14 Distribuciones de probabilidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Sea *X* una variable aleatoria que toma los valores 0, 1, 2 y 3 con probabilidades respectivas 0,2; 0,25; 0,4; 0,15. Calcula su media, su varianza y *P*(*X* > 1).

La esperanza es $\mu = E[X] = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}15 = 1{,}5$.

Para calcular la varianza se necesita obtener antes $E[X^2] = 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}25 + 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}15 = 3{,}2$.

Luego, la varianza es $\text{Var}(X) = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = 3{,}2 - 1{,}5^2 = 0{,}95$.

Por último, la probabilidad que se pide $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}4 + 0{,}15 = 0{,}55$.

3. Se lanzan dos dados de distinto color y se considera la variable *X*: "suma de las puntuaciones obtenidas".

a) Escribe su función de masa de probabilidad y represéntala mediante un diagrama de barras.

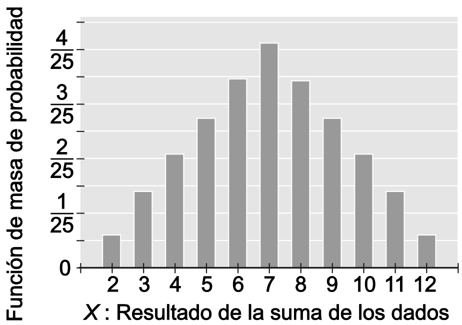
b) Calcula la media y la varianza de *X*.

En el lanzamiento de dos dados se tienen $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ resultados posibles equiprobables.

a) La variable aleatoria *X* toma los valores del 2 al 12. La probabilidad de cada uno de los valores se obtiene mediante la regla de Laplace, sin más que contar el número de resultados favorables a cada valor. Por tanto, la función de masa de probabilidad de *X* es:

x_j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_j	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

El diagrama de barras que representa la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria *X* es:



b) La esperanza de la variable aleatoria *X* es:

$$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Para calcular la varianza, es preciso obtener primero la esperanza de X^2 .

$$E[X^2] = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{1}{18} + 4^2 \cdot \frac{1}{12} + 5^2 \cdot \frac{1}{9} + 6^2 \cdot \frac{5}{36} + 7^2 \cdot \frac{1}{6} + 8^2 \cdot \frac{5}{36} + 9^2 \cdot \frac{1}{9} + 10^2 \cdot \frac{1}{12} + 11^2 \cdot \frac{1}{18} + 12^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{329}{6}$$

De manera que la varianza de *X* es $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$.

4. De una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 rojas, se extraen 3 bolas sucesivamente sin reemplazamiento. Sea la variable aleatoria *Y*: "numero de bolas blancas extraídas". Determina:

a) Su función de masa de probabilidad.

b) Su media y su varianza.

c) La probabilidad de que se extraigan al menos dos bolas blancas.

Como lo que interesa es el número de bolas blancas y no el orden en el que se han obtenido, se puede considerar que las bolas se extraen simultáneamente, ya que las bolas no se reemplazan. De esta manera, el número de resultados posibles al extraer tres bolas de la urna es el número de combinaciones de orden 3 (las tres bolas que se extraen) de 8 elementos (las ocho bolas de la urna). Esto es:

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = 56$$

a) La variable Y: "número de bolas blancas extraídas" puede tomar los valores 0, 1, 2, y 3 con probabilidades, que se pueden obtener por la regla de Laplace, en el numerador va el número de resultados favorables en cada caso:

$$P(Y=0) = \frac{\binom{3}{3}}{56} = \frac{1}{56} \qquad P(Y=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{56} = \frac{15}{56} \qquad P(Y=2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{56} = \frac{30}{56} \qquad P(Y=3) = \frac{\binom{5}{3}}{56} = \frac{10}{56}$$

De modo que la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria Y se puede resumir en la tabla:

Y	0	1	2	3
***P*(*Y* = *y*)**	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

b) La esperanza de la variable aleatoria *Y* es $E[Y] = 0\cdot\frac{1}{56} + 1\cdot\frac{15}{56} + 2\cdot\frac{15}{28} + 3\cdot\frac{5}{28} = \frac{15}{8}$.

Para calcular la varianza es preciso obtener antes la esperanza de Y^2:

$$E[Y^2] = 0^2\cdot\frac{1}{56} + 1^2\cdot\frac{15}{56} + 2^2\cdot\frac{15}{28} + 3^2\cdot\frac{5}{28} = \frac{225}{56}$$

De manera que la varianza de *Y* es $\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{225}{56} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{448}$.

c) $P(Y \geq 2) = P(Y=2) + P(Y=3) = \frac{15}{28} + \frac{5}{28} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$

5 y 6. Ejercicios resueltos.

7. Halla en cada caso la probabilidad indicada.

a) $X \sim \text{Bin}(n=5, p=0{,}15), P(X<4)$

b) $Y \sim \text{Bin}(n=7, p=0{,}65), P(Y \geq 4)$

a) $P(X<4) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 0{,}4437+0{,}3915+0{,}1382+0{,}0244 = 0{,}9978$

Estas probabilidades pueden obtenerse de la tabla o mediante:

$P(X=0)=\binom{5}{0}0{,}15^0\cdot 0{,}85^5 = 0{,}4437$, $P(X=1)=\binom{5}{1}0{,}15^1\cdot 0{,}85^4 = 0{,}3915$ $P(X=2)=\binom{5}{2}0{,}15^2\cdot 0{,}85^3 = 0{,}1382$

y $P(X=3)=\binom{5}{3}0{,}15^3\cdot 0{,}85^2 = 0{,}0244.$

b) $P(Y \geq 4) = P(Y=4)+P(Y=5)+P(Y=6)+P(Y=7)$

Como estas probabilidades no vienen directamente en la tabla, se puede tomar $X \sim \text{Bin}(n=7, p=0{,}35)$

$P(Y=4)=P(X=3)=0{,}2679$, $P(Y=5)=P(X=2)=0{,}2985$, $P(Y=6)=P(X=1)=0{,}1848$ y
$P(Y=7)=P(X=0)=0{,}0490$

Luego $P(Y \geq 4) = 0{,}2679+0{,}2985+0{,}1848+0{,}0490 = 0{,}8002$

8. Se sabe que una máquina produce un 10 % de tornillos defectuosos. En un control de calidad, se seleccionan 6 tornillos al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Haya uno defectuoso.

b) Al menos haya uno defectuoso.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de tornillos defectuosos, entre los 6 seleccionados".

La probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea defectuoso es $p=0{,}1$, de manera que la variable aleatoria X sigue una distribución binomial $X \sim \text{Bin}(n=6; p=0{,}1)$.

a) La probabilidad de que, entre los 6, haya uno defectuoso es:

$$P(X=1)=\binom{6}{1}0{,}1^1\cdot 0{,}9^5 = 0{,}3543$$

b) La probabilidad de que al menos una de los 6 tornillos sea defectuoso, se puede calcular como sigue:

$$P(X \geq 1) = 1-P(X=0) = 1-0{,}9^6 = 0{,}4686$$

Nota: El valor de las probabilidades calculadas puede obtenerse directamente de la tabla de la binomial.

9. Se lanza cinco veces una moneda trucada de manera que la probabilidad de que salga cara es el triple de la que salga cruz. Halla la probabilidad de que salgan más caras que cruces.

Sea $P(X)=p \Rightarrow P(C)=3p$ entonces $p+3p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{4}$.

Luego sustituyendo se tiene que $P(X)=\frac{1}{4}$ y $P(C)=\frac{3}{4}$.

Sea *X* = número de cruces, sigue una distribución $\text{Bin}(n=5; p=0{,}25)$. Luego la probabilidad pedida es:

$\text{P}(X<3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

Estos valores pueden obtenerse directamente de la tabla, luego:

$P(X<3) = 0{,}2373+0{,}3955+0{,}2637 = 0{,}8965$

10. Se lanza 9 veces un dado equilibrado. ¿Cuántas veces hay que lanzar el dado para obtener al menos un 6 con probabilidad igual o superior a 0,9?

Sea la variable aleatoria *X*: "número de seises que se obtienen al lanzar un dado 9 veces". La variable X sigue una distribución binomial $X \sim \text{Bin}\left(n=9; p=\frac{1}{6}\right)$.

Si *k* es el número de veces que hay que lanzar el dado para obtener por lo menos un seis con probabilidad mayor o igual que 0,9, se plantea que:

$P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \Rightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^k \geq 0{,}9 \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^k \leq 0{,}1$

Tomando logaritmos neperianos la desigualdad se conserva (el logaritmo neperiano es una función creciente):

$$k \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}1) \Rightarrow k \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 12{,}629$$

La última desigualdad se debe a que, al "despejar" k, se divide por un número negativo $\ln\left(\frac{5}{6}\right) = -0{,}1823215$, y, por tanto la desigualdad cambia de sentido.

De modo que el dado debe lanzarse al menos 13 veces para que se obtenga al menos un seis con probabilidad superior a 0,9.

11. Ejercicio interactivo.

12. Ejercicio resuelto.

13. En un país la tasa de paro es del 26 % de su población activa. Si se toma una muestra de 50 personas adultas y se les pregunta por su situación laboral, ¿Cuál será el número esperado de desempleados? ¿Y su desviación típica?

Si se considera la variable aleatoria *X*: "número de personas desempleadas, de las 50 seleccionadas", la variable *X* sigue una distribución binomial $X \sim \text{Bin}(n=50; p=0{,}26)$.

El número esperado de desempleados, entre los 50, es $E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}26 = 13$.

Y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}26 \cdot 0{,}74} = 3{,}1016$.

14. Un fármaco produce cefaleas en un 40 % de pacientes que lo toman. De 7 pacientes con este tratamiento, seleccionados al azar, calcula el número esperado de ellos que sufrirán ese efecto secundario y la probabilidad de que lo sufran:

a) Al menos dos.

b) Más de 4.

Sea *Y*: "número de personas que sufren efectos secundarios, de los 7 seleccionados". La variable *Y* sigue una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n=7; p=0{,}4)$.

El número esperado de pacientes que sufrirá efectos secundarios es $E[Y] = n \cdot p = 7 \cdot 0{,}4 = 2{,}8$.

a) $P(Y \geq 2) = 1-P(Y<2) = 1-P(Y=0)-P(Y=1) = 1-0{,}0280-0{,}1306 = 0{,}8414$

b) $P(Y>4) = P(Y=5)+P(Y=6)+P(Y=7) = 0{,}0774+0{,}0172+0{,}0016 = 0{,}0962$

15. Una encuesta reciente revela que en una ciudad el 35 % de los adultos aprueba la gestión del equipo de gobierno municipal, mientras el resto la desaprueba. Si de la población se eligen al azar 8 personas, calcula:

a) La probabilidad de que ninguno apruebe la gestión.

b) La probabilidad de que la aprueben exactamente 4.

c) El número esperado de personas que la aprueba.

d) La desviación típica del número de personas que aprueban la gestión.

