13 Combinatoria y probabilidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Un experimento consiste en contar el número de hojas dañadas por insectos en una planta. Sean los sucesos *A* = "el número de hojas dañadas es más de 25" y *B* = "el número de hojas dañadas está entre 20 y 35". Describe los sucesos $B - A$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$.

$B - A$: El número de hojas dañadas está entre 20 y 25.

$\overline{A} \cap \overline{B}$: El número de hojas dañadas es menor de 20.

3. En el lanzamiento de un dado dodecaédrico con las caras numeradas del 1 al 12, se consideran los sucesos *A* = "salir impar" y *B* = "salir primo". Comprueba que se cumplen las reglas de De Morgan.

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Los sucesos *A* y *B* están formados por $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Primera Ley de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \{4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad \overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 6, 8, 10, 12\}$$

Por tanto, queda comprobada la primera ley de De Morgan.

Segunda Ley de De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$A \cap B = \{3, 5, 7, 11\} \Rightarrow \overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

$$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad \overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

De esta manera, queda comprobada la segunda ley de De Morgan.

4. Ejercicio resuelto.

5. Usando un ordenador se ha simulado el lanzamiento de dos monedas. La tabla muestra las frecuencias absolutas del suceso *A* = "obtener cara en una moneda y cruz en la otra".

n	10	25	50	100	250	500	750	1000
***f*(*A*)**	3	11	26	55	128	252	373	502

Completa la tabla con las frecuencias relativas y asigna un valor aproximado a la probabilidad de *A*.

La tabla con las correpondientes frecuencias relativas es:

n	10	25	50	100	250	500	750	1000
***f*(*A*)**	3	11	26	55	128	252	373	502
***h*(*A*)**	0,3	0,44	0,52	0,55	0,512	0,504	0,497	0,502

Aproximadamente, el valor de la probabilidad de *A* es *P*(*A*) = 0,5.

6. En una población, se supone que los varones y las mujeres nacen en la misma proporción. De la población se eligen dos bebés al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos bebés sean mujeres? ¿Y de que uno sea varón y otro mujer?

Sean los sucesos A = "elegir bebé varón" y B = "elegir bebé mujer", se tiene que: $P(A)=\frac{1}{2}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$

La probabilidad de que los dos bebés sean mujeres es: $P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0,25$

La probabilidad de que uno sea varón y otro mujer es: $P(D)=\frac{1}{2}=0,5$

7. Si P es una probabilidad definida sobre el espacio muestral $E=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ con $P(w_1)=0,15$; $P(w_2)=4P(w_4)$ y $P(w_4)=3P(w_3)$, halla $P(w_3)$.

Debe verificarse que todas las probabilidades sean no negativas y que sumen 1. Es decir:

$$P(w_1)+P(w_2)+P(w_3)+P(w_4)=1$$

Como se tiene que:

$$P(w_2)=4P(w_4)=4\cdot 3P(w_3)=12P(w_3)$$

$$0,15+12P(w_3)+P(w_3)+3P(w_3)=1\Rightarrow 16P(w_3)=0,85\Rightarrow P(w_3)=\frac{0,85}{16}=0,053125$$

Las probabilidaddes de los restantes resultados son:

$$P(w_2)=0,6375 \text{ y } P(w_4)=0,159475$$

8 a 10. Ejercicios resueltos.

11. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es *x*, mientras que con otra moneda esa probabilidad es *y*. Se lanzan las dos monedas. Calcula la probabilidad de:

a) No obtener cara.

b) Obtener exactamente una cara.

c) Obtener dos caras.

¿Es posible elegir *x* e *y* de modo que las probabilidades de los apartados a, b y c sumen 1?

El espacio muestral está formado por $E=\{CC, CX, XC, XX\}$. Sean $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

a) Sea A = “no obtener cara” que es equivalente a A = “obtener dos cruces”, su probabilidad es:

$$P(A)=P(XX)=(1-x)(1-y)=1-x-y+xy$$

b) Sea B = “obtener exactamente una cara”

$$P(B)=P(CX,XC)=x(1-y)+y(1-x)=x+y-2xy$$

c) Sea D = “obtener dos caras”

$$P(D)=P(CC)=xy$$

Para ver si es posible elegir x e y de modo que las probabilidades de los apartados a, b y c sumen 1:

$$P(A)+P(B)+P(D)=1\Rightarrow 1-x-y+xy+x+y-2xy+xy=1\Rightarrow 1=1$$

Es decir, cualesquiera que sean $x, y\in[0,1]$, la suma de las probabilidades es 1. Ello se debe a que los sucesos A, B y D forman una partición del espacio muestral.

12. Dados los sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio, con $P(A)=0{,}5$, $P(B)=0{,}3$, $P(A\cap B)=0{,}2$, calcula las probabilidades de que:

a) Al menos uno de los sucesos *A* o *B* ocurra.

b) *A* o *B* ocurran, pero no los dos.

c) No ocurra ninguno de los dos sucesos.

a) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $A\cup B$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}5+0{,}3-0{,}2=0{,}6$$

b) En este caso se trata del suceso $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup B)-(A\cap B)$:

$$P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0{,}6-0{,}2=0{,}4$$

c) Debe calcularse la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$. Utilizando la ley de De Morgan:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}6=0{,}4$$

13. Sean los sucesos *A*, *B* y *C* asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A)=0{,}53$, $P(B)=0{,}54$, $P(C)=0{,}43$, $P(A\cap B)=0{,}2$, $P(A\cup C)=0{,}71$, $P(B\cup C)=0{,}82$ y $P(A\cap B\cap C)=0{,}05$, calcula:

a) $P(A\cap C)$

b) $P(B\cap C)$

c) $P(A\cup B\cup C)$

d) $P(A\cap\overline{B}\cap C)$

e) $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

f) $P(\overline{A}\cup B\cup C)$

Se deben utilizar las propiedades de la probabilidad y, en caso necesario, acudir a un diagrama de Venn:

a) En este caso:

$$P(A\cap C)=P(A)+P(C)-P(A\cup C)=0{,}53+0{,}43-0{,}71=0{,}25$$

b) De la misma forma que en el apartado anterior:

$$P(B\cap C)=P(B)+P(C)-P(B\cup C)=0{,}54+0{,}43-0{,}82=0{,}15$$

c) La probabilidad de la unión de tres sucesos se expresa:

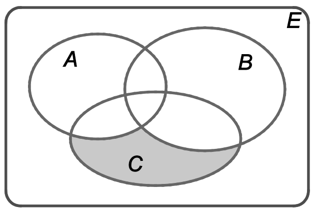
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$$
$$=0{,}53+0{,}54+0{,}43-0{,}20-0{,}25-0{,}15+0{,}05=0{,}95$$

d) Utilizando un diagrama de Venn, se puede ver que:

$$P(A\cap\overline{B}\cap C)=P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)=0{,}25-0{,}05=0{,}20$$

e) Con la ayuda de un diagrama de Venn, se puede ver que:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=P(C)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$$
$$=0{,}43-0{,}25-0{,}15+0{,}05=0{,}08$$



$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$

f) Este suceso es el suceso contrario del suceso del apartado e, es decir:

$$\overline{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}}=\overline{A}\cup B\cup C$$

Entonces:

$$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)=0{,}53-0{,}2-0{,}25+0{,}05=0{,}13$$

$$P(\overline{A}\cup B\cup C)=1-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-0{,}13=0{,}87$$

14. En una convención, el 80 % de los asistentes habla inglés, el 50 %, español, y el 90 %, al menos uno de los dos idiomas. De la convención se elige una persona al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Hable los dos idiomas.

b) Hable español, pero no inglés.

c) No hable ninguno de los dos idiomas.

d) No hable al menos uno de los dos idiomas.

Sean los sucesos A = "la persona elegida habla inglés", B = "la persona elegida habla español". Se tiene que:

$$P(A) = 0{,}8 \,,\ P(B) = 0{,}5 \text{ y } P(A \cup B) = 0{,}9$$

a) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}9 = 0{,}4$$

b) En esta ocasión es la probabilidad del suceso $B - A$:

$$P\left(B - A\right) = P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$$

c) Ahora se pide la probabilidad del suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$. Aplicando una de las leyes de De Morgan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

d) Debe calcularse la probabilidad del suceso $\overline{A} \cup \overline{B}$. Por una de las leyes de De Morgan y el resultado del apartado a, se tiene:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

15 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Una bolsa contiene tres bolas numeradas 1, 2, 3. De la bolsa se extrae una bola al azar, se anota su número y se devuelve a la bolsa. Seguidamente se extrae una segunda bola. Calcula la probabilidad de que el número más alto de los extraídos sea el 2.

En la bolsa hay tres elementos (bolas) y se realizan 2 extracciones con reemplazamiento. Los resultados posibles, que pueden considerarse equiprobables, son $VR_{3,2} = 9$, ya que importa el orden en que se extraen las bolas y los números se pueden repetir.

Si el número más alto extraído es el 2, los resultados favorables serían 11, 12 y 21. Es decir, el número de resultados favorables es 3. Aplicando la regla de Laplace:

$$P(\text{número más alto extraído sea 2}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

19. En un torneo triangular de baloncesto, dos de los equipos tienen la misma probabilidad de ganar y el tercer equipo tiene el doble de probabilidad de ganar que los otros dos. Calcula la probabilidad que tiene cada equipo de ganar el torneo.

Sean A, B y C los equipos y también los sucesos consistentes en que cada uno de ellos gane el torneo. Sea:

$$P(A) = P(B) = p \text{ y } P(C) = 2p \quad \text{con } p > 0$$

Las probabilidades deben sumar 1, luego:

$$p + p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

Por tanto,

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{4} \text{ y } P(C) = \frac{1}{2}$$

20. Se hacen tres lanzamientos de un dado. Si en el primer lanzamiento sale 2, ¿qué es más probable que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?

El conjunto de resultados posible es:

$$E = \begin{Bmatrix} 211, 212, 213, 214, 215, 216, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 231, 232, 233, 234, 235, 236, \\ 241, 242, 243, 244, 245, 246, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 261, 262, 263, 264, 265, 266 \end{Bmatrix}$$

Donde por ejemplo, 212, representa el resultado de que el primer lanzamiento salga 2, el segundo 1 y el tercero 2. Aplicando la regla de Laplace:

El suceso A = "la suma de los tres números es par" luego los tres números son pares o dos de ellos son impares.

$$A = \{211, 213, 215, 222, 224, 226, 231, 233, 235, 242, 244, 246, 251, 253, 255, 262, 264, 266\}$$

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } A}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

El suceso B = "la suma de los tres numeros es impar" para queocurra esto un número es impar y los otros pares.

$$B = \{212, 214, 216, 221, 223, 225, 232, 234, 236, 241, 243, 245, 252, 254, 256, 261, 263, 265\}$$

$$P(B) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } B}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

La probabilidad es la misma.

21. Una urna contiene una bola roja y una blanca. Se extrae una bola de la urna y se anota su color y se devuelve a la urna. Se repite el experimento dos veces más, calcula la probabilidad de que:

a) Solo una bola sea roja.

b) Al menos una bola sea roja.

c) Las tres sean blancas.

d) Sean del mismo color.

El conjunto de resultados posibles equiprobables es $E = \{BBB, BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB, RRR\}$

Donde por ejemplo, BRB, representa el resultado en el que la primera bola sea blanca, la segunda roja y la tercera blanca. Para calcular las probabilidades se puede aplicar la regla de Laplace.

a) El suceso A = "solo una bola es roja" es $A = \{BBR, BRB, RBB\}$, y su probabilidad es:

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } A}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{3}{8}$$

b) El suceso C = "al menos una bola es roja" es $C = \{BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB, RRR\}$, de modo que:

$$P(C) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } C}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{7}{8}$$

c) El suceso D = "las tres son blancas" es $D = \{BBB\}$, por lo que:

$$P(D) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } D}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{1}{8}$$

En esta ocasión se puede proceder, también, por el suceso contrario, ya que $D = \overline{C}$.

d) El suceso F = "son del mismo color" es $F = \{BBB, RRR\}$, luego:

$$P(F) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } F}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

22. Un dado octaédrico está trucado de forma que la probabilidad de cada cara es proporcional al cuadrado del número que aparece en ella. Si se lanza el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un divisor de 12?

Los números que aparecen en las caras son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. De modo que si llamas p a la probabilidad de que aparezca en la cara 1, es decir, $P(1)=p$ se tiene que las siguientes probabilidades son $P(2)=4p$, $P(3)=9p$, $P(4)=16p$, $P(5)=25p$, $P(6)=36p$, $P(7)=49p$, $P(8)=64p$.

Como la suma de estas probabilidades es 1 se tiene que:

$$p+4p+9p+16p+25p+36p+49p+64p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{204}$$

La probabilidad pedida es la que aparezca en las caras 1, 2, 3, 4 o 6, luego $P(D)=\frac{66}{204}=\frac{11}{34}$.

23. Ejercicio interactivo.

24. Ejercicio resuelto.

25. Se lanza un dado dos veces consecutivas. Calcula la probabilidad de que:

a) La suma de los puntos sea 5.

b) La diferencia de puntuaciones, en valor absoluto, en los dos lanzamientos sea menor que 3.

c) El producto de los puntos sea múltiplo de 6.

El número de resultados posibles equiprobables al lanzar un dado dos veces consecutivas es $VR_{6,2}=6^2=36$

a) El número de resultados favorables al suceso A = “la suma de los puntos es 5” es 4, por tanto:

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

b) El número de resultados favorables al suceso B = “la diferencia de puntuaciones es menor que 3” es 24, luego:

$$P(B)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

c) El número de resultados favorables al suceso C = "el producto de los puntos es múltiplo de 6" es 6, por lo que:

$$P(C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

26. Con las cifras del 1 al 9 se forman al azar números de 4 cifras. Calcula la probabilidad de que el número formado sea múltiplo de cinco si:

a) El número tiene las cifras distintas.

b) El número puede tener cifras repetidas.

a) Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se pueden formar $V_{9,4}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$ números de 4 cifras distintas. Sea el suceso A = “el número formado es múltiplo de 5”. Los resultados favorables al suceso A son $V_{8,3}=8\cdot 7\cdot 6=336$, puesto que para ser múltiplo de 5 el número formado debe acabar en 5, y quedarían 8 cifras para 3 lugares. Es decir:

$$P(A)=\frac{336}{3024}=\frac{1}{9}$$

b) Si las cifras se pueden repetir, el número de resultados posibles son $VR_{9,4}=9^4=6561$ y los resultados favorables al suceso A = “el número formado acaba en 5” son ahora $VR_{9,3}=9^3=729$.

$$P(A)=\frac{729}{6561}=\frac{1}{9}$$

27. Se lanzan tres dados y se observan los resultados obtenidos. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Tres caras iguales.

b) Suma igual a 10.

a) En el experimento de lanzar tres dados, el número de resultados posibles equiprobables es $VR_{6,3} = 6^3 = 216$

Sea el suceso A = "obtener tres caras iguales". Los resultados favorables al suceso A son 6, ya que $A = \{111, 222, 333, 444, 555, 666\}$.

