 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow z - 3 = 0$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Para que el triángulo de vértices $A(2,-3,5)$, $B(3,2,-2)$ y $C(-1,-3,m)$ tenga área de $\frac{1}{2}\sqrt{1526}$ u^2, el valor de m puede ser:**

   A. 0 **B.** 1 **C.** –1 **D.** Ninguno de los anteriores.

   $\overrightarrow{AB} = (1,5,-7)$ $\overrightarrow{AC} = (-3,0,m-5)$ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5m-25, 26-m, 15)$

   $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(5m-25)^2 + (26-m)^2 + 225} = \frac{1}{2}\sqrt{1526}$. La solución de esta ecuación es $m = 0$.

   Por tanto, la solución correcta es la A.

2. **Se quiere calcular una recta perpendicular a $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$, que se cruce con ella y que pase por $P(-1,3,-2)$.**

   A. Existen infinitas soluciones. **C.** Existen dos soluciones diferentes.

   B. Existe una única solución. **D.** Todo lo anterior es incorrecto.

   Como el punto es exterior a la recta, ya que $-2-3 \neq 0$, existirán infinitas rectas perpendiculares a ella y que se crucen con ella y que, además, pasen por P. Por tanto, la solución correcta es la A.

3. **El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,2,-2)$ es:**

   A. La recta que pasa por el punto $M(0,1,0)$ y tiene dirección perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

   B. El plano que contiene a los puntos A y B y tiene como uno de sus vectores de dirección el vector $\overrightarrow{AB}$.

   C. El plano $\pi: x - y + 2z + 1 = 0$

   D. El plano $\pi: -x + y - 2z = 0$

   La solución correcta es la C.

   Sea $X(x,y)$ un punto genérico del plano.

   $d(X,A) = d(X,B) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2} \Rightarrow$

   $\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + z^2 + 4 - 4z = x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 4 + 4z \Rightarrow \pi: x - y + 2z + 1 = 0$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **La recta r es secante con el plano π y el punto P es exterior a la recta y al plano. Se quiere calcular la ecuación de la recta s que es paralela a π, que pasa por P y que corta a r.**

   A. Un vector normal de π es de dirección de s.

   B. Un vector normal de π es perpendicular a un vector de dirección de s.

   C. Cualquier vector de dirección π también lo es de s.

   D. La recta s está contenida en el plano paralelo a π y que pasa por P.

   Son correctas B y D.

Señala el dato innecesario para contestar

5. **Para hallar el radio de la circunferencia que se obtiene al cortar el plano π y la superficie esférica:**

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

se da:

1. **La ecuación del plano π.**
2. **La distancia del plano π al origen de coordenadas.**

A. Cualquiera de los dos datos es innecesario si se conoce el otro.

B. 1 es suficiente por sí solo, pero 2 no.

C. 2 es suficiente por sí solo, pero 1 no.

D. Los datos son necesarios.

La solución correcta es la A.

Si se conoce la ecuación del plano, se puede obtener la ecuación de la circunferencia y, por tanto, su centro y su radio.

Si se conoce la distancia d del plano al origen de coordenadas, el radio de la circunferencia se puede obtener mediante $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, siendo $R = 1$ el radio de la esfera.