Considera la variable aleatoria X: "número de personas, de las 8 seleccionadas, que aprueba la gestión". La variable X sigue una distribución binomial $X \sim \text{Bin}(n=8; p=0{,}35)$.

a) $P(X=0)=0{,}65^8=0{,}0319$

b) $P(X=4)=\binom{8}{4}0{,}35^4\cdot 0{,}65^4=0{,}1875$

c) Se calcula la esperanza de la variable X y es $E[X]=n\cdot p=8\cdot 0{,}35=2{,}8$.

d) En primer lugar se calcula la varianza y luego su raíz cuadrada positiva:

$$Var(X)=n\cdot p\cdot(1-p)=8\cdot 0{,}35\cdot 0{,}65=1{,}82\Rightarrow \sigma=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{1{,}82}=1{,}34907$$

16. Ejercicio resuelto.

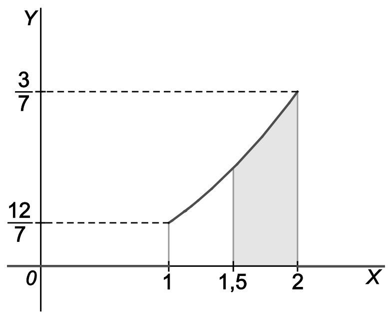
17. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es: $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{7}x^2 & \text{si } 1<x<2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

a) Calcula su esperanza y su varianza.

b) Calcula $P\left(X>\frac{3}{2}\right); P\left(\frac{3}{2}<X<\frac{19}{10}\right)$

a) La esperanza de la variable X es:

$$E[X]=\int_1^2 x\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{3}{7}\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{45}{28}$$

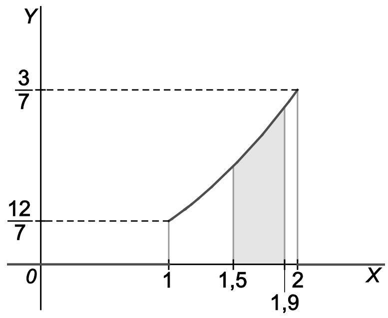


Para calcular la varianza se debe obtener antes el valor de $E\left[X^2\right]$:

$$E\left[X^2\right]=\int_1^2 x^2\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{3}{7}\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{93}{35}$$

Y la varianza de X es $\text{Var}(X)=E\left[X^2\right]-E[X]^2=\frac{93}{35}-\left(\frac{45}{28}\right)^2=0{,}07423$.

b) Ambas probabilidades se obtienen calculando el área bajo la función de densidad en cada uno de los dos casos:



$$P\left(X>\frac{3}{2}\right)=\int_{1'5}^2\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1,5}^2=\frac{3}{7}\left(\frac{8}{3}-\frac{3{,}375}{3}\right)=0{,}66071$$

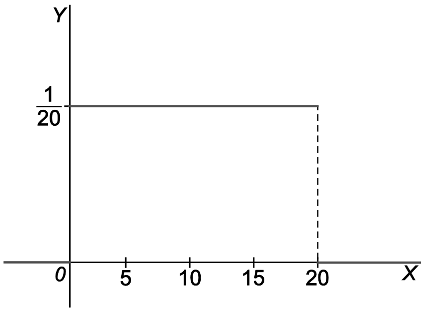
$$P\left(\frac{3}{2}<X<\frac{19}{10}\right)=\int_{1'5}^{1'9}\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1,5}^{1,9}=\frac{3}{7}\left(\frac{6{,}859}{3}-\frac{3{,}375}{3}\right)=0{,}49771$$

18. El tiempo de espera para un viajero en una parada de autobús es una variable aleatoria con función de densidad:

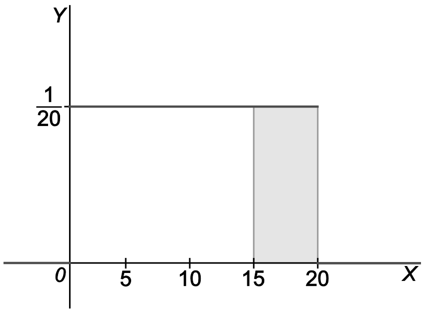
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20} & \text{si } 0\le x\le 20\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Dibuja su gráfica y calcula la probabilidad de que un usuario elegido al azar deba esperar más de 15 minutos.

La gráfica de la función de densidad:



La probabilidad de que el usuario elegido al azar espere más de 15 minutos es $P(X>15)=(20-15)\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{4}$



19. Utilizando la tabla de la normal estándar, determina *a* o *p* en cada caso.

a) $P(Z\le 1{,}46)=p$

b) $P(Z>2{,}13)=p$

c) $P(Z\ge -0{,}78)=p$

d) $P(-2{,}33\le Z<0{,}05)=p$

e) $P(-0{,}57\le Z\le -0{,}12)=p$

f) $P(Z<a)=0{,}0026$

g) $P(Z\ge a)=0{,}8345$

h) $P(-a\le Z<a)=0{,}9676$

a) $P(Z\le 1{,}46)=p=0{,}92785$

b) $P(Z>2{,}13)=1-P(Z<2{,}13)=1-0{,}98341=0{,}01659$

c) $P(Z\ge -0{,}78)=P(Z\le 0{,}78)=0{,}78230$

d) $P(-2{,}33\le Z<0{,}05)=P(Z<0{,}05)-P(Z<-2{,}33)=\Phi(0{,}05)-(1-\Phi(2{,}33))=0{,}51994-(1-0{,}99010)=0{,}51004$

e) $P(-0{,}57\le Z\le -0{,}12)=P(Z<-0{,}12)-P(Z<-0{,}57)=1-\Phi(0{,}12)-(1-\Phi(0{,}57))=$
$=1-0{,}54776-(1-0{,}71566)=0{,}16790$

f) En este caso, el valor de la probabilidad (0,0026) no viene directamente en la tabla ya es menor que 0,5. Ello indica que $a<0$ y se procede de la siguiente manera:

$P(Z<a)=0{,}0026\Rightarrow P(Z<-a)=1-P(Z<a)=0{,}9974\Rightarrow -a=2{,}8\Rightarrow a=-2{,}8$

g) $P(Z\ge a)=0{,}8345\Rightarrow P(Z<-a)=0{,}8345\Rightarrow -a=0{,}97(\text{aprox})\Rightarrow a=-0{,}97(\text{aprox})$

h) $P(-a\le Z\le a)=2\Phi(a)-1=0{,}9676\Rightarrow \Phi(a)=0{,}9838\Rightarrow a=2{,}14$

20 a 22. Ejercicios resueltos.

23. Un fabricante de un cierto tipo de motores asegura que la duración de su producto tiene una distribución normal de media 10 años de uso con una varianza de 4. Calcula la probabilidad de que un motor elegido al azar dure:

a) Más de 12 años.

b) Menos de 9 años.

c) Entre 10 y 11 años.

Si un comerciante compra un lote de 100 motores al fabricante, calcula cuántos motores puede esperarse que duren:

d) Más de 7 años.

e) Más de 9 años.

Considera la variable aleatoria *X*: “duración de los motores”. Sabemos que $X \sim N\left(\mu = 10; \sigma^2 = 4\right)$.

a) $P(X > 12) = P\left(Z > \dfrac{12-10}{2}\right) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

b) $P(X < 9) = P\left(Z < \dfrac{9-12}{2}\right) = P(Z < -1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

c) $P(10 < X < 11) = P\left(\dfrac{10-10}{2} < Z < \dfrac{11-10}{2}\right) = P(0 < Z < 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(0) = 0{,}6915 - 0{,}5 = 0{,}1915$

d) Para calcular el número de motores que se espera que duren 7 años, en primer lugar se calcula la probabilidad de que un motor elegido al azar dure más de 7 años:

$$P(X > 7) = P\left(Z > \dfrac{7-10}{2}\right) = P(Z > -1{,}5) = \Phi(1{,}5) = 0{,}9332$$

Por lo que se estima que el 93,32 % de los motores durará más de 7 años. Si un comerciante compra 100 motores, se espera que aproximadamente 93 de ellos duren más de 7 años.

e) $P(X > 9) = P\left(Z > \dfrac{9-10}{2}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0{,}8413$

De forma que aproximadamente 84 motores, de los 100, durarán más de 9 años.

24. Una máquina produce tuercas cuyo diámetro tiene una distribución normal de media 5 cm y desviación típica 2 mm. No se pueden vender las tuercas que se desvíen 3 mm de la media. De un lote de 500 tuercas, ¿Cuántas deben ser descartadas para la venta?

Sea la variable *X*: “diámetro de las tuercas producidas por la máquina”. Con las medidas expresadas en milímetros, se tiene que $X \sim N(\mu = 50; \sigma = 2)$.

Solo son aptas para la venta las tuercas cuyo diámetro esté entre 47 y 53 mm. Por tanto, la probabilidad de que una tuerca elegida al azar sea apta para la venta es:

$$P(47 < X < 53) = P\left(\dfrac{47-50}{2} < Z < \dfrac{53-50}{2}\right) = P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(1{,}5) - \left(1 - \Phi(1{,}5)\right) =$$
$$= 2\Phi(1{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664$$

De manera que el 86,64 % de las tuercas producidas son aptas para la venta y se descartarán el 13,36 %. Por tanto, de un lote de 500 tuercas, se descartarán $0{,}1336 \cdot 500 = 66{,}8$ es decir aproximadamente 67 tuercas.

25. A una prueba de acceso de una universidad se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y varianza 4. Calcula la nota de corte para los admitidos.

Considera la variable aleatoria *X*: "calificación del examen". Su distribución es $X \sim N\left(\mu = 6{,}5; \sigma^2 = 4\right)$

Para establecer la nota de corte, se calcula la proporción que representan 300 plazas de 2500 aspirantes:

$$\frac{300}{2500} = 0{,}12$$

De manera que se debe buscar la calificación *a* tal que $P(X > x) = 0{,}12$. O de forma equivalente:

$$1 - P\left(X < a\right) = 0{,}12 \Rightarrow P\left(X < a\right) = 0{,}88$$

Tipificando en la última expresión y buscando en las tablas de la normal, se tiene que:

$$P\left(Z < \frac{a - 6{,}5}{2}\right) = 0{,}88 \Rightarrow \frac{a - 6{,}5}{2} = 1{,}175 \Rightarrow a = 8{,}85$$

Luego la nota de corte es 8,85 puntos.

26. Un supermercado ha hecho un estudio sobre el número de productos que escanean sus cajeras, llegando a la conclusión de que dicho número, por cajera y minuto, sigue una ley normal de media 33 y desviación típica 4. Si se elige al azar una cajera, calcula la probabilidad de que escanee en un minuto:

a) Más de 35 productos.

b) Menos de 31 productos.

c) Un número de productos comprendido entre 30 y 34.

Se considera la variable *X*: "número de productos que, por minuto, escanea la cajera". La variable X sigue una distribución normal $X \sim N\left(\mu = 33; \sigma = 4\right)$.

a) $P\left(X > 35\right) = P\left(Z > \frac{35 - 33}{4}\right) = P\left(Z > 0{,}5\right) = 1 - \Phi\left(0{,}5\right) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

b) $P\left(X < 31\right) = P\left(Z < \frac{31 - 33}{4}\right) = P\left(Z < -0{,}5\right) = P\left(Z > 0{,}5\right) = 1 - \Phi\left(0{,}5\right) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

c) $P\left(30 < X < 34\right) = P\left(\frac{30 - 33}{4} < Z < \frac{34 - 33}{4}\right) = P\left(-0{,}75 < Z < 0{,}25\right) = \Phi\left(0{,}25\right) - \Phi\left(-0{,}75\right) =$

$= \Phi\left(0{,}25\right) - \left(1 - \Phi\left(0{,}75\right)\right) = 0{,}5987 - 1 + 0{,}7734 = 0{,}3721$

27. Ejercicio interactivo.

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. El 40 % de las personas empadronadas en una ciudad viven en urbanizaciones alejadas del centro. De una muestra de 1500 personas, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 580 vivan en urbanizaciones?

Sea la variable aleatoria *Y*: "número de personas, de las 1500, que viven en urbanizaciones alejadas del centro". La variable *Y* sigue una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}\left(n = 1500; p = 0{,}4\right)$ que puede aproximarse por una variable *X* con distribución normal de media $\mu = 1500 \cdot 0{,}4 = 600$ y varianza $\sigma^2 = 1500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 360$. Esto es $X \sim N\left(\mu = 600; \sigma = \sqrt{360}\right)$. La probabilidad que se pide es:

$$P\left(Y < 580\right) \cong P\left(X \le 579{,}5\right) = P\left(Z \le \frac{579{,}5 - 600}{\sqrt{360}}\right) = P\left(Z \le -1{,}08\right) = 1 - \Phi\left(1{,}08\right) = 1 - 8599 = 0{,}1401$$

31. En una población, el 45 % de las personas adultas se declara consumidora de café. Si de la ciudad elegimos una muestra de 250 personas adultas, calcula la probabilidad de que más de la mitad tomen café.