Luego:

$$P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

b) Los resultados favorables al suceso B = "obtener suma igual a 10" son (entre paréntesis sus respectivas permutaciones) 136 (6), 145 (6), 226 (3), 235 (6), 244 (3), 334 (3).

En total 27 resultados favorables al suceso B. Luego:

$$P(B) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

28. Se lanzan simultáneamente un dado y una moneda. Calcula la probabilidad de:

a) Obtener par en el dado.

b) Obtener cara y número impar.

El espacio muestral consta de 12 resultados posibles $E = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1X, 2X, 3X, 4X, 5X, 6X\}$

Los números indican los resutados del dado y C (cara) y X (cruz) los de la moneda.

a) Los resultados favorables al suceso A = "obtener par en el dado" son 6, por lo que:

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

b) Para el suceso B = "obtener cara y número impar" los resultados son 3, ya que $B = \{1C, 3C, 5C\}$, entonces:

$$P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $VR_{x,3} - V_{x,2} = 2V_{x,3} + 4$

b) $\dfrac{V_{x,2}}{VR_{x,2}} + \dfrac{V_{x,x-1}}{x!} = \dfrac{3}{2}$

a) Desarrollando y simplificando la expresión, resulta:

$$x^3 - x(x-1) = 2x(x-1)(x-2) + 4$$

$$x^3 - x^2 + x = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 4 = 0$$

Que admite la factorización:

$$(x-4)(x^2 - x - 1) = 0$$

Como el segundo factor no tiene solución entera, el resultado es, por tanto $x = 4$.

b) Procediendo de forma similar al apartado anterior:

$$\frac{x(x-1)}{x^2} + \frac{x!}{x!} = \frac{3}{2}$$

$$2(x^2 - x) + 2x^2 = 3x^2$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$$

Por lo que la única solución válida es $x = 2$.

30. Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 rojas. De la bolsa se extraen 3 bolas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Haya al menos una bola roja entre las extraídas.

b) Las 3 sean del mismo color.

Al no importar el orden en que se realizan las extracciones (pueden extraerse las tres bolas simultáneamente), el número de resultados posibles es:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

a) Si A = "al menos una bola roja entre las tres extraídas", su contrario es $\overline{A}$ = "ninguna de las tres es roja" (las tres son blancas)

Los resultados favorables al suceso $\overline{A}$ y su probabilidad son:

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{4}{35}$$

De manera que:

$$P(A) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

b) El suceso C = "las tres sean del mismo color" se puede escribir como la unión de dos sucesos incompatibles: $\overline{A}$: "las tres son blancas" y B: "las tres son rojas" . De esta manera:

$$P(C) = P(\overline{A}) + P(B) = \frac{4}{35} + \frac{1}{35} = \frac{1}{7}$$

31. Se reparten al azar 12 folios entre 4 niños, ¿cuál es la probabilidad de que a uno de los cuatro no le toque ningún folio?

Para contar el número de resultados posibles al repartir entre cuatro niños doce folios, se pueden utilizar combinaciones con repetición.

Se colocan en línea los 12 folios y 3 separadores para indicar los que corresponden a cada niño. Por ejemplo:

F / FFF / FFFFF / FFF

Así el niño A se ha llevado 1 folio, el niño B 3 folios, el niño C 5 folios y el niño D 3 folios.

De esta forma, repartir 12 folios entre 4 niños, equivale a elegir 3 elementos (o 12) de los 15 (los 12 folios y los 3 separadores) no importando el orden. Es decir:

$$CR_{4,12} = C_{15,3} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$$

Sea el suceso A = “a uno de los cuatro no le toca ningún folio”

Para contar el número de resultados favorables, debe elegirse en primer lugar el niño que se queda sin folios (4 posibilidades) y por cada una de estas, se reparten los 12 folios entre los 3 niños restantes niños. Esto es:

$$4CR_{3,12} = 4C_{14,2} = 4 \cdot \binom{14}{2} = 4 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} = 364$$

Por último, aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{364}{455} = \frac{4}{5}$$

32. Ejercicio interactivo.

33 y 34. Ejercicios resueltos.

35. Un local comercial, dispone de dos sistemas de alarma, A y B interconectados. La probabilidad de que el sistema A funcione correctamente es 0,9. Además, en la mitad de las ocasiones ha fallado el B, una vez que también había fallado el sistema A. Mientras que la probabilidad de que una vez que ha fallado B también lo haya hecho A es 0,25. Calcula la probabilidad de que:

a) El sistema B no funcione.

b) No funcione ninguno de los dos sistemas.

c) Funcione al menos uno de los sistemas.

Sean los sucesos A = "El sistema A funciona correctamente", B = "El sistema B funciona correctamente". La información disponible es:

$$P(A)=0{,}9,\ P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=0{,}5,\ P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=0{,}25$$

Se deben calcular las probabilidades de B y de $A\cap B$, para ello:

$$P(B\mid A)=0{,}5\Rightarrow P\left(B\mid\overline{A}\right)=0{,}5\Rightarrow\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=0{,}5\Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=0{,}5\cdot P\left(\overline{A}\right)=0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}05$$

De manera que resulta la ecuación $P(B)-P(A\cap B)=0{,}05$. Por otra parte,

$$P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=0{,}25\Rightarrow P\left(A\mid\overline{B}\right)=0{,}75\Rightarrow\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=0{,}75\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=0{,}75(1-P(B))$$

Sustituyendo y simplificando se obtiene una segunda ecuación: $-0{,}75P(B)+P(A\cap B)=0{,}15$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} P(B)-P(A\cap B)=0{,}05\\ -0{,}75P(B)+P(A\cap B)=0{,}15\end{cases}$$

$$P(B)=0{,}8,\ P(A\cap B)=0{,}75$$

a) La probabilidad de que el sistema B no funcione, se obtiene de forma inmediata:

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}8=0{,}2$$

b) La probabilidad de que no funcione ningún sistema viene dada por el suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)=0{,}25\cdot 0{,}2=0{,}05$$

c) La probabilidad de que funcione al menos un sistema se obtiene mediante una de las leyes de De Morgan:

$$P(A\cup B)=1-P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-0{,}05=0{,}95$$

36. Sean *A* y *B* dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}6$ y $P(A\cup B)=0{,}9$, calcula $P(A\mid\overline{B})$ y $P(B\mid\overline{A})$.

Se calcula, en primer lugar, la probabilidad del suceso intersección de A y B:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}7+0{,}6-0{,}9=0{,}4$$

Entonces:

$$P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{0{,}7-0{,}4}{1-0{,}6}=0{,}75$$

$$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)}=\frac{0{,}6-0{,}4}{1-0{,}7}=0{,}6667$$

37. En una población, de cada cien bebés que nacen, 30 son rubios y el resto morenos. De los rubios, el 80 % tiene los ojos azules, mientras que tienen ojos azules el 20 % de los morenos. Si se elige un bebé al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea rubio y tenga los ojos azules.

b) Sea moreno y no tenga los ojos azules.

Sean los sucesos R = "el bebé es rubio", M = "el bebé es moreno" y A = "el bebé tiene los ojos azules". Por los datos proporcionados se sabe que: $P(R)=0{,}3$, $P(M)=0{,}7$, $P(A\mid R)=0{,}8$ y $P(A\mid M)=0{,}2$.

a) Se trata de la probabilidad del suceso $R\cap A$

$$P(R\cap A)=P(A\mid R)P(R)=0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}24$$

b) En este caso se debe calcular la probabilidad del suceso $M\cap\overline{A}$

$$P\left(M\cap\overline{A}\right)=P(\overline{A}\mid M)P(M)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$$

Siendo $P(\overline{A}\mid M)=1-P(A\mid M)=1-0{,}2=0{,}8$

38. En una campaña de prevención de la gripe se vacuna al 40 % de la población en riesgo. Se sabe que la enfermedad afecta al 20 % de los vacunados y al 50 % de los no vacunados. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:

a) Enferme y haya sido vacunada.

b) Enferme y no haya sido vacunada.

Sean los sucesos V = "la persona ha sido vacunada" y F = "la persona enferme".

Se tiene que:

$$P(V)=0{,}4\ ,\ P(\overline{V})=0{,}6\ ,\ P(F\mid V)=0{,}2\ ,\ P\left(F\mid\overline{V}\right)=0{,}5$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $V\cap F$, que se calcula:

$$P(V\cap F)=P(F\mid V)P(V)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$$

b) En este caso, se trata del suceso $\overline{V}\cap F$, cuya probabilidad es:

$$P\left(\overline{V}\cap F\right)=P\left(F\mid\overline{V}\right)P\left(\overline{V}\right)=0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}3$$

39. Ejercicio resuelto.

40. Dos máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1 % y 10 %, respectivamente. Las piezas fabricadas en una hora están mezcladas y elegimos una al azar. Calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B y no sea defectuosa.

Sean los sucesos A = "la pieza ha sido fabricada por la máquina A", B = "la pieza ha sido fabricada por la máquina B" y C = "la pieza es defectuosa".

$$P(A)=\frac{50}{300}=\frac{1}{6}\ ;\ P(B)=\frac{250}{300}=\frac{5}{6}\ ;\ P(D\mid A)=0{,}01;\ P(D\mid \mathrm{B})=0{,}1$$

Se pide la probabilidad del suceso $B\cap\overline{D}$:

$$P\left(B\cap\overline{D}\right)=P\left(\overline{D}\mid B\right)P(B)=0{,}9\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{4}$$

Donde $P\left(\overline{D}\mid B\right)=1-P(D\mid B)=1-0{,}1=0{,}9$

41. Se lanza una moneda tres veces. Sea el suceso A_j = "en el lanzamiento j se obtiene CRUZ" (j= 1, 2, 3). Los sucesos A_j ¿son mutuamente independientes?

El espacio muestral correspondiente al lanzamiento de una moneda tres veces es:

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Si la moneda está equilibrada, los resultados del espacio muestral son equiprobables. Además, los sucesos son:

$$A_1 = \{XCC, XCX, XXC, XXX\} \quad A_2 = \{CXC, CXX, XXC, XXX\} \quad A_3 = \{CCX, CXX, XCX, XXX\}$$

De esta manera, mediante la regla de Laplace, se obtiene que:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte:

$$A_1 \cap A_2 = \{XXC, XXX\} \ , \ A_1 \cap A_3 = \{XCX, XXX\} \ , \ A_2 \cap A_3 = \{CXX, XXX\}$$

De manera que:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Y puede comprobarse que:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{4} \quad \text{para } i, j = 1,2,3 \text{ e } i \neq j$$

Es decir, los sucesos son independientes dos a dos.

Además, el suceso intersección de los tres es:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{XXX\}$$

Con lo que su probabilidad es:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Y, por tanto, los sucesos son mutuamente independientes, puesto que son independientes dos a dos e independientes en conjunto.

42. En una atracción de feria, dos personas, A y B, lanzan una pelota a un blanco en movimiento. En promedio, A acierta una de cada tres veces, y B, una de cada cuatro. Si A lanza en primer lugar y luego se van turnando, ¿cuál es la probabilidad de que el primer acierto en el blanco se produzca en el tercer lanzamiento? ¿Y en el 5.º?

Considera los sucesos A_i = "A acierta en el lanzamiento i" i= 1,3,5,... y B_i = "B acierta en el lanzamiento i" i=2,4,6,...

Los lanzamientos son independientes y en cada lanzamiento las probabilidades de acertar de A y B son:

$$P(A_i) = \frac{1}{3} \ , \ P(B_i) = \frac{1}{4}$$

Para que el primer acierto en el blanco se produzca en el tercer lanzamiento, el suceso que ocurre es $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3$

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

De la misma forma, el primer acierto en el quinto lanzamiento $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{B_4} \cap A_5$

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{B_4} \cap A_5) = P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(\overline{A_3})P(\overline{B_4})P(A_5) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

43. Ejercicio interactivo.

44 a 46. Ejercicios resueltos.

47. Una bolsa contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. De la bolsa se extrae al azar una bola y se reemplaza por otra del otro color. A continuación se extrae una segunda bola. Calcula la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

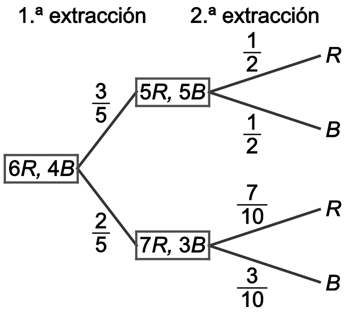
b) Dos bolas extraídas sean blancas.

Sean los sucesos R_1 = "la bola en la primera extracción es roja", B_1 = "la bola en la primera extracción es blanca".

$$P(R_1) = \frac{3}{5} \;\; ; \;\; P(B_1) = \frac{2}{5}$$

Para la segunda extracción, la composición de la bolsa es $U_1 = (5R, 5B)$ con probabilidad $\frac{3}{5}$ y $U_2 = (7R, 3B)$ con probabilidad $\frac{2}{5}$.

La situación se describe en el diagrama de árbol.



a) Sea R_2 = "la bola en la segunda extración es roja". Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(R_2) = P(R_2 \mid U_1)P(U_1) + P(R_2 \mid U_2)P(U_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{7}{10}\cdot\frac{2}{5} = \frac{29}{50}$$

b) Si B_2 = "la bola en la segunda extracción es blanca" Se debe calcular la probabilidad del suceso:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 \mid B_1)P(B_1) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$$

48. Una epidemia de gripe afecta al 10 % de la población. El sistema de diagnóstico utilizado da positivo en una persona enferma en el 90 % de los casos, y negativo en una persona sana, en el 95 % de los casos. De la población se elige una persona al azar. Calcula la probabilidad de que el test diagnóstico de negativo.

