2 Gravitación universal

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 62)

1. ¿Qué atrae con más fuerza a qué: la Tierra a la Luna o la Luna a la Tierra? ¿Y en el caso de una piedra y la Tierra?

Se atraen con la misma fuerza en magnitud pero sentidos opuestos.

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones te parecen correctas?

a) **Un cuerpo más pesado siempre caerá más deprisa que otro más ligero.**

b) **La Tierra atrae a todos los cuerpos en su superficie con la misma fuerza.**

a) Falso. Caen con la misma aceleración siempre que despreciemos el rozamiento de los cuerpos con el aire.

b) Falso. La Tierra atrae a todos los cuerpos que se encuentran en la superficie con la misma aceleración pero distinta fuerza.

3. Imagina que te encuentras dentro de una nave espacial sin referencias visuales con respecto al exterior. ¿Podrías discernir de alguna manera si en un momento dado te hallas en órbita alrededor de la Tierra o, estás precipitándote hacia ella?

Si estás en ingravidez es cuándo estás en órbita, lo puedes comprobar si sueltas un objeto y observas que se mueve a la velocidad de la nave.

4. ¿A qué se deben las mareas? ¿Cuántas se producen en un día? ¿Qué son las mareas vivas? ¿Y las muertas?

Las mareas se deben fundamentalmente a la acción de la Luna sobre la Tierra. Se producen dos mareas altas y dos mareas bajas.

Las mareas vivas se deben a la influencia de la Luna y del Sol sobre la Tierra. Cuando los dos efectos se suman dan lugar a las mareas de flujo máximas.

Al igual que las mareas vivas, las mareas muertas también se deben a la influencia de la Luna y el Sol sobre la Tierra. Sin embargo, al contrario de las mareas vivas, cuando ambas contribuciones se contrarrestan dan lugar a las mareas muertas.

Actividades (páginas 63/77)

1 Supongamos que el movimiento de la Luna se compone de otros dos: uno de ellos de avance y el otro de caída hacia la Tierra, regido este último por las ecuaciones de caída libre. Con los datos que se ofrecen, y siguiendo las sugerencias de la figura 2.2, contesta a las siguientes preguntas.

a) **¿Qué ángulo se ha desplazado la Luna en 1 hora?**

b) **¿Qué altura h ha «caído» la Luna en esa hora?**

c) **¿Qué valor de aceleración g_L de caída corresponde a esa distancia y ese tiempo?**

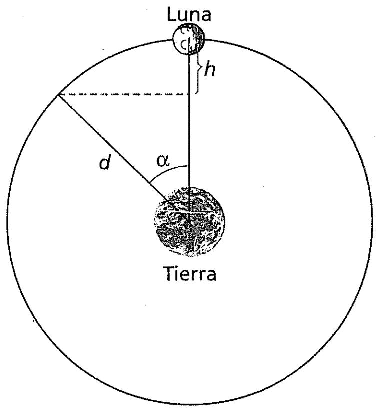
d) **¿Cuántas veces es menor ese valor que el valor $g_T = 9{,}8$ m/s^2, que corresponde a la superficie terrestre?**

e) **¿Cuántas veces es mayor la distancia Tierra-Luna que el radio terrestre?**

f) **¿Qué relación puedes encontrar entre la variación de la aceleración y la de la distancia?**

Datos: radio terrestre = 6 370 km; distancia Tierra-Luna = 384 000 km; período sidéreo lunar = 27,31 días

La situación descrita en el enunciado es la siguiente:



a) El período sidéreo lunar, expresado en horas, es de 655,44 h. En este tiempo, la Luna ha descrito 360°, por lo que, en 1 hora, el ángulo α es de:

$$\alpha = \frac{360°}{655{,}44} = 0{,}549°$$

b) La altura h (véase la figura 2.2) que la Luna ha «caído» en esa hora es:

$$h = d - d\cos\alpha = d\,(1 - \cos\alpha) = 17\,627{,}75 \text{ m}$$

c) El valor de aceleración de caída que se correspondería con esa distancia en 1 h (3 600 s) se obtendría de la siguiente manera:

$$h = \frac{1}{2} g_L t^2 \Rightarrow g_L = \frac{2h}{t^2} = 0{,}0027 \text{ m/s}^2$$

d) Dividiendo el valor de g_T en la superficie terrestre entre g_L, se obtiene:

$$\frac{g_T}{g_L} \cong 3\,600$$

e) Al dividir ambas distancias, resulta:

$$\frac{d}{r_T} \cong 60$$

f) Queda claro que, al aumentar la distancia 60 veces, la aceleración gravitatoria ha disminuido 3 600 veces, es decir, 60^2 veces. Así pues:

$$g \propto \frac{1}{r^2}$$

2 PAU Determina el valor de «la fuerza requerida para mantener a la Luna en su órbita» (en palabras de Newton) haciendo uso de los datos de masas de la Tierra y de la Luna, así como de la distancia entre ambos. ¿Qué aceleración comunica dicha fuerza a cada uno de los cuerpos celestes?

La fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna es:

$$F = G\frac{m_T m_L}{d_{T\text{-}L}^2}$$

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = $$

$$= 1{,}95 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Dicha fuerza comunica a la Tierra una aceleración de valor:

$$a_T = \frac{F}{m_T} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{20}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} = 3{,}34 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Y a la Luna:

$$a_L = \frac{F}{m_L} = \frac{1{,}95 \cdot 10^{20}}{7{,}34 \cdot 10^{22}} = 2{,}71 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

3 **¿Qué le sucede al peso de un objeto si su masa se triplica a la vez que también se triplica su distancia al centro terrestre?**

La expresión de la fuerza gravitatoria es:

$$F = G\frac{M_{\text{Tierra}}m}{r^2}$$

Si se triplica tanto la masa m como la distancia r al centro de la Tierra, resulta:

$$F' = G\frac{M_{\text{Tierra}}3m}{9r^2}$$

Operando queda:

$$F' = \frac{1}{3}\,G\frac{M_{\text{Tierra}}m}{r^2} = \frac{1}{3}\,F$$

Luego la fuerza queda dividida por tres.