Sea la variable *Y*: "número de consumidores de café, entre los 250", cuya distribución es binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 250; p = 0{,}45)$ que puede aproximarse por una variable *X* con distribución normal de media $\mu = 250 \cdot 0{,}45 = 112{,}5$ y varianza $\sigma^2 = 250 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 61{,}875$. Esto es $X \sim N\left(\mu = 112{,}5; \sigma = \sqrt{61{,}875}\right)$.

La probabilidad que se pide es:

$$P(Y > 125) \cong P(X > 125{,}5) = P\left(Z > \frac{125{,}5 - 112{,}5}{\sqrt{61{,}875}}\right) = P(Z > 1{,}65) = 1 - \Phi(1{,}65) = 1 - 0{,}9505 = 0{,}0495$$

32. El primer examen de una oposición es un test consta de una batería de 100 preguntas cada una de las cuales tiene 5 posibles respuestas de las que solo una es correcta. Si una persona responde al azar, calcula la probabilidad de que acierte al menos 25 preguntas.

Sea la variable aleatoria *Y*: "número de respuestas acertadas de las 10", que sigue una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 100; p = 0{,}2)$. Ya que si una persona responde al azar, la probabilidad de acertar una pregunta es $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

La distribución de probabilidad de la variable *Y* puede aproximarse por la de una variable *X* con distribución normal de media $\mu = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ y varianza $\sigma^2 = 100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 16$. Esto es $X \sim N(\mu = 20; \sigma = 4)$.

La probabilidad que se pide es:

$$P(Y \geq 25) \cong P(X \geq 24{,}5) = P\left(Z \geq \frac{24{,}5 - 20}{4}\right) = P(Z \geq 1{,}13) = 1 - \Phi(1{,}13) = 1 - 0{,}8708 = 0{,}1292$$

Donde $\Phi(1{,}13) = 0{,}8708$ se ha obtenido de la tabla de la *N*(0,1)

33. Ejercicio interactivo.

34 a 42. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Variable aleatoria discreta

43. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta, *X*, viene dada en la tabla siguiente:

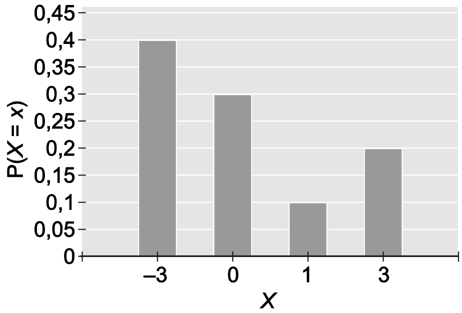
x_j	-3	0	1	3
p_j	0,4	0,3	0,1	0,2

a) Representa gráficamente la distribución.

b) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de *X*.

c) Calcula $P(1 < X < 2{,}5)$ y $P(X < 1)$.

a) La función de masa de probabilidad se puede representar por un diagrama de barras:



b) La esperanza de la variable *X* es $E[X] = -3 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 = -0{,}5$.

Para calcular la varianza se calcula en primer lugar la esperanza de X^2 :

$E[X^2] = (-3)^2 \cdot 0{,}4 + 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}2 = 5{,}5$

La varianza de *X* es $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 5{,}5 - (-0{,}5)^2 = 5{,}25$.

La desviación típica de *X* es $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{5{,}25} \cong 2{,}2913$.

c) Para calcular las probabilidades que se piden, se suman las probabilidades de los valores de X que correspondan en cada caso:

$P(1 < X < 2{,}5) = 0$ porque *X* no toma ningún valor en el intervalo $(1;\, 2{,}5)$.

$P(X < 1) = P(X = -3) + P(X = 0) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

44. Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $P(X=x)=\dfrac{k}{x+1}$ para $x = 0, 1, 2, 3$.

a) Calcula el valor de la constante k.

b) Representa gráficamente la función de masa.

c) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de X.

d) Calcula $P(0{,}5 < X < 3{,}5)$.

a) La suma de las probabilidades de los valores de la variable debe ser 1, es decir:

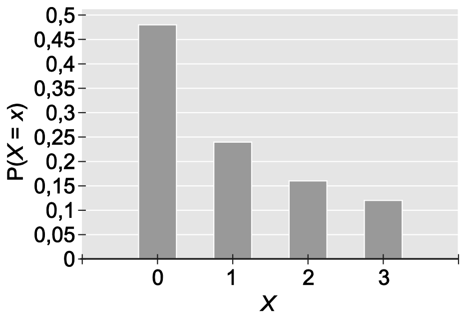
$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

$$\frac{k}{1}+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}=1 \Rightarrow k=\frac{12}{25}=0{,}48$$

b) La función de masa de probabilidad de la variable X, se puede recoger en la tabla siguiente:

X	0	1	2	3
***P*(*X* = *x*)**	0,48	0,24	0,16	0,12

Y el diagrama de barras correspondiente:



c) La esperanza de la variable X es $E[X]=0\cdot 0{,}48+1\cdot 0{,}24+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}12=0{,}92$.

Para calcular la varianza se calcula en primer lugar la esperanza de X^2 :

$$E\left[X^2\right]=0^2\cdot 0{,}48+1^2\cdot 0{,}24+2^2\cdot 0{,}16+3^2\cdot 0{,}12=1{,}96$$

La varianza de X es $\mathrm{Var}(X)=E\left[X^2\right]-E[X]^2=1{,}96-(0{,}92)^2=1{,}1136$.

La desviación típica de X es $\sigma=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{1{,}1136}\cong 1{,}0553$.

d) La probabilidad del intervalo (0,5; 3,5) se obtiene sumando las probabilidades de los valores de X incluidos en el mismo:

$$P(0{,}5<X<3{,}5)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}24+0{,}16+0{,}12=0{,}52$$

45. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X* viene dada en la tabla siguiente:

X_j	1	2	3	4	5
p_j	0,07	a	0,2	b	0,33

Además, $P(X \le 4) = 0{,}67$ y $P(X \ge 4) = 0{,}6$. Calcula:

a) Los valores de *a* y *b* para completar la tabla.

b) Dibuja la gráfica de la función de masa de *X*.

c) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

d) Halla la probabilidad $P(2 \le X < 5)$.

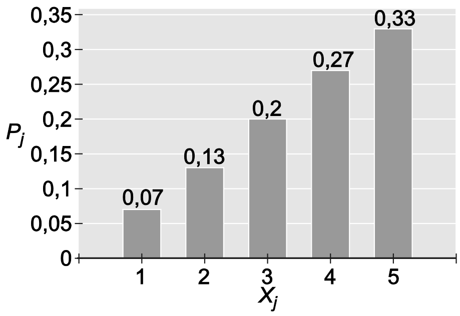
a) $P(X \ge 4) = 0{,}6 \Rightarrow P(X=4) + P(X=5) = 0{,}6$ de esta última expresión se obtiene $b + 0{,}33 = 0{,}6 \Rightarrow b = P(X=4) = 0{,}27$.

Mientras que $P(X \le 4) = 0{,}67 \Rightarrow P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0{,}67$ y de la última expresión, se obtiene $0{,}07 + a + 0{,}2 + 0{,}27 = 0{,}67 \Rightarrow a = P(X=2) = 0{,}13$.

Entonces, la función de masa de probabilidad de la variable *X* queda:

X_j	1	2	3	4	5
p_j	0,07	0,13	0,2	0,27	0,33

b) El diagrama de barras que representa la función de masa de probabilidad es:



c) La esperanza de la variable *X* es $E[X] = 1 \cdot 0{,}07 + 2 \cdot 0{,}13 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}27 + 5 \cdot 0{,}33 = 3{,}66$.

Para calcular la varianza se debe calcular antes:

$$E\left[X^2\right] = 1^2 \cdot 0{,}07 + 2^2 \cdot 0{,}13 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}27 + 5^2 \cdot 0{,}33 = 14{,}96$$

La varianza es $\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = 14{,}96 - 3{,}66^2 = 1{,}5644$.

d) La probabilidad del intervalo $[2{,}5)$ se obtiene sumando las probabilidades de los valores de *X* incluidos en el mismo:

$$P(2 \le X < 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0{,}13 + 0{,}2 + 0{,}27 = 0{,}6$$

Variables aleatorias binomiales

46. La variable aleatoria *X* tiene una distribución binomial de parámetros *n* = 8 y *p* = 0,6. Calcula:

a) La esperanza y la varianza de *X*.

b) $P(X<6)$ y $P(X\geq 5)$

c) $P(3\leq X<5)$

d) $P(0<X<2)$

a) La esperanza de X es $E[X]=n\cdot p=8\cdot 0{,}6=4{,}8$.

Y su varianza es $\sigma^2=\text{Var}(X)=n\cdot p\cdot q=8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=1{,}92$.

b) Se calculan las probabilidades directamente o por medio de la tabla. En este último caso es preciso utilizar la distribución de $Y\sim \text{Bin}(n=8, p=0{,}4)$. Es decir:

$$P(X<6)=1-[P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)]=1-[P(Y=2)+P(Y=1)+P(Y=0)]=$$
$$=1-(0{,}2090+0{,}0896+0{,}0168)=0{,}6846$$

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=P(Y=3)+P(Y=2)+P(Y=1)+P(Y=0)=$$
$$=0{,}2787+0{,}2090+0{,}0896+0{,}0168=0{,}5941$$

c) De forma similar a la del apartado anterior:

$$P(3\leq X<5)=P(X=3)+P(X=4)=P(Y=5)+P(Y=4)=0{,}2322+0{,}1239=0{,}3561$$

d) Procediendo como en los apartados anteriores:

$$P(0<X<2)=P(X=1)=P(Y=7)=0{,}0079$$

Variables aleatorias continuas

47. Sea *X* una variable aleatoria continua con función de densidad $f(X)=\begin{cases} k(2-x) & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$**.**

a) Halla el valor de *k* y representa gráficamente la función de densidad.

b) Calcula $P\left(X>\frac{1}{2}\right)$.

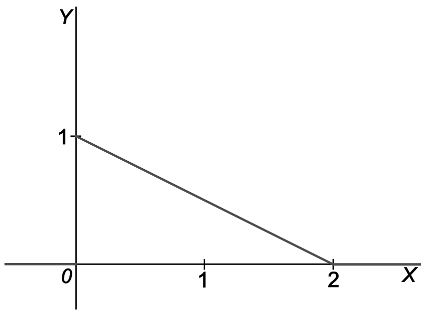
c) Calcula la esperanza y la varianza de la variable *X*.

a) Para hallar el valor de *k*, el área encerrada por la gráfica de la función, el eje *X* y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, debe ser 1:

$$1=\int_0^2 k(2-x)dx=k\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2=k(4-2)=2k\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Luego la función de densidad de *X* es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-x}{2} & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$.

Y su gráfica es:

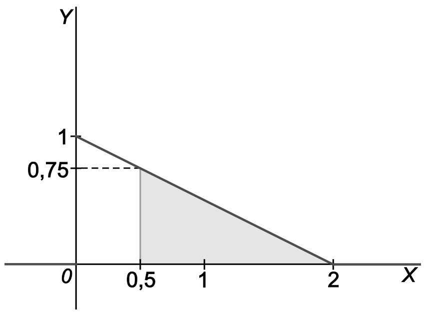


b) Esta probabilidad se puede calcular gráficamente como el área del triángulo señalado en la figura.

$$P(X>0{,}5)=\frac{1{,}5\cdot 0{,}75}{2}=0{,}5625$$

O también por cálculo integral

$$P(X>1)=\int_{0'5}^2\frac{1}{2}(2-x)dx=\frac{1}{2}\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{0,5}^2=\frac{1}{2}(4-2-1+0{,}125)=0{,}5625$$



c) Para calcular la esperanza, se procede del siguiente modo:

$$E[X]=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x\frac{2-x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(4-\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

Para calcular la varianza debe calcularse antes:

$$E\left[X^2\right]=\int_0^2 x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\frac{2-x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right)=\frac{2}{3}$$

La varianza es $\operatorname{Var}(X)=E\left[X^2\right]-E[X]^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$.