Se considera el suceso A = "la persona está afectada por la enfermedad", junto con su contrario $\overline{A}$:

$$P(A) = 0{,}1 \;\; , \;\; P(\overline{A}) = 0{,}9$$

Además, sea D = "el diagnóstico es positivo" y su contrario $\overline{D}$ = "el diagnóstico es negativo" y se sabe que:

$$P(D \mid A) = 0{,}9 \;\; , \;\; P\left(\overline{D} \mid \overline{A}\right) = 0{,}95$$

Se pide la probabilidad del suceso $\overline{D}$. Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{D}) = P\left(\overline{D} \mid A\right)P(A) + P\left(\overline{D} \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) = 0{,}1\cdot 0{,}1 + 0{,}95\cdot 0{,}9 = 0{,}865$$

Puesto que $P\left(\overline{D} \mid A\right) = 1 - P(D \mid A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

49. En una auditoría trabajan tres personas, *A*, *B* y *C*. *A* realiza el 30 % de las auditorías de, *B* realiza el 45 % y *C* realiza el resto. El porcentaje de errores de *A*, *B* y *C*, es respectivamente 1 %, 3 % y 2 %. Elegida una inspección al azar, calcula la probabilidad de que no tenga errores.

Se considera el suceso *D* = "no tenga errores". Se sabe que:

$P(D|A)=0,99$, $P(D|B)=0,97$, $P(D|C)=0,98$

Por el teorema de la probabilidad total se tiene:

$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=0,3\cdot 0,99+0,45\cdot 0,97+0,25\cdot 0,98=0,9785$

50. El 63 % de los usuarios de móvil en España tiene un *smartphone*. Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77 % lo emplea para su conexión habitual a internet. Sin embargo, entre los propietarios de otro tipo de teléfono móvil solo el 8 % lo emplea para la conexión habitual a internet. Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a internet a través del teléfono móvil.

Se considera el suceso *A* = "conectarse a Internet a través del móvil". Se sabe que:

$P(A|S)=0,77$, $P(A|\overline{S})=0,08$

Por el teorema de la probabilidad total se tiene que:

$P(A)=P(S)P(A|S)+P(\overline{S})P(A|\overline{S})=0,63\cdot 0,77+0,37\cdot 0,08=0,5147$

51 y 52. Ejercicios resueltos.

53. El 30 % de los habitantes de una localidad son jubilados y el 20 % son estudiantes, mientras que el resto ni están jubilados ni son estudiantes. El 80 % de los jubilados, así como el 20 % de los estudiantes y el 40 % del resto de habitantes, son socios del club de fútbol local.

a) Elegido al azar un habitante de esa localidad, calcula la probabilidad de que sea socio del club de fútbol.

b) Elegido al azar un socio del club de fútbol, calcula la probabilidad de que sea jubilado.

c) Elegida al azar una persona que no es socio del club, ¿qué es más probable que sea jubilado o estudiante?

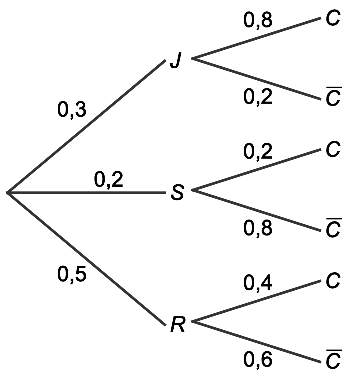
Se consideran los sucesos *J* = “el habitante es jubilado”, *S* = “el habitante es estudiante”, *R* = “el habitante no es jubilado ni estudiante”. Además, sea *C* = “el habitante es socio del club de fútbol”. Se tiene que:

$P(J)=0,3$ $P(S)=0,2$ $P(R)=0,5$ $P(C\mid J)=0,8$ $P(C\mid S)=0,2$ $P(C\mid R)=0,4$

En el diagrama de árbol se describe la situación.

a) $P(C)=P(C\mid J)P(J)+P(C\mid S)P(S)+P(C\mid R)P(R)=0,8\cdot 0,3+0,2\cdot 0,2+0,4\cdot 0,5=0,48$

b) $P(\text{J}\mid \text{C})=\dfrac{P(C\mid J)P(J)}{P(C)}=\dfrac{0,8\cdot 0,3}{0,48}=0,5$



c) Se deben calcular las probabilidades $P\left(\text{J}\mid \overline{\text{C}}\right)$ y $P\left(\text{S}\mid \overline{\text{C}}\right)$ y compararlas:

$$P\left(\text{J}\mid \overline{\text{C}}\right)=\frac{P(J\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(J)-P(J\cap C)}{1-P(C)}=\frac{0,3-0,24}{1-0,48}=0,1154$$

Donde $P(J\cap C)=P(C\mid J)P(J)=0,8\cdot 0,3=0,24$

$$P\left(\text{S}\mid \overline{\text{C}}\right)=\frac{P(S\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(S)-P(S\cap C)}{1-P(C)}=\frac{0,2-0,04}{1-0,48}=0,3077$$

Donde $P(S\cap C)=P(C\mid \text{S})P(S)=0,2\cdot 0,2=0,04$

De forma que si la persona elegida al azar no es socio del club de fútbol, entonces es más probable que sea estudiante que jubilado.

54. El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde, 150, y por la noche, 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde, del 4 %, y por la noche, de un 6 %.

a) Calcula la probabilidad de que se retrase un vuelo con destino a este aeropuerto.

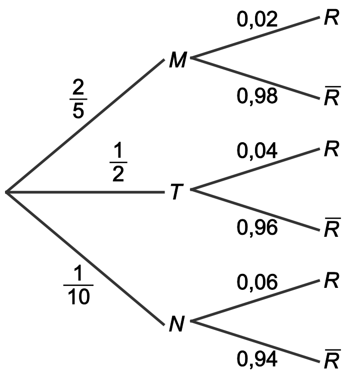
b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo nocturno?

Se consideran los sucesos M = “el vuelo es de la mañana”, T = “el vuelo es de la tarde” y N = “el vuelo es de la noche”. Estos tres sucesos, forman una partición del espacio muestral.

Además, sea R = “el vuelo llega con retraso”. El número total de vuelos es 300, de modo que:

$$P(M)=\frac{120}{300}=\frac{2}{5}\quad P(T)=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}\quad P(N)=\frac{30}{300}=\frac{1}{10}\quad P(R\mid M)=0{,}02\quad P(R\mid T)=0{,}04\quad P(R\mid N)=0{,}06$$

El diagrama de árbol ilustra la situación:



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(R)=P(R\mid M)P(M)+P(R\mid T)P(T)+P(R\mid N)P(N)=$$
$$=0{,}02\cdot\frac{2}{5}+0{,}04\cdot\frac{1}{2}+0{,}06\cdot\frac{1}{10}=0{,}034$$

b) Mediante el teorema de Bayes:

$$P(\mathrm{N}\mid \mathrm{R})=\frac{P(R\mid N)P(N)}{P(R)}=\frac{0{,}06\cdot 0{,}1}{0{,}034}=0{,}1765$$

55. Ejercicio interactivo.

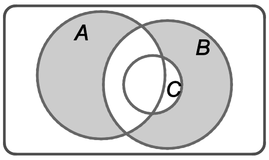
56 a 61. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

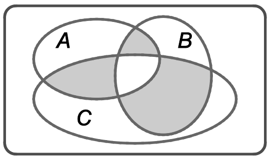
Experimentos aleatorios. Sucesos.

62. En los siguientes diagramas de Venn, obtén la parte coloreada mediante operaciones con sucesos.

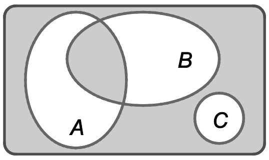
a)



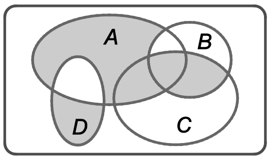
c)



b)



d)



En los cuatro casos, se expresan las partes coloreadas como unión de sucesos mutuamente excluyentes.

a) $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)$

c) $\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$

b) $(A\cap B)\cup\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)$

d) $(\overline{A}\cap D)\cup(B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{D})$

63. Una tarde de sábado, un joven tiene la posibilidad de realizar, en exclusiva, las siguientes cuatro posibilidades *A* = "ir al cine", *B* = "estudiar", *C* = "hacer deporte" o *D* = "no hacer nada". Describe los sucesos siguientes.

a) $A \cup \left(C \cap \overline{A}\right)$ **b)** $(A - B) \cup \overline{B}$ **c)** $D \cap \left(\overline{A - D}\right)$

a) Aplicando la propiedad distributiva:

$$A \cup \left(C \cap \overline{A}\right) = (A \cup C) \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = A \cup C$$

Entonces, el suceso propuesto se puede describir como "Ir la cine o bien hacer deporte o bien ambas actividades".

b) Teniendo en cuenta que:

$$(A - B) \cup \overline{B} = \overline{B}$$

De modo que el suceso propuesto se puede describir como "No estudiar".

c) En este caso, por una de las leyes de De Morgan y simplificando:

$$D \cap \left(\overline{A - D}\right) = D \cap \left(\overline{A} \cup D\right) = D$$

Es decir, el suceso es "No hacer nada"

Probabilidad y propiedades

64. En un experimento aleatorio, la probabilidad de un suceso *A* es dos veces la probabilidad de otro suceso *B*, y la suma de la probabilidad de *A* y la probabilidad del suceso contrario a *B* es 1,3. Se sabe, además, que la probabilidad de la intersección de *A* y *B* es 0,18. Calcula la probabilidad de que:

a) Se verifique el suceso *A* o se verifique el suceso *B*.

b) Se verifique el suceso contrario de *A* o se verifique el suceso contrario de *B*.

Llamamos $P(A) = x \quad P(B) = y$

Con lo que $P(\overline{B}) = 1 - y$

Planteando el sistema de ecuaciones y resolviendolo se obtienen los valores de *x* e *y:*

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + 1 - y = 1{,}3 \end{cases} \Rightarrow 2y + 1 - y = 1{,}3 \Rightarrow y = 0{,}3 \quad x = 0{,}6$$

De este modo, completando con la probabilidad del suceso intersección, se tiene que:

$$P(A) = 0{,}6 \quad P(B) = 0{,}3 \quad P(A \cap B) = 0{,}18$$

a) Se trata de la probabilidad del suceso unión de *A* y *B*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}18 = 0{,}72$$

b) En este caso, se pide la probabilidad del suceso $\overline{A} \cup \overline{B}$, que se puede obtener utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$$

65. Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios tales que $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}4$ y $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}7$. Calcula:

a) $P(A\cap B)$ **b)** $P(A\cup B)$ **c)** $P\left(A\cap\overline{B}\right)$

a) $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}7\Rightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0{,}7\Rightarrow P(A\cap B)=1-P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-0{,}7=0{,}3$

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}6+0{,}4-0{,}3=0{,}7$

c) $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=0{,}6-0{,}3=0{,}3$

Asignación de probabilidades. Espacios finitos

66. Se lanza 3 veces consecutivas un dado equilibrado. Calcula la probabilidad de:

a) Obtener al menos un uno.

b) Obtener un seis solo en el tercer lanzamiento.

El número de resultados posibles equiprobables al lanzar tres veces un dado equilibrado es $VR_{6,3}=6^3=216$.

En los cálculos de las probabilidades se puede utilizar la regla de Laplace.

a) Sea el suceso *A* = "obtener al menos un uno" y su contrario es $\overline{A}$ = "no obtener ningún uno".

Los resultados favorables al suceso $\overline{A}$ son $VR_{5,3}=5^3=125$. Luego:

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{125}{216}\Rightarrow P(A)=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

b) Si solo debe aparecer un seis en el tercer lanzamiento, este queda fijo, y en los dos primeros puede haber $VR_{5,2}=25$ resultados favorables. Por lo que la probabilidad del suceso *B* = "obtener solo seis en el tercer lanzamiento" es:

$$P(B)=\frac{25}{216}$$

67. Un tarro contiene 25 caramelos de naranja, 12 de limón y 8 de café. Se extraen dos caramelos al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambos sean de naranja.

b) Ambos sean del mismo sabor.

c) Ninguno sea de café.

Suponiendo que todos los resultados posibles son equiprobables, se aplica la regla de Laplace.

El número de resultados posibles de extraer 2 caramenlos de un tarro que tiene 45 caramelos es:

$$C_{45,2}=\binom{45}{2}=\frac{45\cdot 44}{2}=990$$

a) Sea el suceso N = "los dos caramelos son de naranja", el número de resultados favorables al suceso N y su probabilidad son:

$$C_{25,2}=\binom{25}{2}=\frac{25\cdot 24}{2}=300 \Rightarrow P(N)=\frac{300}{990}=\frac{10}{33}=0,30303$$

b) Puede que los dos caramelos sean naranja (N), como en el apartado a, o los dos sean de limón (L) o los dos sean de café (C).

Los resultados favorables al suceso L y su probabilidad son:

$$C_{12,2}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2}=66 \Rightarrow P(L)=\frac{66}{990}=\frac{1}{15}=0,06667$$

Los resultados favorables al suceso C y su probabilidad son:

$$C_{8,2}=\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{2}=28 \Rightarrow P(C)=\frac{28}{990}=\frac{14}{495}=0,0283$$

Como los tres sucesos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de la unión de los tres es:

$$P(N\cup L\cup C)=P(N)+P(L)+P(C)=\frac{300}{990}+\frac{66}{990}+\frac{28}{990}=\frac{394}{990}=\frac{197}{495}=0,398$$

c) Si ninguno es de café, los dos caramelos deben ser extraídos de los que son de naranja o limón, en total 37 caramelos. De modo que los resultados favorables al suceso D = "ninguno de los dos es de café" y su probabilidad son:

$$C_{37,2}=\binom{37}{2}=\frac{37\cdot 36}{2}=666 \Rightarrow P(D)=\frac{666}{990}=\frac{37}{55}=0,67272$$

68. Con las cifras 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, se forman al azar números de 4 cifras distintas. Calcula la probabilidad de que el número sea par y mayor que 5000.

El número total de números de 4 cifras distintas que se pueden formar con las 7 cifras (resultados posibles) es:

$$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Sea el suceso A = "el número formado es par y mayor que 5000".

Para contar el número de resultados favorables al suceso A, se debe tener en cuenta que:

- Hay 4 cifras pares que pueden ocupar la posición de las unidades: 2, 4, 6, 8
- Hay 4 cifras que pueden ocupar la posición de las decenas de millar: 5, 6, 7, 8
- Si la cifra de las unidades es 2 o 4, se dispone de las cuatro cifras (5, 6, 7, 8) para las unidades de millar y por cada una de esas posibilidades, las dos posiciones centrales pueden ocuparse con las restantes cinco cifras. En total: $2 \cdot 4 \cdot V_{5,2} = 160$
- Si la cifra de las unidades es 6 u 8, se dispone de tres cifras (5, 7, 8 o 5, 6, 7 respectivamente) para las decenas de millar y por cada una de esas posibilidades, las dos posiciones centrales pueden ocuparse con las restantes cinco cifras. En total: $2 \cdot 3 \cdot V_{5,2} = 120$

En total, el número de resultados favorable es $160 + 120 = 280$.

Y, suponiendo que los resultados posibles son equiprobables, se puede aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad del suceso *A:*

$$P(A) = \frac{280}{840} = \frac{1}{3}$$

69. Se elige al azar un número de 4 cifras distintas escrito con las cifras 1, 2, 3 y 4. Calcula la probabilidad de que en dicho número las cifras 2 y 3 aparezcan seguidas y en el orden 23.

Con las cuatro cifras se pueden formar $P_4 = 4! = 24$ números de cifras distintas. Esos son los resultados posibles.

Sea el suceso A = "Las cifras 2 y 3 aparecen seguidas y en el orden 23". El 2 y el 3 aparecen seguidos en ese orden solo en tres posiciones, como se puede ver en la tabla:

2	3		
	2	3	
		2	3

Por cada una de estas posiciones, las otras dos cifras pueden ordenarse de $P_2 = 2! = 2$ formas posibles. En total $3 \cdot 2 = 6$ resultados favorables. De esta manera, por la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Probabilidad condicionada. Independencia

70. Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,1$. Calcula cada una de las siguientes probabilidades.

a) $P(A \cup B)$ **b)** $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$ **c)** $P(A \mid B)$ **d)** $P\left(\overline{A} \cap B\right)$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,1 = 0,8$

b) $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

c) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$

d) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

71. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, con $P(A\cap B)=0{,}1$, $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0{,}6$ y $P(A\mid B)=0{,}5$. Calcúlense:

a) $P(B)$ **b)** $P(A\cup B)$ **c)** $P(A)$ **d)** $P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)$

a) Para el cálculo de $P(B)$, se procede a partir de la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\mid B)}=\frac{0{,}1}{0{,}5}=0{,}2$$

b) En este caso, se tiene en cuenta la ley de De Morgan $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0{,}6\Rightarrow P\left(\overline{A\cup B}\right)=0{,}6\Rightarrow P(A\cup B)=1-0{,}6=0{,}4$$

c) De las propiedades de la probabilidad y los resultados de los apartados anteriores:

$$P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(A\cap B)=0{,}4-0{,}2+0{,}1=0{,}3$$

d) De la definición de probabilidad condicionada:

$$P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0{,}6}{1-P(A)}=\frac{0{,}6}{1-0{,}3}=\frac{6}{7}$$

72. Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{3},\ P(C)=\frac{1}{4},\ P(A\mid B)=P(C\mid A)=\frac{1}{2},\ P(A\cup B\cup C)=\frac{2}{3},\ P(A\cap B\cap C)=0$$

Calcula $P(C\cap B)$ y $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\right)$.

De las propiedades de la probabilidad:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A\cap B)=P(A\mid B)P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\qquad P(A\cap C)=P(C\mid A)P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Y las demás probabilidades son conocidas excepto $P(B\cap C)$. Despejando esta, resulta:

$$P(B\cap C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+0-\frac{2}{3}=0$$

Mientras que, utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\right)=P\left(\overline{A\cap B\cap C}\right)=1-P(A\cap B\cap C)=1-0=1$$

73. La probabilidad de que tenga lugar el suceso *A* es $\frac{2}{3}$, la probabilidad de que no ocurra el suceso *B* es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que ocurra el suceso *A* o el suceso *B* es $\frac{19}{24}$. Calcula:

a) La probabilidad de que ocurran a la vez el suceso *A* y el suceso *B*.

b) La probabilidad de que no ocurra *A* y no ocurra *B*.

c) La probabilidad de que ocurra *A* sabiendo que ha ocurrido *B*.

d) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? ¿Por qué?

Las probabilidades dadas son: $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{B}) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{19}{24}$.

Y de aquí que $P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

a) Se trata del suceso $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{19}{24} = \frac{5}{8}$$

b) Ahora es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$$

c) Se pide la probabilidad condicionada $P(A \mid B)$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$$

d) Los sucesos *A* y *B* son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$:

$$P(A \cap B) = \frac{5}{8} \qquad P(A)P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, los sucesos *A* y *B* no son independientes.

74. La probabilidad de que ocurra el contrario de un suceso *A* es $\frac{1}{3}$, la probabilidad de un suceso *B* es $\frac{3}{4}$ y la probabilidad de que ocurran a la vez *A* y *B* es $\frac{5}{8}$. Se pide:

a) Probabilidad de que ocurran el suceso *A* o el suceso *B*.

b) Probabilidad de que no ocurra ni el suceso *A* ni el suceso *B*.

c) Probabilidad de que ocurra *A*, sabiendo que ha ocurrido *B*.

d) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? Razona la respuesta.

Las probabilidades dadas son $P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{3}{4}$ y $P(A\cap B)=\frac{5}{8}$. Y, por tanto $P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

a) Se trata de la probabilidad de la unión de los sucesos *A* y *B*, es decir:

$$P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{19}{24}$$

b) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$, que utilizando las leyes de De Morgan se puede escribir:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{19}{24}=\frac{5}{24}$$

c) La probabilidad de *A* condicionada a que ha ocurrido *B* es:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

d) No son independientes, puesto que puede comprobarse rápidamente que:

$$P(A\mid B)=\frac{5}{6}\neq P(A)=\frac{2}{3}$$

75. Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios independientes de los que se conoce que $P(A)=0{,}5$ y $P(B)=0{,}3$.

a) Indica, razonadamente, si *A* y *B* son sucesos incompatibles.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda *A* y no suceda *B*?

c) Halla la probabilidad de que no ocurra el suceso *A* si se sabe que no ha ocurrido el suceso *B*.

d) Calcula $P(A\mid\overline{B})$.

a) Como *A* y *B* son independientes, la probabilidad del suceso intersección $A\cap B$ es:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}15$$

De manera que los sucesos no son incompatibles, ya que si lo fueran $A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=0$.

b) Se trata del suceso $A\cap\overline{B}$, cuya probabilidad es:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)P\left(\overline{B}\right)=0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}35$$

c) La probabilidad de $\overline{A}$ condicionada a que ha ocurrido $\overline{B}$ es:

$$P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)=0{,}5$$

d) En este caso, de la definición de probabilidad condicionada:

$$P\left(A\mid\overline{B}\right)=P(A)=0{,}5$$

76. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio, con $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}6$ y $P\left(A\cap\overline{B}\right)=0{,}1$:

a) Halla $P(A\cap B)$.

b) Calcula $P(A\mid B)$ y $P(\overline{A}\mid\overline{B})$.

a) $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right)=0{,}3-0{,}1=0{,}2$

b) $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}6}=\dfrac{1}{3}$

$$P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-0{,}7}{1-0{,}6}=\frac{0{,}3}{0{,}4}=\frac{3}{4}$$

Ya que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}3+0{,}6-0{,}2=0{,}7$

Probabilidad total. Teorema de Bayes

77. Considera dos urnas, la primera con 5 bolas blancas y 6 verdes y la segunda con 4 bolas blancas y 3 verdes. De la primera se extraen dos bolas al azar y se pasan a la segunda urna. Finalmente, de la segunda urna se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) La bola sea verde.

b) Las bolas que se han pasado de la primera urna a la segunda sean verdes, si la bola extraída de la segunda ha sido verde.

Sean $U_1 = (6V, 5B)$ y $U_2 = (3V, 4B)$ las dos urnas. De la urna U_1 se extaren dos bolas, que se introducen en U_2.

Las bolas extraídas de la primera urna pueden ser A = "las dos verdes", B = "una blanca y una verde" y C = "las dos blancas".

La probabilidad de cada uno de estos sucesos se obtiene mediante la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{3}{11} \quad P(B) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11} \quad P(C) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{2}{11}$$

En consecuencia, la segunda urna tiene tres posibles composiciones dependiendo del suceso A, B o C que haya ocurrido.

Si ocurre A, la composición de la segunda urna es $U_{2A} = (5V, 4B)$.

Si ocurre B, la composición de la segunda urna es $U_{2B} = (4V, 5B)$.

Si ocurre C, la composición de la segunda urna es $U_{2C} = (3V, 6B)$.

a) De la segunda urna se extrae una bola, la probabilidad del suceso D = "la bola extraída es verde", se calcula mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C) = \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{11} + \frac{4}{9}\cdot\frac{6}{11} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{11} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

b) Utilizando el teorema de Bayes:

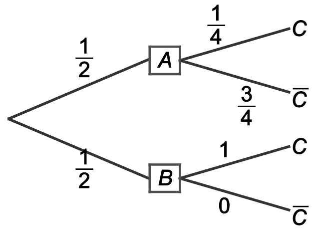
$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{1}{3}$$

78. Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda sea la de dos caras?

Sean los sucesos A = "la moneda elegida tiene cara y cruz", B = "la moneda elegida tiene dos caras" y C = "se obtienen dos caras en los dos lanzamientos"

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2} \quad P(C\mid A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \quad P(C\mid B)=1$$

La situación se puede representar mediante un diagrama de árbol.



Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(C)=P(C\mid A)P(A)+P(C\mid B)P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

Y, por medio del teorema de Bayes:

$$P(B\mid C)=\frac{P(C\mid B)P(B)}{P(C)}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{5}$$

Síntesis

79. Sabiendo que $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}4$ y $P(A\mid B)=0{,}2$.

a) Calcula $P\left(\overline{A}\cup B\right)$ y $P(B\mid A)$.

b) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Con las probabilidades proporcionadas se pueden obtener algunas más que serán útiles para los cálculos posteriores:

$$P(A\mid B)=0{,}2 \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0{,}2 \Rightarrow P(A\cap B)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}3+0{,}4-0{,}08=0{,}62$$

a) En este caso:

$$P\left(\overline{A}\cup B\right)=P\left(\overline{A}\right)+P(B)-P\left(\overline{A}\cap B\right)=1-P(A)+P(B)-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)=1-0{,}3+0{,}4-\left(0{,}4-0{,}08\right)=0{,}78$$

Para la probabilidad condicionada:

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}08}{0{,}3}=0{,}26667$$

b) Los sucesos A y B no son independientes, puesto que:

$$P(A\mid B)=0{,}2\neq P(A)=0{,}3$$

80. Sean A, B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales $P(A)=0{,}6$. Calcula $P(A\cap\overline{B})$ en cada caso:

a) A y B son mutuamente excluyentes.

b) *A* está contenido en *B*.

c) *B* contenido en *A* y $P(B)=0{,}3$.

d) $P(A\cap B)=0{,}1$.

a) Si *A* y *B* son mutuamente excluyentes $A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=0$ y entonces:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)=0{,}6$$

b) Si $A\subset B\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)$ entonces:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)=0$$

c) Si $B\subset A\Rightarrow A\cap B=B\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)$ entonces:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(B)=0{,}6-0{,}3=0{,}3$$

d) En este caso:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=0{,}6-0{,}1=0{,}5$$

81. Se sabe que $P(B\mid A)=0{,}9$, $P(A\mid B)=0{,}2$ y $P(A)=0{,}1$.

a) Calcula $P(A\cap B)$ y $P(B)$.

b) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? ¿Por qué?

c) Calcula $P(A\cup\overline{B})$.

a) De la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A\cap B)=P(B\mid A)P(A)=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09$$

Y, por otro lado:

$$P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\mid B)}=\frac{0{,}09}{0{,}2}=0{,}45$$

b) Los sucesos *A* y *B* no son independientes puesto que:

$$P(A\mid B)=0{,}2\neq P(A)=0{,}1$$

c) La probabilidad pedida es:

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P(A\cap\overline{B})=P(A)+1-P(B)-\left(P(A)-P(A\cap B)\right)=0{,}1+1-0{,}45-(0{,}1-0{,}09)=0{,}64$$

CUESTIONES

82. Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}4$.

a) Si *A* y *B* son mutuamente excluyentes, determina $P(A \cap B)$. ¿Son además *A* y *B* independientes? Razónalo.

b) Si *A* y *B* son independientes, calcula $P(A \cap B)$. ¿Son *A* y *B* además mutuamente excluyentes? Razona tu respuesta.

c) Si $P(A \mid B) = 0$, calcula $P(A \cap B)$.¿Son *A* y *B* mutuamente excluyentes? ¿Son *A* y *B* independientes? Razónalo.

d) Si $A \subseteq B$, calcula $P(A \cap B)$. ¿Son *A* y *B* independientes? Razona la respuesta.

a) Si *A* y *B* son mutuamente excluyentes, $A \cap B = \varnothing$, y por tanto $P(A \cap B) = 0$.

Los sucesos *A* y *B* no son independientes. Para que lo fueran debería verificarse que:

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Y en este caso no se cumple, ya que $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B) = 0{,}08$.

b) Si *A* y *B* son independientes, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$$

No son mutuamente excluyentes ya que $P(A \cap B) = 0{,}08 \neq 0$.

c) En este caso:

$$P(A \mid B) = 0 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

Por lo que *A* y *B* son mutuamente excluyentes y, como se razonó en el apartado a no son independientes. Además, es fácil comprobar que $P(A \mid B) = 0 \neq P(A) = 0{,}2$. Luego, *A* y *B* no son independientes.

d) Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$ y, en consecuencia:

$$P(A \cap B) = P(A) = 0{,}2 \neq P(A)P(B) = 0{,}08$$

Luego los sucesos *A* y *B* no son independientes. Además, puede comprobarse que $\mathrm{P}(B \mid A) = 1$.