48. Considera una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x} & si \quad 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$.

a) Calcula el valor de la constate k.

b) Dibuja la gráfica de la función de densidad.

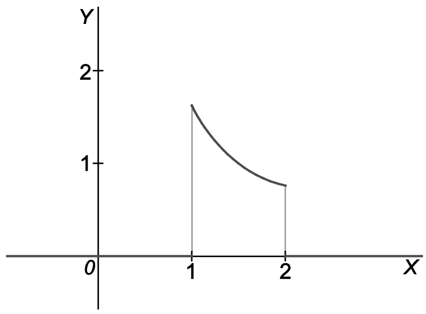
c) Calcula su esperanza y su varianza.

a) El área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje X y las rectas verticales $x=1$ y $x=2$ debe ser 1:

$$1=\int_1^2 \frac{k}{x}dx = k\left[\ln x\right]_1^2 = k(\ln 2-\ln 1) = k\cdot\ln 2 \Rightarrow k=\frac{1}{\ln 2}$$

b) La función de densidad y su gráfica son:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x\ln 2} & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$



c) La esperanza de la variable X es $E[X]=\int_1^2 x\dfrac{1}{x\ln 2}dx = \dfrac{1}{\ln 2}[x]_1^2 = \dfrac{1}{\ln 2} = 1{,}4427$.

Para calcular la varianza debe calculase antes:

$$E\left[X^2\right]=\int_1^2 x^2\frac{1}{x\ln 2}dx = \frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{\ln 2}\left(2-\frac{1}{2}\right) = 2{,}1640$$

La varianza es $\text{Var}(X) = E\left[X^2\right]-E[X]^2 = 2{,}1640 - 1{,}4427^2 = 0{,}0826$.

Variables aleatorias con distribución normal

49. Sea una variable aleatoria que sigue una distribución *N*(0, 1), halla el valor de *k* en cada caso.

a) $P(Z\le k)=0{,}9846$

b) $P(Z\ge k)=0{,}33$

c) $P(Z>k)=0{,}8413$

d) $P(-k<Z<k)=0{,}7498$

a) $\Phi(k)=P(Z\le k)=0{,}9846 \Rightarrow k=2{,}16$

b) $P(Z\ge k)=0{,}33 \Rightarrow 1-P(Z\le k)=0{,}33 \Rightarrow \Phi(k)=P(Z\le k)=0{,}67 \Rightarrow k=0{,}44$

c) $P(Z>k)=0{,}8413 \Rightarrow \Phi(-k)=P(Z<-k)=0{,}8413 \Rightarrow -k=1 \Rightarrow k=-1$

d) $P(-k<Z<k)=P(Z<k)-P(Z<-k)=P(Z<k)-\left(1-P(Z<k)\right)=2P(Z<k)-1$

Por tanto, $2\Phi(k)-1=0{,}7498 \Rightarrow \Phi(k)=0{,}8749 \Rightarrow k=1{,}15$

50. Sea una variable aleatoria que sigue una distribución normal $N(\mu = 3, \sigma = 0{,}8)$, halla el valor de *a* en cada caso.

a) $P(X \le 2a) = 0{,}5$

b) $P(X \ge a-1) = 0{,}1056$

c) $P\left(X > \frac{a}{2}\right) = 0{,}9991$

d) $P(3-a < X < 3+a) = 0{,}7888$

En todos los casos, debe tipificarse la variable para poder utilizar la tabla de la normal $N(0,1)$.

a) $P(X \le 2a) = P\left(Z \le \frac{2a-3}{0{,}8}\right) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{2a-3}{0{,}8} = 0 \Rightarrow a = 1{,}5$

b) $P(X \ge a-1) = P\left(Z \ge \frac{a-1-3}{0{,}8}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-4}{0{,}8}\right) = 0{,}1056$

Entonces, resulta $\Phi\left(\frac{a-4}{0{,}8}\right) = P\left(Z < \frac{a-4}{0{,}8}\right) = 0{,}8944 \Rightarrow \frac{a-4}{0{,}8} = 1{,}25 \Rightarrow a = 5$.

c) $P\left(X > \frac{a}{2}\right) = P\left(Z > \frac{\frac{a}{2}-3}{0{,}8}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-6}{1{,}6}\right)$

Entonces $1 - P\left(Z < \frac{a-6}{1{,}6}\right) = 0{,}9991 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a-6}{1{,}6}\right) = P\left(Z < \frac{a-6}{1{,}6}\right) = 0{,}0009 \Rightarrow \Phi\left(-\frac{a-6}{1{,}6}\right) = 0{,}9991$

De donde $\frac{a-6}{1{,}6} = 3{,}12 \Rightarrow a = 10{,}992$

d) $P(3-a < X < 3+a) = P\left(\frac{3-a-3}{0{,}8} < Z < \frac{3+a-3}{0{,}8}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{0{,}8}\right) - 1$

Entonces $2\Phi\left(\frac{a}{0{,}8}\right) - 1 = 0{,}7888 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a}{0{,}8}\right) = 0{,}8944 \Rightarrow \frac{a}{0{,}8} = 1{,}25 \Rightarrow a = 1$

Síntesis

51. Sea *X* una variable aleatoria con distribución normal de media 5 y desviación típica 2. Calcula las probabilidades siguientes.

a) $P(X<3)$ **c)** $P(-2\le X-4<2)$ **e)** $P(1\le X<9)$

b) $P(X>2)$ **d)** $P(|2X|\le 1)$ **f)** $P(X\le 2 \mid X\ge 1)$

En todos los casos, se tipifica previamente para poder usar las tablas de la normal estándar.

a) $P(X<3)=P\left(Z<\frac{3-5}{2}\right)=P(Z<-1)=1-\Phi(1)=1-0{,}8413=0{,}1587$

b) $P(X>2)=P\left(Z>\frac{2-5}{2}\right)=P(Z>-1{,}5)=\Phi(1{,}5)=0{,}9332$

c) $P(-2\le X-4<2)=P(2\le X<6)=P\left(\frac{2-5}{2}\le Z<\frac{6-5}{2}\right)=P(-1{,}5\le Z<0{,}5)=\Phi(0{,}5)-\Phi(-1{,}5)=$
$=\Phi(0{,}5)-1+\Phi(1{,}5)=0{,}6915-1+0{,}9332=0{,}6247$

d) $P(|2X|\le 1)=P(-1\le 2X\le 1)=P(-0{,}5\le X\le 0{,}5)=P\left(\frac{-0{,}5-5}{2}\le Z\le \frac{0{,}5-5}{2}\right)=P(-2{,}75\le Z\le -2{,}25)=$
$=\Phi(-2{,}25)-\Phi(-2{,}75)=1-\Phi(2{,}25)-1+\Phi(2{,}75)=1-0{,}9878-1+0{,}9970=0{,}0092$

e) $P(1\le X<9)=P\left(\frac{1-5}{2}\le Z<\frac{9-5}{2}\right)=P(-2\le Z<2)=2\Phi(2)-1=2\cdot 0{,}97725-1=0{,}9545$

f) Se pide una probabilidad condicionada, entonces:

$$P(X\le 2 \mid X\ge 1)=\frac{P(X\le 2\cap X\ge 1)}{P(X\ge 1)}=\frac{P(1\le X\le 2)}{P(X\ge 1)}$$

Calculando numerador y denominador, por separado, resulta:

$$P(1\le X\le 2)=P\left(\frac{1-5}{2}\le Z\le\frac{2-5}{2}\right)=P(-2\le Z\le -1{,}5)=\Phi(-1{,}5)-\Phi(-2)=\Phi(2)-\Phi(1{,}5)=0{,}9772-0{,}9332=0{,}044$$

$$P(X\ge 1)=P\left(Z>\frac{1-5}{2}\right)=P(Z>-2)=\Phi(2)=0{,}9772$$

Luego $P(X\le 2 \mid X\ge 1)=\frac{0{,}044}{0{,}9772}=0{,}0450$

52. El tiempo en minutos transcurrido hasta que una persona es atendida en la sucursal *A* de un banco sigue una distribución $N(\mu = 9, \sigma = 0{,}1)$, mientras que el tiempo, también en minutos, transcurrido hasta que es atendido en la sucursal *B* sigue una distribución $N(\mu = 8{,}5; \sigma = 2)$.

a) Si un cliente tiene que hacer una gestión y solo dispone de 10 minutos, ¿en qué sucursal será más fácil que le hayan atendido en el tiempo que dispone?

b) Un cliente, teniendo en cuenta la proximidad de estas dos sucursales a su casa, elige ir a la sucursal *A* con probabilidad 0,3, y a la sucursal *B,* con probabilidad 0,7. Eligiendo una de las visitas al banco de este cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el cliente haya tenido que esperar más de 10 minutos?

Considera las variables *X*: "tiempo de espera en la sucursal *A*" e *Y*: "tiempo de espera en la sucursal *B*". La variable *X* sigue una distribución $X \sim N(\mu = 9; \sigma = 0{,}1)$ y la variable *Y* $Y \sim N(\mu = 8{,}5; \sigma = 2)$.

a) La probabilidad de que sea atendido en la sucursal A, en los 10 minutos de que dispone es:

$$P(X \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-9}{0{,}1}\right) = \Phi(10) = 1$$

Mientras que la probabilidad de que sea atendido en la sucursal *B* en los 10 minutos disponibles es:

$$P(Y \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-8{,}5}{2}\right) = \Phi(0{,}75) = 0{,}7734$$

Luego, en los 10 minutos disponibles, es más probable que le hayan atendido en la sucursal *A* que en la *B*.

b) Considera los sucesos *A* = "el cliente elige la sucursal A" y *B* = "el cliente elige la sucursal B". Las probabilidades son $P(A) = 0{,}3$ y $P(B) = 0{,}7$.

Sea *T* = "tiempo de espera del cliente hasta ser atendido" (observa que $T = X$, si elige la sucursal *A* y $T = Y$ si elige la sucursal *B*)

Si el cliente elige la sucursal *A*, la probabilidad de que tarden más de 10 minutos en atenderle es:

$$P(T \ge 10 \mid A) = 1 - P(T \le 10 \mid A) = 1 - 1 = 0$$

Si el cliente elige la sucursal *B*, la probabilidad de que tarden más de 10 minutos en atenderle es:

$$P(T \ge 10 \mid B) = 1 - P(T \le 10 \mid B) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$$

Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(T \ge 10) = P(A)P(X \ge 10 \mid A) + P(B)P(Y \ge 10 \mid B) = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot 0{,}2266 = 0{,}15862$$

CUESTIONES

53. Sean las variables aleatorias $X \sim \text{Bin}(n;p)$ e $Y \sim \text{Bin}\left(2n,\frac{p}{2}\right)$.

a) Comprueba que tienen la misma media.

b) ¿Cuál de las dos distribuciones tiene los datos menos dispersos respecto a su media?

a) $E[X]=n\cdot p$ y $E[Y]=2n\cdot\frac{p}{2}=n\cdot p$

Luego tienen la misma media o esperanza.

b) Para ver cuál de las dos variables tiene los datos menos dispersos, se debe calcular la varianza de ambas variables y compararlas. Se supone que $p\neq 0$ y $p\neq 1$.

$$\text{Var}(X)=n\cdot p\cdot(1-p) \text{ y } \text{Var}(Y)=2n\cdot\frac{p}{2}\cdot\left(1-\frac{p}{2}\right)=n\cdot p\cdot\left(1-\frac{p}{2}\right)$$

Como $1-p<1-\frac{p}{2} \Rightarrow \text{Var}(X)<\text{Var}(Y)$ la variable *X* tiene los valores menos dispersos que la variable *Y*.

54. Sea *X* una variable aleatoria que tiene una distribución continua. ¿Cuál es la media y la varianza de la distribución 2*X*? ¿Y la de $X+2$?