83. Comprueba que si *A* y *B* son dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio, se verifica que:

a) $P\left(A \cup \overline{B}\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right)P(B)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)P\left(\overline{A}\right)$

a) Si *A* y *B* son independientes, también lo son A y $\overline{B}$. Teniendo esto en cuenta y las propiedades de la probabilidad:

$$P\left(A \cup \overline{B}\right) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P(A)P\left(\overline{B}\right) = P(A) + 1 - P(B) - P(A)(1 - P(B)) =$$
$$= 1 - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(B)(1 - P(A)) = 1 - P(B)P\left(\overline{A}\right)$$

b) En este caso, aplicando propiedades de la probabilidad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = P(A) + P(B)(1 - P(A)) = P(A) + P(B)P\left(\overline{A}\right)$$

84. **Sean *A* y *B* dos sucesos incompatibles, con $P(A \cup B) > 0$, demostrar que:**

$$P(B \mid A \cup B) = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)}$$

Si *A* y *B* son incompatibles $A \cap B = \varnothing$ y $P(A \cap B) = 0$, con lo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Por la definición de probabilidad condicionada y como $B \cap (A \cup B) = B$, se tiene que:

$$P(B \mid A \cup B) = \frac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)}$$

85. **Si *A*, *B* y *C* son tres sucesos asociados a un experimento aleatorio de modo que $B \cap C \subset A$ prueba que:**

$$P(\overline{A}) \le P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

$$B \cap C \subset A \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B \cap C} \Rightarrow P(\overline{A}) \le P(\overline{B \cap C})$$

Utilizando una de las leyes de De Morgan y las propiedades de la probabilidad:

$$P(\overline{A}) \le P(\overline{B \cap C}) = P(\overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{B}) + P(\overline{C}) - P(\overline{B} \cap \overline{C}) \le P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

Puesto que $P(\overline{B} \cap \overline{C}) \ge 0$

86. **Si *A* y *B* son dos sucesos cualesquiera asociados a un experimento aleatorio, prueba que:**

$$P(A \cup B) \ge 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})$$

Es suficiente con tener en cuenta que $P(A \cap B) \le 1$ y que entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ge P(A) + P(B) - 1 = 1 - P(\overline{A}) + 1 - P(\overline{B}) - 1 = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})$$

87. **Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Prueba que:**

a) Si *A* y *B* son independientes con $0 < P(A) < 1$, entonces $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$.

b) Y recíprocamente: si $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$, entonces *A* y *B* son independientes.

a) Si *A* y *B* son independientes, por definición $P(B \mid A) = P(B)$ y además:

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A)P(B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B)(1 - P(A))}{1 - P(A)} = P(B)$$

La última igualdad es posible porque $0 < P(A) < 1 \Rightarrow 1 - P(A) \ne 0$.

b) Recíprocamente:

$$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A}) \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

De donde se obtiene:

$$P(B \cap A)(1 - P(A)) = (P(B) - P(B \cap A))P(A)$$

Desarrollando y simplificando se llega a que:

$$P(B \cap A) = P(B)P(A)$$

Y, por tanto, los sucesos *A* y *B* son independientes.

PROBLEMAS

88. El 75 % de los alumnos de un instituto practican algún deporte, el 30 % tocan un instrumento musical y el 15 % realiza ambas actividades. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Realice al menos una de las dos actividades.

b) No realice ninguna de las dos actividades.

c) Solo realice una de las dos actividades.

Elegido un alumno al azar, se consideran los sucesos *D* = "practica algún deporte", *M* = "toca un instrumento musical". Se tiene que:

$$P(D) = 0{,}75 \ , \ P(M) = 0{,}3 \ , \ P(D \cap M) = 0{,}15$$

a) Se debe calcular la probabilidad del suceso unión $D \cup M$

$$P(D \cup M) = P(D) + P(M) - P(D \cap M) = 0{,}75 + 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}9$$

b) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{D} \cap \overline{M}$, cuya probabilidad se puede expresar:

$$P\left(\overline{D} \cap \overline{M}\right) = P\left(\overline{D \cup M}\right) = 1 - P(D \cup M) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

c) En este caso se tiene que calcular la probabilidad del suceso $\left(D \cap \overline{M}\right) \cup \left(\overline{D} \cap M\right)$, unión de dos sucesos mutuamente excluyentes:

$$P\left(D \cap \overline{M}\right) = P(D) - P(D \cap M) = 0{,}75 - 0{,}15 = 0{,}6$$

$$P\left(\overline{D} \cap M\right) = P(M) - P(D \cap M) = 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}15$$

Y, finalmente:

$$P\left(\left(D \cap \overline{M}\right) \cup \left(\overline{D} \cap M\right)\right) = P\left(D \cap \overline{M}\right) + P\left(\overline{D} \cap M\right) = 0{,}6 + 0{,}15 = 0{,}75$$

89. Antonio va a la compra dos días de cada cinco. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va a la compra y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

b) Calcula la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruta esté de oferta.

Se consideran los sucesos A = "Antonio va a la compra" y su contrario $\overline{A}$, con $P(A) = \frac{2}{5}$ y $P\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{5}$.

Además, sea *F* = "la fruta está de oferta". Se sabe que $P(F \mid A) = \frac{1}{3}$ y $P\left(F \mid \overline{A}\right) = \frac{1}{2}$

a) La probabilidad del suceso *F* se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(F) = P(F \mid A)P(A) + P\left(F \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{30}$$

b) Se pide la probabilidad del suceso $A \cup F$, que se calcula:

$$P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) = P(A) + P(F) - P(F \mid A)P(A) = \frac{2}{5} + \frac{13}{30} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$$

90. El 25 % de los estudiantes de una Universidad lee las noticias en prensa escrita en papel, el 70 %, en prensa digital, y el 10 %, en ambos formatos. Elegido, al azar, un estudiante de esa Universidad:

a) Calcula la probabilidad de que lea las noticias en formato papel o digital.

b) Sabiendo que lee las noticias en prensa digital, calcula la probabilidad de que también las lea en prensa escrita en papel.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que lea las noticias solo en uno de los dos formatos?

Sean los sucesos A = “el estudiante lee las noticias en prensa escrita en papel”, B = “el estudiante lee las noticias en prensa digital”.

$$P(A) = 0{,}25 \ , \ P(B) = 0{,}7 \ , \ P(A \cap B) = 0{,}1$$

a) Se trata del suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}85$$

b) Se debe calcular la probabilidad condicionada $P(A \mid B)$:

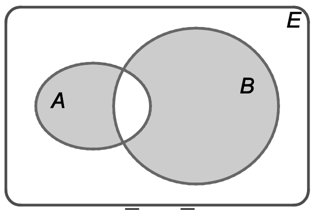
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}7} = \frac{1}{7}$$

c) El suceso en cuestión está formado por la unión de dos sucesos mutuamente excluyentes, como se ve en el diagrama de Venn:

$$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Y su probabilidad es:

$$P\left((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$
$$= 0{,}25 + 0{,}7 - 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}75$$



$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

91. En una estantería hay 4 libros de matemáticas, 6 de física y 2 de química. Si se cogen 2 libros al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de la misma materia?

Sean M = “Los dos libros son de matemáticas”, F = “Los dos libros son de física” y Q = “Los dos libros son de química”

$$P(M) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}, \ P(F) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{22} \text{ y } P(Q) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$$

$$P(M \cup F \cup Q) = \frac{1}{11} + \frac{5}{22} + \frac{1}{66} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3}$$

92. En un polígono industrial se almacenan 30 000 latas de refresco procedentes de fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en el año actual caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 latas, de la fábrica B, y 3000, de la fábrica C. Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y se ha visto que caduca en el año actual, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fábrica A?

Aplicando la regla de Laplace se obtiene directamente la probabilidad pedida:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1800}{1800 + 2400 + 3000} = \frac{1800}{7200} = \frac{1}{4}$$

93. En una autoescuela especializada, se ha impartido un curso de mejora de la conducción a 50 conductores que han perdido todos los puntos del permiso de conducir. De los asistentes al curso, 30 son jóvenes menores de 35 años. Después de un tiempo, se constata que un 70 % de los jóvenes ha mejorado su conducción. Este porcentaje asciende al 80 % en el resto de los asistentes. Si aleatoriamente se elige una persona que asistió al curso, calcula la probabilidad de que:

a) Haya mejorado su conducción.

b) Tenga menos de 35 años, sabiendo que ha mejorado su conducción.

Se consideran los sucesos A = "la persona elegida es joven menor de 35 años", $\overline{A}$ = "la persona elegida tiene 35 o más años" y M = "la persona elegida ha mejorado su conducción"

Se sabe que:

$$P(A)=\frac{3}{5}=0{,}6 \ , \ P\left(\overline{A}\right)=\frac{2}{5}=0{,}4 \ , \ P(M\mid A)=0{,}7 \ , \ P\left(M\mid \overline{A}\right)=0{,}8$$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(M)=P(M\mid A)P(A)+P\left(M\mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)=0{,}7\cdot 0{,}6+0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}74$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$P(A\mid M)=\frac{P(M\mid A)P(A)}{P(M)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}6}{0{,}74}=0{,}56757$$

94. En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0,4, de molinos eólicos, con probabilidad 0,26, y de ambos tipos de instalaciones, con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

a) Por alguna de las dos instalaciones.

b) Solamente por una de ellas.

Se consideran los sucesos S = "la energía proviene de placas solares", M = "la energía proviene de molinos de eólicos"

Se tiene que:

$$P(S)=0{,}4 \ , \ P(M)=0{,}26 \ , \ P(S\cap M)=0{,}12$$

a) Se pide la probabilidad del suceso unión $S\cup M$,

$$P(S\cup M)=P(S)+P(M)-P(S\cap M)=0{,}4+0{,}26-0{,}12=0{,}54$$

b) B = "la energía proviene solo de placas solares o solo de molinos eólicos". Suceso que se puede escribir como unión de sucesos mutuamente excluyentes:

$$B=\left(S\cap\overline{M}\right)\cup\left(\overline{S}\cap M\right)$$

De modo que:

$$P(B)=P\left(S\cap\overline{M}\right)+P\left(\overline{S}\cap M\right)=P(S)+P(M)-2P(S\cap M)=0{,}4+0{,}26-2\cdot 0{,}12=0{,}42$$

95. A la consulta de un médico acude una mujer que sospecha que está embarazada de solo unos pocos días. Después de un primer examen, el médico cree que la mujer está embarazada con probabilidad 0,7. Para confirmar su diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 3 % de los casos en que la mujer está realmente embarazada. Por otro lado, el test da positivo en el 5 % de los casos en los que la mujer no está embarazada. Calcula la probabilidad de que:

a) El test dé positivo.

b) La mujer esté realmente embarazada sabiendo que el test ha dado positivo.

Sean los sucesos A = "la mujer está embarazada" y su contrario $\overline{A}$ = "la mujer no está embarazada".

Las probabilidades iniciales para estos sucesos son $P(A) = 0{,}7$, $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}3$.

Se considera el suceso T = "el test da positivo" y su contrario $\overline{T}$ = "el test da negativo".

Se sabe que:

$$P\left(\overline{T} \mid A\right) = 0{,}03 \quad , \quad P\left(T \mid \overline{A}\right) = 0{,}05$$

A partir de esta información, también se conoce que $P(T \mid A) = 0{,}97$ y $P\left(\overline{T} \mid \overline{A}\right) = 0{,}95$.

a) La probabilidad de que el test dé positivo, se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(T) = P(T \mid A)P(A) + P\left(T \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) = 0{,}97 \cdot 0{,}7 + 0{,}05 \cdot 0{,}3 = 0{,}694$$

b) Utilizando el teorema de Bayes:

$$P(A \mid T) = \frac{P(T \mid A)P(A)}{P(T)} = \frac{0{,}97 \cdot 0{,}7}{0{,}694} = 0{,}9784$$

96. En la representación de navidad de los alumnos de 3.º de Primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales, 3, de personas, y 12, de árboles. Los papeles se asignan al azar. Los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les corresponde. Calcula la probabilidad de que:

a) A los tres primeros alumnos no les toque el papel de árbol.

b) A los dos primeros alumnos les toque el mismo papel.

c) El primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.

d) A los tres primeros alumnos de las lista les toque a cada uno un papel diferente.

Los alumnos cogen el papel por orden alfabético. Nombramos por *A*, el papel de animal, por *S* el de persona y por *R* el de árbol. Así, por ejemplo, el suceso *SRA* indica que al primer alumno le tocó el papel de persona, al segundo alumno el de árbol y al tercer alumno el de animal.

a) En este caso se pide la probabilidad del suceso $\overline{RRR}$ = "a los tres primeros alumnos no les toque papel de árbol".

$$P\left(\overline{RRR}\right)=\frac{10}{22}\cdot\frac{9}{21}\cdot\frac{8}{20}=\frac{720}{9240}=\frac{6}{77}$$

b) A los dos primeros alumnos les tocan 2 animales (*AA*) o bien 2 personas (*SS*) o bien 2 árboles (*RR*)

$$P(AA)=\frac{7}{22}\cdot\frac{6}{21}=\frac{42}{462}\quad,\ P(SS)=\frac{3}{22}\cdot\frac{2}{21}=\frac{6}{462}\quad,\ P(RR)=\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21}=\frac{132}{462}$$

Como los sucesos son mutuamente excluyentes:

$$P(AA\cup SS\cup RR)=\frac{42}{462}+\frac{6}{462}+\frac{132}{462}=\frac{180}{462}=\frac{30}{77}$$

c) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $\overline{SS}S$ = "a los dos primeros alumnos no les toca el papel de persona y al tercero sí le toca". Entonces, debe ser:

$$P\left(\overline{SS}S\right)=\frac{19}{22}\cdot\frac{18}{21}\cdot\frac{3}{20}=\frac{1026}{9240}=\frac{171}{1540}$$

d) En este caso, cada uno de los tres primeros alumnos tiene que tener un papel diferente. Por ejemplo *ASR* = "al primero de la lista, animal; al segundo, persona y al tercero árbol".

En total hay $P_3=3!=6$ posibilidades, que son las ordenaciones de los tres papeles en los tres primeros puestos de la lista.

La probabilidad de cada una de estas posibilidades es la misma. Por ejemplo, para *ASR*:

$$P(ASR)=\frac{7}{22}\cdot\frac{3}{21}\cdot\frac{12}{20}=\frac{252}{9240}=\frac{3}{110}$$

Y multiplicando por 6 se obtiene la probabilidad del suceso *D* = "A los tres primeros de la lista les toque a cada uno un papel diferente".

$$P(D)=6\cdot\frac{3}{110}=\frac{18}{110}=\frac{9}{55}$$

97. En una caja hay *x* bolas blancas y 1 roja. Al extraer de la caja 2 bolas al azar sin reemplazamiento, la probabilidad de que sean blancas es 0,5. Calcula el número de bolas blancas que debe tener la caja.

Cuando sacamos la primera bola quedan en el saco *x* bolas, y cuando sacamos la segunda quedan *x* - 1, por lo que la probabilidad de sacar la primera bola blanca es $P(B1)=\frac{x}{x+1}$ y de sacar una segunda bola blanca es $P(B2)=\frac{x-1}{x}$.

La probabilidad total del suceso *B* será:

$$P(B)=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x}=0{,}5\Rightarrow x=3\text{ bolas blancas}$$

98. Al servicio de urgencias de un hospital llegan pacientes de tres procedencias distintas: remitidos por centros de salud (47 %), por iniciativa propia (32 %) y afectados por accidentes y trasladados directamente por ambulancias (21 %). Los pacientes que presentan dolencias graves son el 10 %, el 4 % y el 25 %, respectivamente. Si se elige aleatoriamente un paciente que llega a dicho servicio:

a) Hallar la probabilidad de que no tenga dolencia grave.

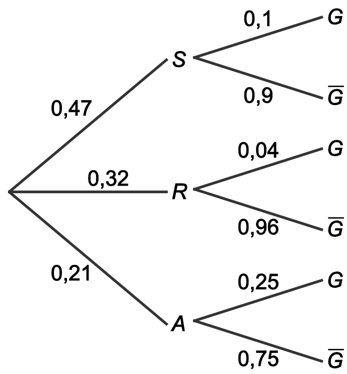
b) Si se detecta una dolencia grave, determinar la probabilidad de que haya acudido por iniciativa propia.

Sean los sucesos S = “el paciente llega a urgencias remitido por el centro de salud”, R = “por iniciativa propia” y A = “afectado por accidente” forman un sistema completo de sucesos.

Considera el suceso G = “el paciente presenta dolencia grave”. Se tiene que:

$$P(S)=0{,}47\ ,\ P(R)=0{,}32\ ,\ P(A)=0{,}21\ ,\ P(G\mid S)=0{,}1\ ,\ P(G\mid R)=0{,}04\ ,\ P(G\mid A)=0{,}25$$

La situación se puede representar en un diagrama de árbol:



a) Se calcula la probabilidad del suceso G mediante el teorema de la probabilidad total, y luego se obtiene la probabilidad del suceso contrario de G:

$$P(G)=P(G\mid S)P(S)+P(G\mid R)P(R)+P(G\mid A)P(A)=$$
$$=0{,}1\cdot 0{,}47+0{,}04\cdot 0{,}32+0{,}25\cdot 0{,}21=0{,}1123$$

Entonces $P\left(\overline{G}\right)=1-P(G)=1-0{,}1123=0{,}8877$

b) En este caso, utilizando el teorema de Bayes, se tiene:

$$P(R\mid G)=\frac{P(G\mid R)P(R)}{P(G)}=\frac{0{,}04\cdot 0{,}32}{0{,}1123}=0{,}1140$$

99. En una ciudad, el 35 % de los ciudadanos utiliza el metro al menos una vez al día, el 24 % usa el autobús, y un 15 %, ambos medios de transporte. Se elige una persona al azar, halla la probabilidad de que:

a) Utilice alguno de los dos transportes.

b) No utilice ningún transporte.

c) Sabiendo que monta en metro, no utilice el autobús.

Sean los sucesos A = “la persona elegida usa el autobús”, M = “la persona elegida usa el metro”.

Se tiene que:

$$P(A)=0{,}24\ ,\ P(M)=0{,}35\ ,\ P(A\cap M)=0{,}15$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $A\cup M$:

$$P(A\cup M)=P(A)+P(M)-P(A\cap M)=0{,}35+0{,}24-0{,}15=0{,}44$$

b) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{M}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{M}\right)=P\left(\overline{A\cup M}\right)=1-P(A\cup M)=1-0{,}44=0{,}56$$

c) Ahora debe calcularse la probabilidad $P\left(\overline{A}\mid M\right)$.

$$P\left(\overline{A}\mid M\right)=\frac{P(\overline{A}\cap M)}{P(M)}=\frac{P(M)-P(A\cap M)}{P(M)}=\frac{0{,}35-0{,}15}{0{,}35}=\frac{0{,}2}{0{,}35}=\frac{4}{7}$$

100. El 38 % de los habitantes de una ciudad declaran que su deporte preferido es el fútbol, el 21 % prefiere el baloncesto y el resto se inclina por otro deporte. Si se eligen al azar tres personas, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las tres personas sean aficionadas al fútbol.

b) Dos personas prefieran el fútbol y la otra el baloncesto.

c) Al menos una de las tres personas prefiera otro deporte diferente al fútbol y al baloncesto.

a) Sea el sucesos A = "Las tres personas son aficionadas al fútbol".

$$P(A) = 0,38^3 = 0,0549$$

b) Sea B = "dos de las personas prefieren el fútbol y la otra el baloncesto".

El número de formas posibles en que se pueden elegir las dos personas, entre las tres, que prefieren el fútbol (o la que prefiere el baloncesto) es:

$$\binom{3}{2} = 3$$

Y, por cada una de estas posibilidades, la probabilidad de que dos prefieran fútbol, y la otra, baloncesto es $0,38^2 \cdot 0,21$, con lo que $P(B) = 3 \cdot 0,38^2 \cdot 0,21 = 0,09097$.

c) Sea el suceso C = "al menos una de las tres personas prefiere otro deporte que no sea el fútbol o el baloncesto".

El suceso contrario de C, es $\overline{C}$ = "las tres prefieren el fútbol o el baloncesto", cuya probabilidad es:

$$P(\overline{C}) = (0,38 + 0,21)^3 = 0,2054$$

Y, por tanto, $P(C) = 1 - 0,2054 = 0,7946$

101. En un servicio técnico especializado en cámaras fotográficas, el 70 % de las cámaras que se reciben son del modelo A, y el resto, del modelo B. El 95 % de las cámaras del modelo A son reparadas, mientras que del modelo B solo se reparan el 80 %. Si se elige una cámara al azar:

a) Halla la probabilidad de que no se haya podido reparar.

b) Si se observa que no ha sido reparada, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

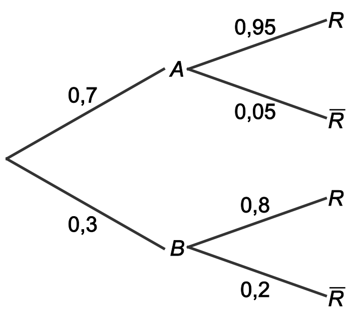
Se consideran los sucesos A = "la cámara es del modelo A" y B = "la cámara es del modelo B", que constituyen un sistema completo de sucesos.

Sea, además, el suceso R = "la cámara es reparada".

Las probabilidades que se conocen son:

$P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,3$, $P(R \mid A) = 0,95$, $P(R \mid B) = 0,8$

La situación se puede representar en el siguiente diagrama de árbol.



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad de que la cámara se haya podido reparar:

$$P(R) = P(R \mid A)P(A) + P(R \mid B)P(B) = 0,95 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 = 0,905$$

Luego, la probabilidad de que no haya podido ser reparada es:

$$P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0,905 = 0,095$$

b) Utilizando ahora el teorema de Bayes:

$$P(B \mid \overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \mid B)P(B)}{P(\overline{R})} = \frac{0,2 \cdot 0,3}{0,095} = 0,63158$$

102. Se va a proceder a la selección de investigadores para un centro aeroespacial. Se realizan 3 pruebas independientes: A (idiomas), B (conocimientos teóricos y prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas. Por procesos anteriores se sabe que la prueba A la superan el 10 % de los aspirantes, la prueba B, el 40 %, y la C, el 20 %. Se elige un candidato al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea seleccionado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea seleccionado por fallar solo en una prueba?

c) Sabiendo que ha pasado dos pruebas ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B?

Sean los sucesos A = "el candidato supera la prueba de idiomas", B = "el candidato supera la prueba de conocimientos teóricos y prácticos" y C = "el candidato supera las pruebas físicas".

$$P(A) = 0{,}1 \ , \ P(B) = 0{,}4 \ , \ P(C) = 0{,}2$$

a) Para ser seleccionado, es preciso pasar las tres pruebas, suceso $A \cap B \cap C$. Como los sucesos son mutuamente independientes:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$

b) Contando con el suceso contrario de cada uno de los tres dados, el suceso por el que se pregunta es la unión de tres sucesos mutuamente excluyentes.

$\overline{A} \cap B \cap C$ = "no supera la prueba de idiomas pero sí las otras dos".

$A \cap \overline{B} \cap C$ = "no supera la prueba de conocimientos teóricos y prácticos pero sí las otras dos".

$A \cap B \cap \overline{C}$ = "no supera las pruebas físicas pero sí las otras dos".

$$D = \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$$

Cuya probabilidad es:

$$P(D) = P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) = P\left(\overline{A}\right)P(B)P(C) + P(A)P\left(\overline{B}\right)P(C) + P(A)P(B)P\left(\overline{C}\right) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}116$$

c) El suceso "el candidato ha pasado dos pruebas" es el suceso D del apartado b. De esta manera, se pide la probabilidad del suceso $\overline{B}$, dado que ha ocurrido el suceso D. Es decir:

$$P\left(\overline{B} \mid D\right) = \frac{P(\overline{B} \cap D)}{P(D)} = \frac{P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right)}{P(D)} = \frac{P(A)P\left(\overline{B}\right)P(C)}{P(D)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2}{0{,}116} = 0{,}1034$$

103. En una población, la mitad de los ciudadanos manifiesta estar satisfecho con su calidad de vida y el 70 % tiene una vivienda propia. De los que no están satisfechos con su calidad de vida, el 45 % no tiene vivienda propia. En esta ciudad, calcula el porcentaje de ciudadanos que:

a) Tiene vivienda propia y no está satisfecho con su calidad de vida.

b) Está satisfecho con su calidad de vida si tiene vivienda propia.

c) Está satisfecho con su calidad de vida si no tiene vivienda propia.

Se selecciona un individuo al azar y se consideran los sucesos *S* = "está satisfecho con su calidad de vida", *V* = "tiene vivienda propia" y sus respectivos sucesos contrarios.

Se tiene que:

$$P(S)=0{,}5\ ,\ P\left(\overline{S}\right)=0{,}5\ ,\ P(V)=0{,}7\ ,\ P\left(\overline{V}\right)=0{,}3\ ,\ P\left(\overline{V}\mid\overline{S}\right)=0{,}45\ ,\ P\left(V\mid\overline{S}\right)=0{,}55$$

De las probabilidades anteriores se pueden obtener las probabilidades de los sucesos unión e intersección de *S* y *V*. En efecto:

$$P\left(\overline{V}\mid\overline{S}\right)=0{,}45\Rightarrow\frac{P\left(\overline{V}\cap\overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)}=0{,}45\Rightarrow P\left(\overline{V\cup S}\right)=0{,}45\cdot 0{,}5=0{,}225\Rightarrow P(V\cup S)=0{,}775$$

Y, entonces:

$$P(V\cap S)=P(V)+P(S)-P(V\cup S)=0{,}7+0{,}5-0{,}775=0{,}425$$

a) Debe calcularse la probabilidad del suceso $V\cap\overline{S}$:

$$P\left(V\cap\overline{S}\right)=P\left(V\mid\overline{S}\right)P\left(\overline{S}\right)=0{,}55\cdot 0{,}5=0{,}275$$

De modo que el 27,5 % de los ciudadanos tiene vivienda propia y no está satisfecha con su calidad de vida.

b) Se trata de la probabilidad del suceso *S* condicionado por el suceso *V*:

$$P(S\mid V)=\frac{P(V\cap S)}{P(V)}=\frac{0{,}425}{0{,}7}=0{,}6071$$

El 60,71 % de la población que tiene vivienda propia está satisfecho con su calidad de vida.

c) Ahora, debe calcularse la probabidad del suceso *S* condicionado por $\overline{V}$:

$$P\left(S\mid\overline{V}\right)=\frac{P(S\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}=\frac{P(S)-P(S\cap V)}{P(\overline{V})}=\frac{0{,}5-0{,}425}{0{,}3}=0{,}2500$$

El 25 % de la población que no tiene vivienda propia está satisfecha con su calidad de vida.

104. Un hotel dispone de 60 habitaciones de tres tipos: 6 individuales, 50 dobles y 4 suites. De las 6 individuales, 3 tienen baño completo, y otras 3, solo ducha. De las dobles el 80 % tiene baño completo, el resto, solo ducha. Todas las suites tienen baño completo. Si elegimos una habitación al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Tenga solo ducha.

b) Sea doble, si la habitación tiene baño completo.

c) Sea individual y tenga ducha.

Los sucesos *A* = "la habitación es individual", *B* = "la habitación es doble" y *C* = "la habitación es una suite" constituyen un sistema completo de sucesos.