Sea $f(x)$ la función de densidad de la variable *X*, entonces, la esperanza de 2*X*, es:

$$E[2X]=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}xdx=2E[X]$$

Para la varianza de 2*X*, se debe calcular antes $E\left[(2X)^2\right]$. Pero, teniendo en cuenta que $E[kg(X)]=kE[g(X)]$ entonces $E\left[(2X)^2\right]=E\left[4X^2\right]=4E\left[X^2\right]$.

Y, por tanto, la varianza de 2*X* es:

$$\text{Var}(2X)=E\left[(2X)^2\right]-(E[2X])^2=E\left[4X^2\right]-(2E[X])^2=4\left(E\left[X^2\right]-E[X]^2\right)=4\,\text{Var}(X)$$

Luego, la esperanza de 2*X* es el doble que la esperanza de *X* y la varianza de 2*X* es cuatro veces la varianza de *X*”

En cuanto a la esperanza y la varianza de $X+2$, se tiene que $E[X+2]=E[X]+2$ y $\text{Var}(X+2)=\text{Var}(X)$.

PROBLEMAS

55. Sea *X* la variable aleatoria que consiste en sumar las puntuaciones obtenidas al lanzar conjuntamente un dado y una moneda equilibrados. Las puntuaciones que se consideran de la moneda son 0 para cara y 1 para cruz.

a) Escribe su función de masa de probabilidad y dibuja su gráfica.

b) Calcula la probabilidad de que la variable *X* tome como valor un número primo.

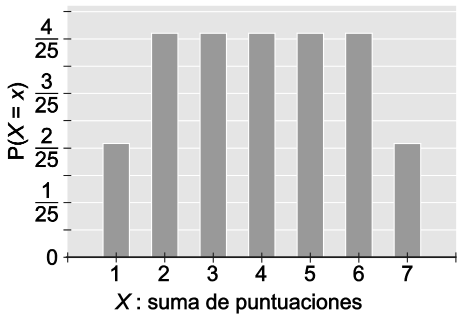
c) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

a) En el lanzamiento conjunto de una moneda y un dado, el espacio muestral está formado por los siguientes resultados equiprobables $E=\{1C,2C,3C,4C,5C,6C,1X,2X,3X,4X,5X,6X\}$ y al ser sumados, con $C=0$ y $X=1$ resulta que la variable aleatoria X: "suma de las puntuaciones del dado y la moneda" toma los valores enteros del 1 al 7, con las probabilidades que se muestran en la tabla siguiente:

X	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Donde, por ejemplo $P(X=2)=P(2C)+P(1X)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

Su gráfica se puede representar mediante un diagrama de barras:



b) La probabilidad de que la suma sea un número primo (3, 5 o 7), se obtiene sumando las probabilidades de individuales de 3, 5 y 7.

$P(X=\text{número primo})=P(3)+P(5)+P(7)==\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

c) Para calcular la esperanza y la varianza de la variable *X*, se construye la tabla siguiente:

X	$P(X=x)$	$xP(X=x)$	$x^2P(X=x)$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1	6
7	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{49}{12}$
	1	4	$\frac{115}{6}$

La esperanza es $E[X]=\sum_{j=1}^{7}x_jp_j=4$.

La varianza es $E[X^2]=\sum_{j=1}^{7}x_j^2p_j=\frac{115}{6}\Rightarrow \text{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=\frac{115}{6}-4^2=\frac{19}{6}$.

56. De una urna que contiene 4 bolas verdes y 6 rojas se extraen sucesivamente y con reemplazamiento 6 bolas. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente 3 bolas verdes.

b) Más de 4 bolas verdes.

c) Más de 2 pero menos de 5 bolas verdes.

Cada extracción puede considerarse como un ensayo de Bernoulli en el que la probabilidad del suceso A = "obtener bola verde" es $p(A) = 0{,}4$.

Considera la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes extraídas en los 6 intentos". La distribución de la variable *X* es $\text{Bin}(n = 6; p = 0{,}4)$. Las probabilidades que se piden se pueden obtener directamente de la tabla de la binomial.

a) $P(X = 3) = 0{,}2765$

b) $P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}0369 + 0{,}0041 = 0{,}041$

c) $P(2 < X < 5) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}2765 + 0{,}1382 = 0{,}4147$

57. El encargado de una plantación de chopos asegura que, en este momento, el diámetro de los árboles sigue una distribución normal de media 20 cm y que el 90 % de ellos tiene un diámetro inferior a 25 cm.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Calcula la probabilidad de que un árbol elegido al azar tenga más de 22 cm de diámetro.

Sea *X*: "diámetro, en cm, de los árboles de la plantación". Se sabe que *X* sigue una distribución $N(\mu = 20; \sigma)$.

a) Como $P(X < 25) = 0{,}9$, entonces, tipificando y buscando en las tablas de la normal:

$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{25 - 20}{\sigma}\right) = 0{,}9 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} = 1{,}282 \Rightarrow \sigma = 3{,}9\text{cm}$$

b) Con la desviación típica calculada en el apartado anterior:

$$P(X > 22) = P\left(Z > \frac{22 - 20}{3{,}9}\right) = P(Z > 0{,}51) = 1 - \Phi(0{,}51) = 1 - 0{,}6950 = 0{,}3050$$

58. Un test específico para determinar el estado de salud de los trabajadores de una empresa tiene una distribución normal de media $\mu = 100$ y desviación típica $\sigma = 8$. El protocolo de la revisión establece que si un trabajador supera los 115 puntos debe ser objeto de una segunda revisión en profundidad.

¿Cuál es el porcentaje de trabajadores que necesitará una segunda revisión?

Sea *X*: "puntuación del test de salud de los trabajadores", con distribución $N(\mu = 100, \sigma = 8)$.

Para estimar el porcentaje de trabajadores que necesitará una segunda revisión, debe calcularse:

$$P(X > 115) = P\left(Z > \frac{115 - 100}{8}\right) = P(Z > 1{,}875) = 1 - \Phi(1{,}875) = 1 - 0{,}9696 = 0{,}0304$$

Luego, se estima que alrededor del 3 % de los trabajadores necesitará una segunda revisión.

59. La edad de los trabajadores de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 44 años y desviación típica 8,2 años.

Si al 10 % de los trabajadores con más edad se les va a reducir la jornada laboral, ¿cuántos años tiene el menor trabajador afectado por esta medida?

Se considera la variable X: "edad de los trabajadores". Su distribución es $X \sim N(\mu = 44; \sigma = 8{,}2)$.

Sea a la edad del menor de los trabajadores afectados por la reducción de la jornada laboral, se tiene que $P(X > a) = 0{,}1$.

Entonces, buscando la función de distribución de X y tipificando:

$$1 - P(X < a) = 0{,}1 \Rightarrow P(X < a) = 0{,}9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-44}{8{,}2}\right) = 0{,}9$$

Y, de las tablas de la distribución normal estándar, se tiene que $\frac{a-44}{8{,}2} = 1{,}282 \Rightarrow a = 54{,}5$ años

60. El 70 % de los habitantes de una localidad se oponen a que en su municipio se construya un cementerio nuclear.

a) Si se escoge una muestra de 50 personas, calcula la esperanza y la desviación típica de la variable X: "número de personas que se oponen a la construcción del cementerio nuclear".

b) Si la muestra es de 100 personas, calcula la probabilidad de que más de 80 se opongan al proyecto.

a) Sea la variable aleatoria X: "número de personas, de las 50, que se opone a la construcción del cementerio nuclear". La variable aleatoria es $X \sim \text{Bin}(n = 50; p = 0{,}7)$, cuya esperanza y varianza son, respectivamente, $E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}7 = 35$ y $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 50 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 10{,}5$.

b) En este caso, la variable Y: "número de personas, de las 100, que se opone a la construcción del cementerio nuclear" tiene una distribución $Y \sim \text{Bin}(n = 100, p = 0{,}7)$.

Como $E[Y] = 100 \cdot 0{,}7 = 70$ y $\text{Var}(Y) = 100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 21$:

La distribución de Y se puede aproximar por una variable $T \sim N(\mu = 70; \sigma^2 = 21)$.

Entonces, aproximado por la normal y tipificando:

$$P(Y > 80) \simeq P(T > 80{,}5) = P\left(Z > \frac{80{,}5 - 70}{\sqrt{21}}\right) = P(Z > 2{,}29) = 1 - \Phi(2{,}29) = 1 - 0{,}9890 = 0{,}0109$$

61. Una fábrica de azúcar envasa el producto en paquetes de un kilo. En un control de calidad se han pesado, con una báscula de precisión, 100 paquetes y se ha obtenido que la media es 1000,8 g con una desviación típica de 16,18 g.

Suponiendo que la cantidad de azúcar envasada sigue una distribución normal, y que no son admisibles paquetes con menos de 980 g o más de 1020 g, calcula el porcentaje de paquetes que deben ser desechados.

Sea la variable aleatoria X: "cantidad envasada en cada paquete, en gramos". Su distribución es $N(\mu = 1000{,}8; \sigma = 16{,}18)$.

Se calcula la probabilidad de que un paquete elegido al azar sea aceptado; es decir, que su peso esté comprendido entre 980 y 1020 gramos:

$$P(980 < X < 1020) = P\left(\frac{980 - 1000{,}8}{16{,}18} < Z < \frac{1020 - 1000{,}8}{16{,}18}\right) = P(-1{,}29 < z < 1{,}19) =$$
$$= \Phi(1{,}19) - 1 + \Phi(1{,}29) = 0{,}8830 - 1 + 0{,}9015 = 0{,}7845$$

De manera que el 78,45 % de los paquetes serán aceptados y, por tanto 21,55 % serán desechados.

62. Antes de poner a la venta un nuevo fármaco, se realizan cuatro controles de calidad independientes. En cada control, si el fármaco es defectuoso se detecta en el 95 % de los casos. Calcula la probabilidad de que un fármaco en malas condiciones:

a) Sea detectado en uno solo de los cuatro controles.

b) Se detecte en al menos dos de los controles.

c) No sea puesto a la venta.

Se considera la variable *X*: "número de controles, de los 4, en los que se detecta que el fármaco está en malas condiciones". La distribución es $X \sim \text{Bin}(n=4; p=0{,}95)$. Las probabilidades se obtienen de la tabla de la $Y \sim \text{Bin}(n=4; p=0{,}05)$.

a) $P(X=1)=P(Y=3)=0{,}0005$

b) $P(X\geq 2)=P(Y\leq 2)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)=0{,}8145+0{,}1715+0{,}0135=0{,}9995$

c) El fármaco será puesto a la venta solo si en ninguno de los controles se detecta que está en malas condiciones. Esto es, si $X=0$. De esta manera:

$P(X=0)=P(Y=4)=0$

De modo que con este sistema de control, un fármaco en malas condiciones no será puesto a la venta.

63. Un tribunal debe calificar a los 700 aspirantes para cubrir 25 vacantes en un organismo oficial. Si las calificaciones son de 0 a 10 y su distribución es normal de media μ = 5,7 puntos y desviación típica σ = 1,5 puntos, se pide:

a) ¿Cuántos opositores han obtenido puntuación superior o igual a 5 puntos?

b) ¿Cuál es la nota de corte para ser seleccionado?