El hotel dispone de 60 habitaciones. Si la habitación se elige al azar, la probabilidad de que sea de cada uno de los tres tipos es:

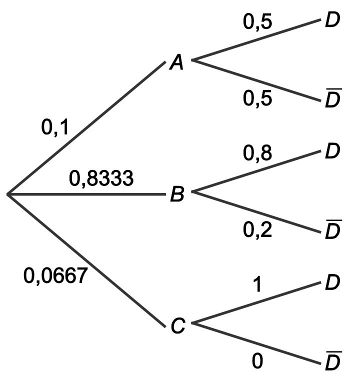
$$P(A)=\frac{6}{60}=0{,}1,\ P(B)=\frac{50}{60}=0{,}8333,\ P(C)=\frac{4}{60}=0{,}0667$$

Sea el suceso *D* = "la habitación tiene baño completo". Se sabe que:

$$P(D\mid A)=\frac{3}{6}=0{,}5\ ,\ P(D\mid B)=0{,}8\ ,\ P(D\mid C)=1$$

Y de estos, se tiene que: $P\left(\overline{D}\mid A\right)=0{,}5$, $P\left(\overline{D}\mid B\right)=0{,}2$, $P\left(\overline{D}\mid C\right)=0$

La situación se muestra en el diagrama de árbol adjunto.



a) El suceso "tenga solo ducha" puede ser considerado como el contrario del suceso *D*. Utilizando la información dada y el teorema de la probabilidad total para el suceso contrario del *D*:

$$P\left(\overline{D}\right)=P\left(\overline{D}\mid A\right)P(A)+P\left(\overline{D}\mid B\right)P(B)+P\left(\overline{D}\mid C\right)P(C)=$$
$$=0{,}5\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}8333+0\cdot 0{,}0667=0{,}2167$$

b) En este caso se trata de la probabilidad del suceso *B* condicionada por el suceso *D*. Utilizando la regla de Bayes y que $P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-0{,}2167=0{,}7833$:

$$P(B\mid D)=\frac{P(D\mid B)P(B)}{P(D)}=\frac{0{,}8\cdot 0{,}8333}{0{,}7833}=0{,}8511\cong 0{,}85$$

c) Debe calcularse la probabilidad del suceso $A\cap\overline{D}$, que se obtiene:

$$P\left(A\cap\overline{D}\right)=P\left(\overline{D}\mid A\right)P(A)=0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}05$$

105. Un paciente acude a su médico al encontrarse enfermo desde hace varios días. Tras un cuidadoso análisis preliminar, el médico duda al 50 % de si el paciente tendrá o no tuberculosis, por lo que le prescribe una prueba específica.

La prueba consiste en un análisis de sangre que da positivo si el paciente tiene la enfermedad en el 99 % de los casos y da negativo si el paciente no tiene la enfermedad en el 98 % de los casos. Calcula la probabilidad de que nuestro paciente:

a) De positivo en el test.

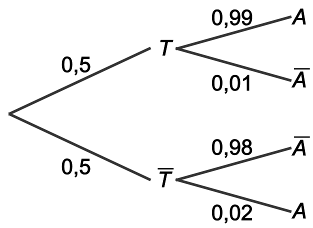
b) Esté realmente enfermo de tuberculosis, si el test da resultado negativo.

Sea el suceso T = "el paciente tiene tuberculosis". Según el diagnóstico inicial del médico $P(T)=0,5$, $P(\overline{T})=0,5$.

Considera el suceso A = "la prueba da positivo en tuberculosis".

$P(A \mid T)=0,99$, $P(\overline{A} \mid \overline{T})=0,98$

Y, por tanto, $P(\overline{A} \mid T)=0,01$, $P(A \mid \overline{T})=0,02$



En el digrama de árbol se representa la situación.

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(A)=P(A \mid T)P(T)+P(A \mid \overline{T})P(\overline{T})=0,99\cdot 0,5+0,02\cdot 0,5=0,505$$

b) Se trata de calcular la probabilidad del suceso T condiconada por el suceso $\overline{A}$. Por el teorema de Bayes:

$$P(T \mid \overline{A})=\frac{P(\overline{A} \mid T)P(T)}{P(\overline{A})}=\frac{0,01\cdot 0,5}{1-0,505}=0,0101$$

106. El 30 % de las pólizas de una compañía de seguros corresponden a seguros de vida, y el resto, a pólizas de seguros de hogar. Actualmente, en un 12 % de las pólizas de seguros de vida se producen retrasos en los pagos, mientras que ese porcentaje es del 8 % en el caso de los seguros de hogar. Si se elige al azar una póliza, calcula la probabilidad de que:

a) Esté al corriente de pago.

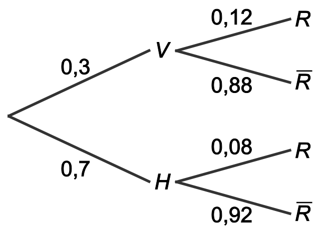
b) Corresponda a un seguro de hogar si se sabe que está al corriente de pago.

Los sucesos V = "la póliza es de seguro de vida" y H = "la póliza es de seguro de hogar" constituyen una partición del espacio muestral en este caso, con las probabilidades $P(V)=0,3$ y $P(H)=0,7$

Sea el suceso R = "se produce retraso en el págo de la póliza". Su contrario $\overline{R}$ = "la póliza está al corriente de pago". Por la información disponible, se tiene que:

$P(R \mid V)=0,12$, $P(R \mid H)=0,08$

Y, por tanto $P(\overline{R} \mid V)=0,88$ y $P(\overline{R} \mid H)=0,92$



En el diagrama de árbol se muestra la situación.

a) La probabilidad del suceso $\overline{R}$ se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{R})=P(\overline{R} \mid V)P(V)+P(\overline{R} \mid H)P(H)=0,88\cdot 0,3+0,92\cdot 0,7=0,908$$

b) Utilizando la regla de Bayes:

$$P(H \mid \overline{R})=\frac{P(\overline{R} \mid H)P(H)}{P(\overline{R})}=\frac{0,92\cdot 0,7}{0,908}=0,7093$$

107. Una familia consume leche de dos marcas diferentes *A* y *B*. A partir de la primera compra, la probabilidad de que la familia cambie de marca es 0,7. Si la primera compra se realizó al azar lanzando una moneda al aire, calcula la probabilidad de que:

a) En tres compras consecutivas hayan comprado dos veces la marca *A*.

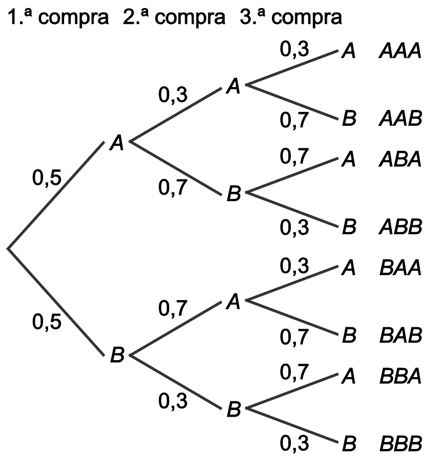
b) En la tercera compra hayan adquirido la marca *B*.

c) Empezaran comprando la marca *A* si en la tercera compra adquirieron la *B*.

Sea *A* = “la familia compra marca A” y *B* = “la familia compra marca B”.

Por ejemplo, el suceso ABA representa que en la 1ª y 3ª compra se adquirió la marca A y en la 2ª la marca B.

En el siguiente diagrama de árbol se contemplan las ocho situciones posibles.



a) La probabilidad del suceso *C* = “se haya comprado 2 veces la marca A” es:

$$P(C) = P(AAB) + P(ABA) + P(BAA) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,455$$

b) La probabilidad del suceso *D* = ”en la tercera compra hayan adquirido la marca B” es:

$$P(D) = P(AAB) + P(ABB) + P(BAB) + P(BBB) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,5$$

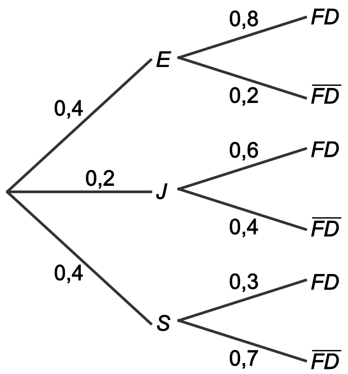
c) Sea *F* = “la primera compra fue de la marca A” $P(F) = 0,5$. Se pide la probabilidad del suceso *D*, sabiendo que ha ocurrido *F*.

$$P(F \mid D) = \frac{P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \mid F)P(F)}{P(D)} = \frac{(0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3) \cdot 0,5}{0,5} = 0,42$$

108. Al 80 % de los trabajadores en educación que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida, también al 60 % de los trabajadores de justicia y al 30 % de los de sanidad. En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad y el doble en educación que en justicia. Se sabe que a un trabajador elegido al azar entre estos tres sectores, no le hicieron fiesta. Calcula la probabilidad de que fuera de sanidad.

Sea *E* = "trabajadores de educación", *J* = "trabajadores de justicia", *S* = "trabajadores de sanidad" y *FD* = "trabajadores que recibieron una fiesta de despedida".

En el diagrama de árbol se muestra la situación:



Vamos a calcular la probabilidad de que un trabajador recibiese una fiesta. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(FD) = P(FD \mid E)P(E) + P(FD \mid J)P(J) + P(FD \mid S)P(S) =$$
$$= 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,56$$

Aplicando el teorema de Bayes se tiene que:

$$P(S \mid \overline{FD}) = \frac{P(\overline{FD} \mid S)P(S)}{P(\overline{FD})} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{1 - 0,56} = 0,64$$

109. El 40 % de los teléfonos móviles que llegan para ser reparados a un servicio técnico están en garantía. De estos, un 7 % ya ha sido reparado antes mientras que el 25 % de los que no están en garantía ya fueron reparados en otra ocasión. Si se elige un teléfono de este servicio técnico al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Ya haya sido reparado anteriormente.

b) El teléfono esté en garantía si es la primera vez que llega al servicio técnico.

c) El teléfono no esté en garantía si se ha llevado anteriormente a reparar.

Se considera el suceso G = "el teléfono móvil está en garantía" y su contrario $\overline{G}$ = "el teléfono móvil no está en garantía". Los sucesos G y su contrario constituyen un sistema completo de de sucesos.

Además, sea el suceso R ="el teléfono móvil ya ha sido reparado". Se tiene que:

$$P(G) = 0{,}4 \text{ , } P\left(\overline{G}\right) = 0{,}6 \text{ , } P(R \mid G) = 0{,}07 \text{ , } P\left(R \mid \overline{G}\right) = 0{,}25$$

Y, también, $P\left(\overline{R} \mid G\right) = 0{,}93$ y $P\left(\overline{R} \mid \overline{G}\right) = 0{,}75$

a) Se pide la probabilidad del suceso R. Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(R \mid G)P(G) + P\left(R \mid \overline{G}\right)P\left(\overline{G}\right) = 0{,}07 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}178$$

b) Se pide la probabilidad de que el teléfono esté en garantía sabiendo que no ha sido reparado. Utilizando la regla de Bayes:

$$P\left(G \mid \overline{R}\right) = \frac{P\left(\overline{R} \mid G\right)P(G)}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}93 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}178} = 0{,}45255$$

c) En este caso, mediante la aplicación de la regla de Bayes:

$$P\left(\overline{G} \mid R\right) = \frac{P\left(R \mid \overline{G}\right)P\left(\overline{G}\right)}{P(R)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}6}{0{,}178} = 0{,}84270$$

PARA PROFUNDIZAR

110. Se dispone de un dado tetraédrico trucado con cuatro caras con puntuaciones: 1, 2, 3, 4, de modo que $P(4) = 4P(1)$, $P(3) = 3P(1)$, $P(2) = 2P(1)$ en donde $P(4)$ indica la probabilidad de obtener la puntuación 4 y así sucesivamente. Se dispone también de dos urnas con las siguientes composiciones: Urna U_1: 1 bola roja y 2 bolas verdes; urna U_2: 2 bolas rojas y 3 bolas verdes. Se lanza el dado. Si sale número par extraemos una bola de la urna U_1. Si sale impar extraemos una bola de la urna U_2. Se pide:

a) Determina las probabilidades de los sucesos elementales que se presentan al lanzar el dado de cuatro caras.

b) Se lanza el dado y a continuación extraemos una bola de la urna que corresponda. Halla la probabilidad de que sea de color verde.

a) Sea $p = P(1)$, entonces $P(4) = 4p$, $P(3) = 3p$, $P(2) = 2p$. Las probabilidades deben sumar 1, por lo que:

$$p + 2p + 3p + 4p = 1 \Rightarrow 10p = 1 \Rightarrow p = 0{,}1$$

De esta forma:

$$P(4) = 0{,}4 \text{ , } P(3) = 0{,}3 \text{ , } P(2) = 0{,}2 \text{ , } P(1) = 0{,}1$$

b) Según la asignación obtenida en el apartado a, las probabilidades de elegir cada una de las urnas es:

$$P(U_1) = P(2) + P(4) = 0{,}6 \text{ , } P(U_2) = P(1) + P(3) = 0{,}4$$

Sea V = "la bola extraída es de color verde". Las probabilidades de obtener bola verde en cada urna son:

$$P(V \mid U_1) = \frac{2}{3} \text{ , } P(V \mid U_2) = \frac{3}{5}$$

Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(V) = P(V \mid U_1)P(U_1) + P(V \mid U_2)P(U_2) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{3}{5} \cdot 0{,}4 = 0{,}64$$

111. El color de una clase de ratones, negros o marrones, depende de un par de genes, cada uno de los cuales puede ser B o b. Si los dos miembros de la pareja de genes son iguales (BB o bb) se dice que el ratón es homocigótico, en otro caso (Bb o bB) se dice que es heterocigótico. El ratón es de color marrón solo si es homocigótico *bb*. La descendencia de una pareja de ratones tiene dos de tales genes, uno del padre y otro de la madre, y si el padre es heterocigótico, el gen heredado tiene la misma probabilidad de ser B o b. Si un ratón negro es el resultado de un apareamiento entre una pareja de heterocigóticos. Calcula la probabilidad de que el ratón sea:

a) Homocigótico.

b) Heterocigótico.

Se nombran los sucesos H_M = "el ratón es homocigótico" y H_T = "el ratón es heterocigótico". Según la pareja de genes que se forme, se tiene que $H_M = \{BB, bb\}$, $H_T = \{Bb, bB\}$.

Por otro lado, se consideran los sucesos N = "el ratón es de color negro" y M = "el ratón es de color marrón". Se tiene que $N = \{BB, bB, Bb\}$, $M = \{bb\}$.

Se cruzan una pareja de ratones heterocigóticos, de forma que el conjuto de resultados posibles es:

$$E = \{BB, Bb, bB, bb\}$$

Siendo los posibles resultados equiprobables.

De esta forma, las probabilidades iniciales de que el ratón (descendenciente) sea negro (N) y marrón (M) son: $P(N) = \frac{3}{4}$, $P(M) = \frac{1}{4}$

a) En este caso, se pide la probabilidad de que el ratón (descendiente) sea homocogótico, sabiendo que ha sido negro:

$$P(H_M \mid N) = \frac{P(N \mid H_M)P(H_M)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad que puede obtener directamente, ya que si el ratón es negro, $N = \{BB, bB, Bb\}$, solo uno de los tres resultados (equiprobables) produce un ratón homocigótico (BB).

b) Con un razonamiento similar al del apartado a, se obtiene que:

$$P(H_T \mid M) = \frac{2}{3}$$

112. Se lanzan simultáneamente tres dados cúbicos iguales, con las caras numeradas del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que:

a) Salgan 3 doses.

b) La suma de las caras sea número par.

Suponiendo que los tres dados están equilibrados, los resultados posibles son equiprobables.

El número de resultados posibles es $VR_{6,3} = 216$.

a) Dado el suceso A = "los tres son doses", solo uno de los resultados posibles es favorable a este suceso, por lo que:

$$P(A) = \frac{1}{216}$$

b) Si llamamos B = "la suma de las caras es un número par", la mitad de los resultados posibles da como resultado suma par, por lo que:

$$P(B) = \frac{108}{216} = 0{,}5$$

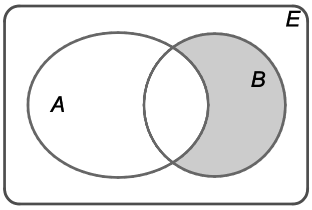
AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. El 60 % de los clientes de una frutería compra naranjas y el 30 % no compra ni naranjas ni manzanas. ¿Qué porcentaje de clientes compra manzanas pero no naranjas?

Se elige un cliente al azar. Sean los sucesos *A* = "el cliente compra naranjas"; *B* = "el cliente compra manzanas". Se sabe que $P(A)=0{,}6$ y $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0{,}3$.

Debe calcularse la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap B$. Como puede observarse en el diagrama de Venn:



$$P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(A\cup B)-P(A)=0{,}7-0{,}6=0{,}1$$

donde, por la probabilidad del suceso contrario y una de las leyes de De Morgan:

$$P(A\cup B)=1-P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-0{,}3=0{,}7$$

De manera que el 10 % de los clientes compra manzanas pero no naranjas.

2. Se consideran dos sucesos *A* y *B* tales que $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B\mid A)=\frac{1}{4}$ y $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$. Calcula razonadamente:

a) $P(A\cap B)$

b) $P(B)$

c) $P\left(\overline{B}\mid A\right)$

d) $P\left(\overline{A}\mid \overline{B}\right)$

a) $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

b) $P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$

c) $P\left(\overline{B}\mid A\right)=1-P(B\mid A)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

d) $P\left(\overline{A}\mid \overline{B}\right)=\dfrac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P(\overline{B})}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{3}$

3. Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número mayor que en la primera.

Sea *A* = "en la 2ª tirada se obtiene un número mayor que en la primera" y sea *X* = "se obtiene el mismo número".

En la siguiente tabla se muestran los posibles resultados:

D2 \ D1	1	2	3	4	5	6
1	*X*	*A'*	*A'*	*A'*	*A'*	*A'*
2	*A*	*X*	*A'*	*A'*	*A'*	*A'*
3	*A*	*A*	*X*	*A'*	*A'*	*A'*
4	*A*	*A*	*A*	*X*	*A'*	*A'*
5	*A*	*A*	*A*	*A*	*X*	*A'*
6	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*X*

Luego la probabilidad pedida es $P(A)=\dfrac{15}{36}$.

4. Una empresa somete a control de calidad 7 de cada 10 artículos fabricados. De los que son sometidos al control resultan defectuosos un 2 % y de los que no son sometidos a control de calidad resultan defectuosos un 12 %. Elegido un artículo al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea defectuoso.

b) Haya sido sometido al control de calidad si es defectuoso.

Sean los sucesos C = "el artículo ha sido sometido a control de calidad" y su contrario $\overline{C}$ = "el artículo no ha sido sometido a control de calidad". Se tiene que $P(C) = 0,7$, $P(\overline{C}) = 0,3$.

Se considera, además, el suceso D = "el artículo es defectuoso".

$P(D \mid C) = 0,02$, $P(D \mid \overline{C}) = 0,12$

a) Por el teorema de la probabilidad total, se tiene que:

$$P(D) = P(D \mid C)P(C) + P(D \mid \overline{C})P(\overline{C}) = 0,02 \cdot 0,7 + 0,12 \cdot 0,3 = 0,05$$

b) Se pide la probabilidad del suceso C, condicionada a que el suceso D ha ocurrido. Utilizando la regla de Bayes:

$$P(C \mid D) = \frac{P(D \mid C)P(C)}{P(D)} = \frac{0,02 \cdot 0,7}{0,05} = 0,28$$

5. Se elige al azar un número entre el 10 000 y 50 000. Calcula la probabilidad de que el número extraído sea capicúa.

Comenzamos por estudiar cuántos números capicúas hay cuando la cifra inicial es 1. Para ello basta con fijar las dos siguientes cifras que pueden ser cualquiera de las 9 cifras significativas más el cero. Así, se tiene que:

$\underline{1}\ \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{A}\ \underline{1}$

Como A puede ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y B pueder ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 van a existir $10 \cdot 10 = 100$ números capicúas entre 10 000 y 20 000.

Razonando de igual forma, entre 20 000 y 30 000 se tienen 100 números capicúas, entre 30 000 y 40 000 se tienen 100 números capicúasy entre 40 000 y 50 000 se tienen 100 números capicúas. Luego en total entre 10 000 y 50 000 hay $100 + 100 + 100 + 100 = 400$ números capicúas.

Aplicando la regla de Laplace se obtiene que:

$$P(C) = \frac{400}{40000} = \frac{1}{100} = 0,01$$

6. En una fiesta en la que hay 85 mujeres y 90 hombres se eligen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Ninguna sea hombre.

b) Haya exactamente un hombre.

c) Haya más de un hombre.

d) Haya el mismo número de mujeres que de hombres.

Suponiendo que todas las elecciones posibles son igualmente probables y que no importa el orden en la elección de las personas, el número de resultados posibles al elegir 4 personas del conjunto de 175 personas es:

$$C_{175,4} = \binom{175}{4} = \frac{175 \cdot 174 \cdot 173 \cdot 172}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 37\,752\,925$$

a) Sea el suceso A = “ninguna de las cuatro personas elegidas es hombre”; es decir, que las cuatro personas han sido elegidas del grupo de las mujeres, con lo que el número de resultados favorables al suceso A es:

$$C_{85,4} = \binom{85}{4} = \frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,024\,785$$

Y, aplicando la regla de Laplace, se obtiene:

$$P(A) = \frac{2024785}{37752925} = 0{,}0536$$

b) Sea B = “haya exactamente un hombre entre las cuatro personas elegidas”. Si tiene que haber exactamente un hombre, las otras tres personas deben ser elegidas entre las mujeres, por lo que el número de resultados favorables al suceso B es:

$$C_{90,1}C_{85,3} = \binom{90}{1}\binom{85}{3} = \frac{90}{1!} \cdot \frac{85 \cdot 84 \cdot 83}{3!} = 8\,889\,300$$

Aplicando la regla de Laplace:

$$P(B) = \frac{8889300}{37752925} = 0{,}2355$$

c) El suceso C = “haya más de un hombre” es el suceso contrario del suceso unión de los sucesos incompatibles A = “no haya ningún hombre” y B = “haya exactamente un hombre”, cuyas probabilidades han sido calculadas en los aparatados a y b. De esta manera:

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}0536 - 0{,}2355 = 0{,}7109$$

d) En este caso, el número de resultados favorables al suceso D = “haya el mismo número de mujeres que de hombres” es:

$$C_{85,2}C_{90,2} = \binom{85}{2}\binom{90}{2} = \frac{85 \cdot 84}{2} \cdot \frac{90 \cdot 89}{2} = 14\,297\,850$$

Y, su probabilidad se obtiene aplicando la regla de Laplace:

$$P(D) = \frac{14\,297\,850}{37\,752\,925} = 0{,}3787$$

7. El 50 % de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte *A* y el 40 % afirma practicar el deporte *B*. Además, se sabe que el 70 % de los jóvenes practica el deporte *A* o el *B*. Si se elige un joven al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.

b) La probabilidad de que practique solo el deporte *A*.

c) Si practica el deporte *B*, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte *A*?

d) ¿Son independientes los sucesos "practicar el deporte *A*" y "practicar el deporte *B*"? ¿Por qué?

Sean los sucesos *A* = "el joven elegido práctica el deporte *A*" y *B* = "el joven elegido practica el deporte *B*". Se sabe que $P(A)=0{,}5$, $P(B)=0{,}4$ y $P(A\cup B)=0{,}7$.

a) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0{,}7=0{,}3$$

b) En este caso, se debe calcular la probabilidad del suceso $A-B=A\cap\overline{B}$.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0{,}5-0{,}2=0{,}3$$

Donde $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}5+0{,}4-0{,}7=0{,}2$

c) Se debe calcular la probabilidad del suceso *A*, condicionada a que ocurra el suceso *B*:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}2}{0{,}4}=0{,}5$$

d) Como $P(A\cap B)=0{,}2$ y $P(A)P(B)=0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}2$, resulta que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ y, por tanto, los sucesos *A* y *B* son independientes.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Sea *A* y *B*, sucesos incompatibles asociados a un espacio muestral *E*, con $P(A)>0$, $P(B)>0$. Entonces:

A. *A* y *B* son independientes.

B. $P(A\,|\,B)\neq P(B\,|\,A)$

C. $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son incomptatibles.

D. $P(A\,|\,B)=0$

La respuesta correcta es la D por eliminación de las respuestas anteriores ya que *A* y *B* son independientes si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ y como $P(A)>0, P(B)>0$ no se verifica la igualdad. En la B puede ocurrir que $P(A)=P(B)$ lo cual verifica la igualdad y por último la C no implica que sus contrarios también lo sean. Además como $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ se tiene que $P(A\mid B)=0$.

2. **Dos sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio son independientes si:**

A. Cuando ocurre, por ejemplo, *A* entonces *B* no ocurre.

B. Cuando uno de ellos ocurre, el otro ya no puede ocurrir.

C. *A* y *B* tienen la misma probabilidad.

D. La probabilidad de *A*, por ejemplo, no se ve modificada por el hecho de que *B* ocurra.

La respuesta correcta es la D ya que si ocurre el suceso *B* no afecta a la probabilidad del suceso *A*.

3. **Si *A* y *B* son dos sucesos asociados a un espacio muestral *E* , con $P(A\,|\,B)=\frac{1}{2}P(B\,|\,A)$, entonces:**

A. Siempre que ocurre *B*, ocurre *A*.

B. La probabilidad de *B* es doble que la de *A*.

C. Si ocurre *A*, no ocurre *B*.

D. Los sucesos *A* y *B* son incompatibles.

La respuesta correcta es la B pues la probabilidad de $A\cap B$ se define como:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B\,|\,A) \text{ o } P(A\cap B)=P(B)P(A\,|\,B)$$

Igualando se tiene que:

$$P(A)P(B\,|\,A)=P(B)P(A\,|\,B)$$

Finalmente despejando se llega a que:

$$P(B)=\frac{P(A)\cdot 2P(A\,|\,B)}{P(A\,|\,B)}=2P(A)$$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Si *A* y *B* son sucesos incompatibles, siendo la probabilidad de *A* doble que la de *B* y con $P(B)>0$, entonces:**

A. $P(A\cup B)=3P(B)$

B. El suceso *B* está contenido en *A*.

C. $P(\overline{B}\,|\,A)=1$

D. $P\left(\overline{A}\,|\,\overline{B}\right)>P(A)$

Se sabe que $P(A)=2P(B)$ y $A\cap B=\varnothing$, luego por las propiedades de la probabilidad se tiene que:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=2P(B)+P(B)=3P(B)$$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada se tiene que:

$$P(\overline{B}\,|\,A)=1-P(B\,|\,A)=1-\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=1$$

Por tanto, las respuestas correctas son A y C.

5. **Si *A* y *B* son dos sucesos asociados a un espacio muestral *E*, y $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=1$, entonces:**

A. $P\left(A-B\right)=1-P(B)$

B. $P\left(A\right)=P(\overline{B})$

C. $P\left(A\cup B\right)=1$

D. $P\left(\overline{B}\,|\,\overline{A}\right)=0$

$$P(A\,|\,\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=1\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=1-P(B)\Rightarrow P(A\cup B)=1$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=1-P(B)$$

$$P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{A})}=0$$

Las respuestas correctas son A, C y D.

Señala el dato innecesario para contestar

6. **Si *A*, *B* y *C* son tres sucesos incompatibles dos a dos, para calcular la probabilidad de $\left(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}}\right)$ se necesita:**

A. $P(A)$, $P(B)$

B. $P(A\cap B\cap C)$

C. $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ y $P(B\cap C)$

D. $P(C)$

Aplicando la regla de la multiplicación de probabilidades condicionadas se sabe que:

$$P\left(A\cap B\cap C\right)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)\cdot P(C\,|\,A\cap B)$$

y como $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$ y $B\cap C=\varnothing$ por tanto la respuesta correcta es la C.

7. **Si *A*, *B* y *C* son tres sucesos tales que $B\cap C=\varnothing$, para calcular $P(\overline{A}\,|\,B\cup C)$, se precisa:**

A. $P(A)$

B. $P\left(A\cap B\right)$

C. $P(B)$ y $P(C)$

D. $P(A\cap C)$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada se tiene que:

$$P(\overline{A}\,|\,B\cup C)=\frac{P\left(\overline{A}\cap(B\cup C)\right)}{P\left(B\cup C\right)}=\frac{P\left[\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{A}\cap C\right)\right]}{P\left(B\cup C\right)}=\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap C\right)}{P(B)+P(C)-P\left(B\cap C\right)}=\frac{P(B)-P\left(A\cap B\right)+P(C)-P\left(A\cap C\right)}{P(B)+P(C)-P\left(B\cap C\right)}$$

Luego la respuesta correcta es la A.