Sea la variable aleatoria *X*: "calificación de las pruebas". Se tiene que $X \sim N(\mu=5{,}7; \sigma=1{,}5)$. Entonces:

a) Se calcula la probabilidad de que un opositor elegido al azar obtenga calificación igual o superior a 5:

$$P(X\geq 5)=P\left(Z\geq \frac{5-5{,}7}{1{,}5}\right)=P(Z\geq -0{,}47)=\Phi(0{,}47)=0{,}6808$$

Esto es, el 68,08 % de los opositores ha obtenido puntuación superior o igual 5 y, por tanto, $700\cdot 0{,}6808=476{,}56$, es decir unos 477 opositores han obtenido nota superior o igual a 5.

b) Para obtener la nota de corte, que llamamos c, debe tenerse en cuenta que 675 opositores no obtendrán plaza, lo que supone el 96,43 % de los 700 aspirantes. Luego debe plantearse:

$$P(X<c)=0{,}9643 \Rightarrow P\left(Z<\frac{c-5{,}7}{1{,}5}\right)=0{,}9643 \Rightarrow \frac{c-5{,}7}{1{,}5}=1{,}802 \Rightarrow c=8{,}403$$

64. Si un dado equilibrado se lanza 600 veces, calcula la probabilidad de obtener:

a) Al menos 350 veces un número par.

b) Más de 120 veces un 6 (máxima puntuación).

a) Sea la variable X: "Número de veces, de las 600, que se obtiene número par". $X \sim \text{Bin}(n = 600; p = 0{,}5)$, que dado que n es suficientemente grande, se puede aproximar por $W \sim N(\mu = 300,\ \sigma^2 = 150)$, ya que:

$\mu = E[X] = 600 \cdot 0{,}5 = 300$ y $\sigma^2 = \text{Var}(X) = 600 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 150$

De forma que, aproximando por la normal y tipificando:

$$P(X \geq 350) \cong P(W \geq 349{,}5) = P\left(Z \geq \frac{349{,}5 - 300}{\sqrt{150}}\right) = P(Z \geq 4{,}04) = 1 - \Phi(4{,}04) = 1 - 1 = 0$$

b) Se considera Y: "Número de veces, de las 600, que se obtiene un 6". $Y \sim \text{Bin}\left(n = 600;\ p = \frac{1}{6}\right)$.

Cuya esperanza y varianza son $E[Y] = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ y $\text{Var}(Y) = 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{6} = 83{,}33$.

Luego, la distribución de la variable Y se puede aproximar por la de variable $V \sim N(\mu = 100; \sigma^2 = 83{,}33)$. Y, entonces:

$$P(Y > 120) \cong P(V \geq 120{,}5) = P\left(Z \geq \frac{120{,}5 - 100}{\sqrt{83{,}33}}\right) = P(Z \geq 2{,}25) = 1 - \Phi(2{,}25) = 1 - 0{,}9878 = 0{,}0122$$

65. La puntuación de un test homologado para determinar el cociente intelectual tiene una distribución normal de media μ = 110 puntos y desviación típica σ = 18. Si se elige una persona al azar para realizar el test, calcula:

a) La probabilidad de que obtenga una puntuación inferior a 100.

b) La probabilidad de que supere los 130 puntos si se sabe que en un test anterior superó los 115 puntos.

Sea X: "puntuación en el test" la variable aleatoria cuya distribución es $N(\mu = 110,\ \sigma = 18)$.

a) La probabilidad de que una persona elegida al azar no llegue a los 100 puntos es:

$$P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100 - 110}{18}\right) = P(Z < -0{,}56) = \Phi(-0{,}56) = 1 - \Phi(0{,}56) = 1 - 0{,}7123 = 0{,}2877$$

b) En este caso, se trata de calcular la probabilidad condicionada siguiente:

$$P(X > 130 \mid X > 115) = \frac{P(X > 130 \cap X > 115)}{P(X > 115)} = \frac{P(X > 130)}{P(X > 115)} = \frac{0{,}1335}{0{,}3897} = 0{,}3426$$

donde:

$$P(X > 130) = P\left(Z > \frac{130 - 110}{18}\right) = P(Z > 1{,}11) = 1 - \Phi(1{,}11) = 1 - 0{,}8665 = 0{,}1335$$

$$P(X > 115) = P\left(Z > \frac{115 - 110}{18}\right) = P(Z > 0{,}28) = 1 - \Phi(0{,}28) = 1 - 0{,}6103 = 0{,}3897$$

66. Según los datos del organismo correspondiente, el 80 % de los incendios que se producen en la época de calor son provocados. Si este verano se han producido 150 incendios en una determinada región, calcula la probabilidad de que:

a) Más de 100 hayan sido provocados.

b) Como mucho 30 hayan sido accidentales.

c) El número de incendios provocados supere el 80 % del total de incendios.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de incendios provocados, de los 150 producidos". *X* sigue una distribución binomial $\text{Bin}(n = 150,\ p = 0{,}8)$.

La esperanza y la varianza de *X* son $E[X] = 150 \cdot 0{,}8 = 120$ y $\sigma^2 = \text{Var}(X) = 150 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 24$ que se puede aproximar por la distribución de una variable $Y \sim N(\mu = 120; \sigma^2 = 24)$. Entonces:

a) La probabilidad de que más de 100 incendios sea provocados es:

$$P(X > 100) \cong P(Y \geq 100{,}5) = P\left(Z \geq \frac{100{,}5 - 120}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \geq -3{,}98) = \Phi(3{,}98) = 1$$

b) Que como mucho 30 sean accidentales equivale a que al menos 120 sean intencionados.

$$P(X \geq 120) \cong P(Y \geq 119{,}5) = P\left(Z \geq \frac{119{,}5 - 120}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \geq -0{,}10) = \Phi(0{,}10) = 0{,}5398$$

c) En este caso se pide que el número de incendios provocados supere el 80 % del total de incendios, es decir, supero los 120 incendios.

$$P(X > 120) \cong P(Y \geq 120{,}5) = P\left(Z \geq \frac{120{,}5 - 120}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \geq 0{,}1) = 1 - \Phi(0{,}1) = 1 - 0{,}5398 = 0{,}4602$$

67. En un centro educativo, a pesar de los controles rigurosos, un 12 % de los ordenadores resulta infectado por algún tipo de virus informático.

a) Si en un aula hay 10 ordenadores, calcula la probabilidad de que más de un ordenador tenga virus.

b) Si se quiere que la probabilidad de que haya, como máximo, dos ordenadores infectados sea al menos 0,7 ¿cuál tiene que ser el número máximo de ordenadores en el aula?

c) Si en todo el centro el número de ordenadores es 150, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos el 10 % de ellos tenga virus?

a) Sea *X*: "número de ordenadores infectados, de los 10". La variable $X \sim \text{Bin}(n=10; p=0{,}12)$, entonces:

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right)=1-(0{,}2785+0{,}3798)=0{,}3417$$

donde:

$$P(X=0)=0{,}88^{10}=0{,}2785 \text{ y } P(X=1)=\binom{10}{1}0{,}12\cdot 0{,}88^{9}=0{,}3798$$

b) En este caso, se trata de calcular el mayor valor de *n*, en la distribución binomial para que $P(X\le 2)\ge 0{,}7$

Para ello se necesitan las probabilidades:

$$P(X=0)=0{,}88^{n},\ P(X=1)=n\cdot 0{,}12\cdot 0{,}88^{n-1} \text{ y } P(X=2)=\frac{n(n-1)}{2}0{,}12^{2}0{,}88^{n-2}$$

De modo que $P(X\le 2)=0{,}88^{n}+n\cdot 0{,}12\cdot 0{,}88^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2}0{,}12^{2}\cdot 0{,}88^{n-2}$

Se construye la tabla siguiente, con las probabilidades necesarias para obtener $P(X\le 2)$:

n	*P*(*X* = 0)	*P*(*X* = 1)	*P*(*X* = 2)	$P(X\le 2)$
14	0,16702	0,31885	0,28262	0,76848
15	0,14697	0,30063	0,28696	0,73457
16	0,12934	0,28219	0,28860	0,70013
17	0,11382	0,26385	0,28783	0,66550
18	0,10016	0,24584	0,28496	0,63096

Es decir, como máximo debe haber 16 ordenadores en el aula.

c) Ahora la variable *Y*: "número de ordenadores infectados, de los 150" es $Y \sim \text{Bin}(n=150; p=0{,}12)$.

La esperanza y la varianza de *Y* son $E[Y]=150\cdot 0{,}12=18$ y $\text{Var}(X)=150\cdot 0{,}12\cdot 0{,}88=15{,}84$.

De modo que la distribución de *Y* se puede aproximar por la de la variable $T \sim N(\mu=18; \sigma^{2}=15{,}84)$. Entonces, como el 10 % de 150 es 15, se tiene que:

$$P(Y\ge 15)\cong P(T\ge 14{,}5)=P\left(Z\ge \frac{14{,}5-18}{\sqrt{15{,}84}}\right)=P(Z\ge -0{,}88)=\Phi(0{,}88)=0{,}8106$$

68. Un sistema eléctrico está formado por 6 componentes independientes. La probabilidad de que falle uno cualquiera de los componentes es 0,15. Calcula la probabilidad de que:

a) Fallen al menos dos componentes.

b) Fallen al menos dos componentes si se sabe que ya ha fallado al menos uno.

c) Ningún componente falle.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de componentes que fallan de las 6".

La distribución de *X* es $\text{Bin}(n = 6; p = 0{,}15)$. Las probabilidades pueden obtenerse de la tabla de la binomial:

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0{,}3771 + 0{,}3993) = 0{,}2236$

b) En este caso se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{0{,}2236}{0{,}6229} = 0{,}3590$$

donde $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}3771 = 0{,}6229$

c) En este caso $P(X = 0) = 0{,}3771$

69. El tiempo que dura el proceso de montaje final de un artículo es una variable aleatoria con distribución normal *N*(μ, σ). Si el 30 % de los artículos se monta en menos de 2 horas y en el 5 % se tarda más de 2 horas y media, calcula:

a) La media y la varianza de la distribución.

b) El porcentaje de artículos que se monta en menos de una hora y media.

Sea la variable aleatoria *X*: "duración del proceso del montaje del artículo, en horas". Se tiene que $X \sim N(\mu, \sigma)$, ambos parámetros desconocidos.

Se sabe que $P(X < 2) = 0{,}3$ y $P(X > 2{,}5) = 0{,}05$.

a) Tipificando la variable y aproximando con las tablas de la $N(0,1)$, se tiene:

$$P(X < 2) = 0{,}3 \Rightarrow P\left(Z < \frac{2 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}3 \Rightarrow \frac{2 - \mu}{\sigma} = -0{,}525$$

$$P(X > 2{,}5) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{2{,}5 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}05 \Rightarrow \frac{2{,}5 - \mu}{\sigma} = 1{,}645$$

Que conduce a resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} \mu - 0{,}525\sigma = 2 \\ \mu + 1{,}645\sigma = 2{,}5 \end{cases}$$

Cuya solución es $\mu = 2{,}121$ y $\sigma = 0{,}2304$.

b) La probabilidad de que un artículo elegido al azar se monte en menos de una hora y media es:

$$P(X < 1{,}5) = P\left(Z < \frac{1{,}5 - 2{,}121}{0{,}2304}\right) = P(Z < -2{,}6953) = 1 - \Phi(2{,}7) = 1 - 0{,}9965 = 0{,}0035$$

Luego el porcentaje estimado de artículos que se monta en menos de una hora y media es del 0,35 %.

70. En la segunda vuelta de las elecciones presidenciales, el candidato *A* obtuvo el 52 % de los votos emitidos. El resto votó a otro candidato o lo hizo en blanco. Si de la población que ha participado en la votación se eligen al azar 2000 personas, calcula la probabilidad de que entre estos:

a) Más del 60 % haya votado al candidato *A*.

b) Menos de la mitad haya votado al candidato *A*.

c) Más del 60 % haya votado al candidato *A* si se sabe que por lo menos la mitad le votó.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de personas, de las 2000, que han votado al candidato A". La distribución de *X* es $\text{Bin}(n = 2000; p = 0{,}52)$.

La esperanza y la varianza de *X* son $E[X] = 2000 \cdot 0{,}52 = 1040$ y $\sigma^2 = 2000 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}48 = 499{,}2$.

De modo que, dado el elevado tamaño de la muestra, la distribución de *X* puede aproximarse por la distribución de la variable $W \sim N(\mu = 1040; \sigma^2 = 499{,}2)$.

a) $P(X > 1200) \cong P(W \geq 1200{,}5) = P\left(Z \geq \dfrac{1200{,}5 - 1040}{\sqrt{499{,}2}}\right) = P(Z \geq 7{,}18) = 1 - \Phi(7{,}18) = 1 - 1 = 0$

b) $P(X < 1000) \cong P(W < 999{,}5) = P\left(Z < \dfrac{999{,}5 - 1040}{\sqrt{499{,}2}}\right) = P(Z < -1{,}81) = 1 - \Phi(1{,}81) = 1 - 0{,}9649 = 0{,}0351$

c) La probabilidad de que al menos la mitad de las 2000 personas haya votado al candidato *A* es:

$$P(X > 1200 \mid X \geq 1000) = \frac{P(X > 1200)}{P(X \geq 1000)} = \frac{0}{0{,}9649} = 0$$

donde $P(X \geq 1000) = 1 - P(X < 1000) = 1 - 0{,}0351 = 0{,}9649$

71. La producción de trigo por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución *N*(μ, σ). Los datos históricos indican que solo en el 10 % de los años la producción supera los 4000 kg/ha, mientras que en el 60 % de los años queda por debajo de los 3200 kg/ha.

a) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

b) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 3500 kg/ha en un año elegido al azar.

Se considera la variable aleatoria *X*: "producción de trigo por hectárea" en la comarca. La variable *X* sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

Se sabe que $P(X > 4000) = 0{,}1$ y que $P(X < 3200) = 0{,}6$.

a) Con la información disponible se tiene que:

$$P(X > 4000) = 0{,}1 \Rightarrow P\left(Z > \frac{4000 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{4000 - \mu}{\sigma} = 1{,}281$$

$$P(X < 3200) = 0{,}6 \Rightarrow P\left(Z < \frac{3200 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}6 \Rightarrow \frac{3200 - \mu}{\sigma} = 0{,}253$$

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas queda:

$$\begin{cases} \mu + 1{,}281\sigma = 4000 \\ \mu + 0{,}253\sigma = 3200 \end{cases}$$

Cuya solución es $\mu = 3003{,}11$ y $\sigma = 778{,}21$ kilogramos por hectárea.

b) Con los parámetros calculados en el apartado a, se tiene que:

$$P(X > 3500) = P\left(Z > \frac{3500 - 3003{,}11}{778{,}21}\right) = P(Z > 0{,}64) = 1 - \Phi(0{,}64) = 1 - 0{,}7389 = 0{,}2611$$

72. Una empresa fabrica minas de grafito para portaminas cuya longitud sigue una distribución *N*(μ = 30, σ = 0,5) en milímetros. Solo se aceptan las minas si su largo está entre 29 y 31 mm. Si un control de calidad selecciona al azar 1000 minas, calcula la probabilidad de que sean aceptadas más de 950 minas.

La variable aleatoria *X*: "longitud de las minas de grafito" tiene una distribución $N(\mu = 30; \sigma = 0{,}5)$, en mm.

Elegida al azar una mina de grafito, la probabilidad de que sea aceptada es:

$$P(29 \le X \le 31) = P\left(\frac{29-30}{0{,}5} \le Z \le \frac{31-30}{0{,}5}\right) = P(-2 \le Z \le 2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

Considera, ahora, la variable *Y*: "número de minas, de las 1000, que son aceptadas". La variable *Y* tiene una distribución $\text{Bin}(n = 1000; p = 0{,}9544)$, y, dado el tamaño de la muestra, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, aunque el valor de la *p* sea grande.

La variable $T \sim N(\mu = 1000 \cdot 0{,}9544 = 954{,}4; \sigma^2 = 1000 \cdot 0{,}9544 \cdot 0{,}0456 = 43{,}52)$. Entonces:

$$P(Y > 950) \cong P(T \ge 950{,}5) = P\left(Z \ge \frac{950{,}5 - 954{,}4}{\sqrt{43{,}52}}\right) = P(Z \ge -0{,}59) = \Phi(0{,}59) = 0{,}7224$$

PARA PROFUNDIZAR

73. En España la distribución de la población según su grupo sanguíneo se recoge en la tabla:

Tipo	Rh +	Rh -
O	36 %	9 %
A	34 %	8 %
B	8 %	2 %
AB	2,5 %	0,5 %

El grupo A- solo puede recibir sangre de personas con los grupos O- y A-, mientras que puede ser donante a personas de los grupos AB+, AB-, A+ y A-.

Un enfermo con el grupo sanguíneo A- precisa sangre para transfusión.

a) En el hospital se presentan 10 voluntarios aleatorios. Calcula la probabilidad de que al menos uno de los donantes sea compatible con el enfermo.

b) ¿Y si se presentan 50 voluntarios?

La probabilidad de que un donante elegido al azar, entre todos los posibles donantes, sea compatible para donar sangre al enfermo con grupo A- es $P(O-) + P(A-) = 0{,}09 + 0{,}08 = 0{,}17$.

a) Si se presentan 10 voluntarios (elegidos al azar), sea la variable aleatoria *X*: "número de personas, entre las 10, que pueden donar sangre al enfermo". La variable $X \sim \text{Bin}(n = 10; p = 0{,}17)$, luego:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}1552 = 0{,}8448$$

Donde $P(X = 0) = 0{,}83^{10} = 0{,}1552$

b) En el caso de presentarse 50 voluntarios (al azar), se considera la variable *Y*: "número de personas, de las 50, que pueden donar sangre al enfermo". La variable $Y \sim \text{Bin}(n = 50; p = 0{,}17)$.

Para calcular la probabilidad $P(Y \ge 1)$ se puede proceder de dos formas:

1.ª Forma. Directamente con la binomial:

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}00005993 = 0{,}99994007$$

Donde $P(Y = 0) = 0{,}83^{50} = 0{,}00005993$

2.ª Forma. Aproximando por una normal $T \sim N(\mu = 50 \cdot 0{,}17 = 8{,}5; \sigma^2 = 50 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83 = 7{,}055)$

$$P(Y \ge 1) \cong P(T \ge 0{,}5) = P\left(Z \ge \frac{0{,}5 - 8{,}5}{\sqrt{7{,}055}}\right) = P(Z \ge -3{,}01) = \Phi(3{,}01) = 0{,}9987$$

74. En una población el nivel de colesterol total en sangre sigue una distribución normal de media μ = 180 mg/dL y varianza $\sigma^2 = 225$. Se considera que los valores del nivel de colesterol mayores de 200 mg/dL son perjudiciales para la salud y que deben corregirse mediante un tratamiento.

a) Elegidas 200 personas al azar, ¿cuál es el número esperado de ellas que necesitarán tratamiento?

b) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su nivel de colesterol sea inferior a 170 mg/dL, si se sabe que no precisa tratamiento?

c) Si la varianza se mantiene en su actual valor, calcula qué valor medio debe tener el nivel de colesterol para que solo el 5 % de la población deba seguir tratamiento médico.

Sea la variable *X*: "nivel de colesterol en sangre", cuya distribución es $N\left(\mu = 180; \sigma^2 = 225\right)$.

a) La probabilidad de que una persona elegida al azar en esta población deba ponerse en tratamiento es:

$$P(X > 200) = P\left(Z > \frac{200 - 180}{\sqrt{225}}\right) = P(Z > 1{,}33) = 1 - \Phi(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

Se considera la variable *Y*: "número de personas, de las 200, que deben iniciar tratamiento", que tiene una distribución $\text{Bin}(n = 200; p = 0{,}0918)$. Entonces:

El número esperado de las 200 personas que deben ponerse en tratamiento es $E[Y] = 200 \cdot 0{,}0918 = 18{,}36$

Aproximadamente 18 personas deben ponerse en tratamiento médico.

b) $P(X < 170 \mid X < 200) = \dfrac{P(X < 170)}{P(X < 200)} = \dfrac{0{,}2514}{0{,}9082} = 0{,}2768$

$$P(X < 170) = P\left(Z < \frac{170 - 180}{15}\right) = P(Z < -0{,}67) = 1 - \Phi(0{,}67) = 0{,}2514$$

c) Si la varianza sigue siendo $\sigma^2 = 225$; y el límite para iniciar tratamiento es de 200 mg/dL, el nivel medio de colesterol μ de la población debería ser:

$$P\left(Z > \frac{200 - \mu}{\sqrt{225}}\right) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{200 - \mu}{\sqrt{225}}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{200 - \mu}{\sqrt{225}} = 1{,}645 \Rightarrow \mu = 175{,}325 \text{ mg/dL}$$

75. En una central de producción lechera se sospecha que la máquina envasadora de las botellas de 1,2 L se ha desconfigurado y, por ese motivo, se lleva a cabo un control de calidad en el que se comprueba que la cantidad media de las botellas analizadas es de 1180 mL, con una desviación típica de 8 mL.

Las especificaciones de calidad señalan que solo serán admitidas para la venta botellas que contengan entre 1185mL y 1215 mL.

a) Calcula el porcentaje de botellas no admisibles que está produciendo la máquina envasadora.

b) Si la máquina envasadora se ajusta a una media de 1200 mL y se mantiene la desviación típica en 8 mL, ¿cuál es el porcentaje de botellas listas para su distribución?

c) Si la media se ajusta a 1200 mL, ¿cuál debería ser la desviación típica para que el 98 % de las botellas fuera admisible?

La variable aleatoria *X*: "volumen de llenado de las botellas de 1,2 litros" tiene una distribución de $N(\mu = 1180; \sigma = 8)$.

a) La probabilidad de que una botella elegida al azar sea admisible es:

$$P(1185 < X < 1215) = P\left(\frac{1185-1180}{8} < Z < \frac{1215-1180}{8}\right) = P(0,63 < Z < 4,38) =$$
$$= \Phi(4,38) - \Phi(0,63) = 1 - 0,7357 = 0,2643$$

De modo que la probabilidad de que una botella elegida al azar no sea admisible es 0,7357. Es decir, el 73,57 % de las botellas no es admisible y, en consecuencia se confirma la sospecha de que la máquina envasadora se ha desconfigurado.

b) Ahora, la distribución de *X* es $N(\mu = 1200; \sigma = 8)$, de manera que la probabilidad de que una botella elegida al azar sea admisible es:

$$P(1185 < X < 1215) = P\left(\frac{1185-1200}{8} < Z < \frac{1215-1200}{8}\right) = P(-1,88 < Z < 1,88) =$$
$$= 2\Phi(1,88) - 1 = 2 \cdot 0,9699 - 1 = 0,9399$$

Y, en consecuencia, el 94 % de las botellas es admisible para su distribución.

c) En este caso, la distribución de *X* es $N(\mu = 1200; \sigma)$, con σ desconocida y para que una botella elegida al azar sea admisible con probabilidad 0,98 debe ser:

$$P(1185 < X < 1215) = P\left(\frac{1185-1200}{\sigma} < Z < \frac{1215-1200}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-15}{\sigma} < Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - 1 = 0,98$$

Luego $\Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) = \frac{1,98}{2} = 0,99 \Rightarrow \frac{15}{\sigma} = 2,33 \Rightarrow \sigma = 6,44$

Es decir, una vez reconfigurada la máquina de envasar, para incrementar el porcentaje de botellas con nivel admisible es necesario reducir la variabilidad del proceso de embotellado.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Si *X* es una variable aleatoria de media 15 y varianza 3,75 con una distribución $\text{Bin}(n,p)$, calcula los valores de *n* y *p*.

La media y la varianza de la distribución binomial son, respectivamente, $E[X] = 15$ y $\text{Var}(X) = 3,75$.

Entonces, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} n \cdot p = 15 \\ n \cdot p \cdot (1-p) = 3,75 \end{cases} \Rightarrow 15(1-p) = 3,75 \Rightarrow p = 0,75$$

De la primera ecuación se tiene que $n \cdot 0,75 = 15 \Rightarrow n = 20$.

2. En una comunidad de vecinos, el 60 % de las veces que un vecino llega a su portal no encuentra el ascensor en la planta baja. Si se eligen 7 vecinos al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente 2 encuentren el ascensor en la planta baja.

b) Por lo menos 3 encuentren el ascensor en la planta baja.

Sea la variable aleatoria X: "número de vecinos, de los 7 elegidos, que se encuentra el ascensor en la planta baja". La distribución de X es $\text{Bin}(n = 7; p = 0,4)$. Las probabilidades se pueden calcular o buscar directamente en la tabla de la binomial.

a) La probabilidad de que exactamente 2 vecinos encuentre el ascensor es:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 \cdot 0,6^5 = 0,2613$$

b) La probabilidad de que por lo menos 3 encuentren el ascensor es:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0,0280 - 0,1306 - 0,2613 = 0,5801$$

Donde $P(X = 2)$ se ha calculado en el apartado a y $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ vienen dados por:

$$P(X = 0) = 0,6^7 = 0,0280 \text{ , } P(X = 1) = \binom{7}{1} 0,4 \cdot 0,6^6 = 0,1306$$

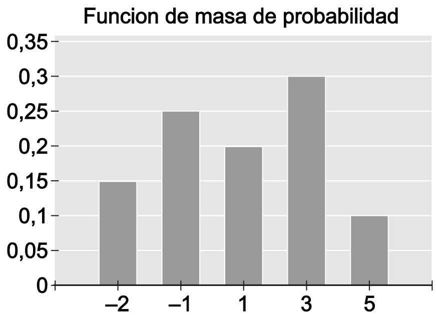
3. Una variable aleatoria X toma los valores −2, −1, 1, 3 y 5 con probabilidades respectivas 0,15; 0,25; 0,2; 0,3 y 0,1.

a) Representa gráficamente la distribución de probabilidad.

b) Calcula la esperanza y la varianza de X.

c) Halla $P(-1 \leq X < 4)$.

a) El diagrama de barras que representa la función de masa de probabilidad es:



b) La esperanza de X es $E[X] = -2 \cdot 0,15 - 1 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,1 = 1,05$.

Para la obtener la varianza se debe calcular antes:

$$E[X^2] = (-2)^2 \cdot 0,15 + (-1)^2 \cdot 0,25 + 1^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,1 = 6,25$$

La varianza es $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 6,25 - 1,1025 = 5,1475$

c) $P(-1 \leq X < 4) = \text{P}(X = -1) + P(X = 1) + P(X = 3) = 0,25 + 0,2 + 0,3 = 0,75$

4. Sea *X* una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} k(x+1) & \text{si} \quad 0\le x\le 4 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Calcula el valor de k y dibuja la gráfica de $f(x)$.

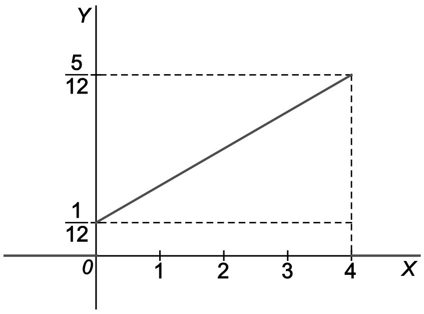
b) Calcula la esperanza y la varianza de X.

c) Halla la probabilidad de que la variable tome un valor superior a 2 sabiendo que ha tomado un valor comprendido entre 1 y 3.

a) Para calcular k se procede imponiendo que el área de la región limitada por la curva, el eje OX y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 4$ sea 1. Es decir:

$$1=\int_0^4 k(x+1)dx = k\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^4 = k(8+4)=12k \Rightarrow k=\frac{1}{12}$$

Y su gráfica:



b) La esperanza de X se obtiene de la siguiente manera:

$$E[X]=\int_0^4 \frac{1}{12}x(x+1)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{22}{9}$$

Para calcular la varianza se calcula primero $E[X^2]$:

$$E[X^2]=\int_0^4 \frac{1}{12}x^2(x+1)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{64}{9}$$

La varianza de X es $\text{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=\frac{64}{9}-\left(\frac{22}{9}\right)^2=\frac{92}{81}$.

c) $$P(2<X<3)=\int_2^3 \frac{1}{12}(x+1)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_2^3=\frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}-0\right]=\frac{1}{8}$$

$$P(1<X<3)=\int_1^3 \frac{1}{12}(x+1)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$$P(X>2\,|\,1<X<3)=\frac{P(2<X<3)}{P(1<X<3)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{4}$$

5. La duración media de una determinada marca de electrodomésticos es de 10 años con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración sigue una distribución normal, calcula la probabilidad de que uno de tales electrodomésticos elegido al azar dure:

a) Más de 9 años.

b) Entre 9 y 11 años.

La variable aleatoria *X*: "vida de un electrodoméstico en años" tiene una distribución normal $N(\mu = 10; \sigma = 0{,}7)$.

a) $P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-10}{0{,}7}\right) = P(Z > -1{,}43) = \Phi(1{,}43) = 0{,}9236$

b) $P(9 \le X \le 11) = P\left(\frac{9-10}{0{,}7} \le Z \le \frac{11-10}{0{,}7}\right) = P(-1{,}43 \le Z \le 1{,}43) = 2\Phi(1{,}43) - 1 = 2 \cdot 0{,}9236 - 1 = 0{,}8472$

6. Las calificaciones obtenidas por los estudiantes para acceder a una facultad siguen una distribución $N(\mu = 9{,}8; \sigma = 1{,}5)$. Si la nota de corte se estableció en 11,5, ¿cuál es el porcentaje de estudiantes que no pudo acceder a la facultad ese año?

La variable aleatoria *X*: "calificaciones de los estudiantes" tiene una distribución $N(\mu = 9{,}8, \sigma = 1{,}5)$.

Si la nota de corte quedó en 11,5, entonces la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya superado el corte es:

$$P(X < 11{,}5) = P\left(Z < \frac{11{,}5 - 9{,}8}{1{,}5}\right) = P(Z < 1{,}13) = 0{,}8708$$

Esto es, el 87,08 % de los estudiantes presentados no superó el corte establecido.

7. En una población la estatura de los bebés al nacer sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. El 5 % de los bebés mide más de 52 cm al nacer y el 80 % mide menos de 48 cm.

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) Halla la probabilidad de que la estatura de un recién nacido esté comprendida entre 49,5 cm y 51 cm.

La variable *X*: "estatura de los bebés al nacer" tiene una distribución $N(\mu, \sigma)$, ambos parámetros desconocidos.

a) Las condiciones se plantean en forma de ecuaciones, de la siguiente manera.

El 5 % de los bebés mide más de 52 cm al nacer, se traduce en que:

$$P(X > 52) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{52-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{52-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{52-\mu}{\sigma} = 1{,}645$$

El 80 % de los bebés mide menos de 48 cm al nacer, significa que:

$$P(X < 48) = 0{,}8 \Rightarrow P\left(Z < \frac{48-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \frac{48-\mu}{\sigma} = 0{,}841$$

De forma que, para calcular los valores de μ y σ se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mu + 1{,}645\sigma = 52 \\ \mu + 0{,}841\sigma = 48 \end{cases}$$

Cuya solución es $\mu = 43{,}82$ y $\sigma = 4{,}975$.

b) Para calcular esta probabilidad, es suficiente con tener en cuenta que $X \sim N(\mu = 43{,}82; \sigma = 4{,}975)$. Entonces:

$$P(49{,}5 < X < 51) = P\left(\frac{49{,}5 - 43{,}82}{4{,}975} < Z < \frac{51 - 43{,}82}{4{,}975}\right) = P(1{,}14 < Z < 1{,}44) =$$
$$= \Phi(1{,}44) - \Phi(1{,}14) = 0{,}9251 - 0{,}8729 = 0{,}0522$$

8. En las últimas elecciones al consejo escolar del centro, Juan obtuvo un 35 % de los votos. Si se eligen 50 alumnos al azar, calcula la probabilidad de que hayan votado a Juan:

a) Más de 20 alumnos de los 50.

b) Entre 25 y 40 alumnos.

La variable X: "número de alumnos, de los 50, que ha votado a Juan" tiene distribución $\text{Bin}(n = 50; p = 0{,}35)$.

La esperanza y la varianza de X son $E[X] = 50 \cdot 0{,}35 = 17{,}5$ y $\text{Var}(X) = 50 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 11{,}375$

Para los cálculos se dan las condiciones para que se pueda aproximar la distribución de X por la de una variable Y con distribución $N(\mu = 17{,}5; \sigma^2 = 11{,}375)$. Entonces:

a) $P(X > 20) \cong P(Y \geq 20{,}5) = P\left(Z \geq \dfrac{20{,}5 - 17{,}5}{\sqrt{11{,}375}}\right) = P(Z \geq 0{,}89) = 1 - \Phi(0{,}89) = 1 - 0{,}8133 = 0{,}1867$

b) $P(25 \leq X \leq 40) \cong P(24{,}5 \leq Y \leq 40{,}5) = P\left(\dfrac{24{,}5 - 17{,}5}{\sqrt{11{,}375}} \leq Z \leq \dfrac{40{,}5 - 17{,}5}{\sqrt{11{,}375}}\right) = P(2{,}08 \leq Z \leq 6{,}82) =$

$= \Phi(6{,}82) - \Phi(2{,}08) = 1 - 0{,}9812 = 0{,}0188$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La variable aleatoria discreta *X* toma los valores 2, 4, 6 y 8 con probabilidades respectivas *c*, *c* + 1, *c* + 2 y $c + 3$. El valor de *c* es:

A. 4 **B.** 1,25 **C.** −1,25 **D.** No existe valor para *c*.

Si todas las probabilidades son mayores o iguales a cero deben sumar 1, pero si *c* fuese cualquier positivo o cero la suma sería mayor que 1. Luego la respuesta correcta es la D.

2. La variable aleatoria *Y* tiene una distribución de probabilidad $\text{Bin}(n, p = 0{,}4)$ y se sabe que su varianza es 2,88. Entonces:

A. $n = 10$ **B.** $n = 12$ **C.** $n = 28$ **D.** $n = 29$

La varianza es $\sigma^2 = \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$. Entonces $2{,}88 = n \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}4) \Rightarrow n = \dfrac{2{,}88}{0{,}24} = 12$

Luego la respuesta correcta es la B.

3. Si *X* sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ se encuentra aproximadamente:

A. El 90 % de los valores de *X*.

B. El 65 % de los valores de *X*.

C. El 68 % de los valores de *X*.

D. Depende de los valores de σ.

Si X es una variable aleatoria que tiene distribución $N(\mu, \sigma)$, la probabilidad del intervalo $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ con $k > 0$ solo depende del valor de k.

Como $k = 1$ entonces $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = 06826$. Por tanto la respuesta correcta es la C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Fijado *n*, la variabilidad de *X*:

A. Es más grande si *p* está próximo a 1.

B. Es más grande si *p* está próximo a 0.

C. Es máxima si *p* = 0,5.

D. No está influida por el valor de *p*.

La respuesta correcta es la C.

5. El porcentaje de observaciones que queda fuera del intervalo (0, 24) si una variable tiene una distribución normal $X \sim N(\mu = 12, \sigma = 3)$ es aproximadamente:

A. 25 %

B. 75 %

C. 0 %

D. 50 %

$$P(0 < X < 24) = P\left(\frac{0-12}{3} < Z < \frac{24-12}{3}\right) = P(-4 < Z < 4) = P(Z < 4) - P(Z < -4) = 1 - 0 = 1$$

Por tanto, la respuesta correcta es la C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$ e $Y \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1-p)$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. "La distribución de la variable *Y* aproxima la de la variable *X*"

2. "En la distribución de *X*, *n* es grande y *p* no es muy pequeño".

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son independientes una de otra.

Por la teoría vista en el tema la respuesta correcta es la A.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Para calcular la probabilidad $P(-1 < X < 2)$ siendo $X \sim N(\mu, \sigma)$ es necesario conocer:

A. Solo μ.

B. Solo σ.

C. Tanto μ como σ.

D. No hace falta conocer ningún dato.

Para transformar una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$ en una variable aleatoria con distribución estándar $Z \sim N(0,1)$ se tipifica. Para ello se utiliza la siguiente expresión:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Por tanto, la respuesta correcta es la C.