4 **PAU** **Dos esferas idénticas de radio r y densidad ρ están en contacto. Expresa la fuerza de atracción gravitatoria entre ambas como función de r, ρ y G.**

Teniendo en cuenta que $m = \rho V = \rho \cdot 4/3\ \pi r^3$ y que la distancia entre los centros de las esferas es 2r, entonces:

$$F = G\frac{mm}{(2r)^2} = G\,(2/3\ \rho\pi r^2)^2 = 4/9 G\rho^2\pi^2 r^4$$

5 **¿A qué distancia del centro lunar es atraída con una fuerza de 1 N una masa de 1 kg?**

La fuerza con que la Luna atrae a una masa de 1 kg será:

$$F = G\frac{m_L m}{r^2} =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{7{,}20 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 1\ \text{kg}}{r^2} = 1\ \text{N}$$

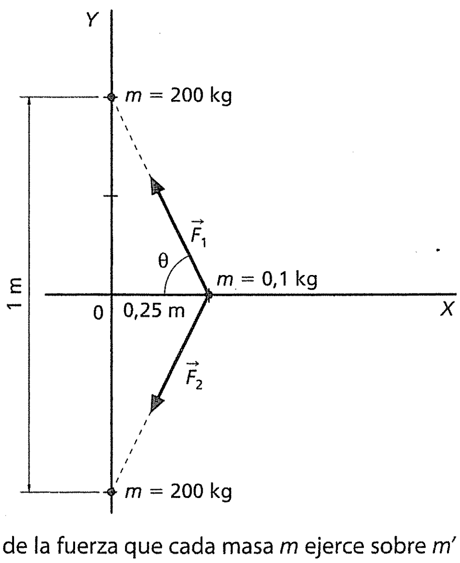
Despejando r, resulta:

$$r = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 7{,}20 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 1\ \text{kg}/1\ \text{N}} =$$

$$= 2{,}19 \cdot 10^6\ \text{m} = 2\,190\ \text{km}$$

6 **PAU** **Dos esferas de 200 kg se encuentran separadas 1 m a lo largo del eje Y. Halla la fuerza neta que ejercen sobre una pequeña masa de 0,1 kg situada sobre el eje X a 0,25 m del punto medio de las esferas. (Expresar el resultado en notación vectorial y calcular el módulo de la fuerza neta).**

El diagrama de las fuerzas originadas por las dos masas se observa en el siguiente dibujo:



El valor de la fuerza que cada masa m ejerce sobre m' es:

$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

Siendo $r^2 = 0{,}5^2 + 0{,}25^2 = 0{,}312\,5$, por lo que sustituyendo:

$$F = 4{,}27 \cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

Como se desprende de la figura, las fuerzas F_1 y F_2 son iguales en valor y pueden descomponerse en las componentes x e y, siendo:

$$F_{1x} = -F\cos\alpha$$
$$F_{1y} = -F\,\text{sen}\,\alpha$$
$$F_{2x} = -F\cos\alpha$$
$$F_{2y} = -F\,\text{sen}\,\alpha$$

Donde sen $\alpha = 0{,}5/\sqrt{0{,}312\,5} = 0{,}89$ y cos $\alpha = 0{,}25/\sqrt{0{,}312\,5} = 0{,}45$

Por lo que:

$$\vec{F}_1 = -1{,}92 \cdot 10^{-9}\vec{i} + 3{,}8 \cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$
$$\vec{F}_2 = -1{,}92 \cdot 10^{-9}\vec{i} - 3{,}8 \cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$

Así pues, la fuerza neta es:

$$\vec{F} = -3{,}84 \cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{N}$$

Siendo su valor $3{,}84 \cdot 10^{-9}$ N.

7 **Si la masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra, y su radio es aproximadamente 1/4 del terrestre, da un valor aproximado de la aceleración de caída de los objetos en la superficie lunar.**

Utilizando los datos ofrecidos, tendremos:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{(0{,}012 \cdot m_T)}{\left(\frac{1}{4}\,r_T\right)^2} =$$
$$= 0{,}192 \cdot g_T = 1{,}88\ \text{m/s}^2$$

8 **PAU** **A partir de la expresión de la aceleración de caída libre, demuestra que, si consideramos los planetas como cuerpos esféricos, puede escribirse:**

$$a = \frac{4}{3}\,G\pi\rho r$$

donde ρ es la densidad media del planeta.

Teniendo en cuenta que $m = \rho V = \rho\ \frac{4}{3}\ \pi r^3$, donde r es el radio del planeta, se obtiene la expresión pedida, al sustituir esta igualdad en la expresión **2.8:**

$$a = G\,\frac{\frac{4}{3}\,\rho\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}\,G\pi\rho r$$

Obsérvese que la expresión obtenida nos da únicamente la aceleración en la superficie del planeta (o para alturas muy pequeñas comparadas con ella).

9 **PAU** **El diámetro de Venus es de 12 120 km y su densidad media es de 5 200 kg/m^3. ¿Hasta qué altura ascendería un objeto lanzado desde su superficie con una velocidad inicial de 30 m/s?**

La aceleración de la gravedad en la superficie de Venus viene dada por la siguiente expresión:

$$g_{\text{Venus}} = G\frac{M_{\text{Venus}}}{R_{\text{Venus}}^2} = G\frac{\rho_{\text{Venus}}V_{\text{Venus}}}{R_{\text{Venus}}^2} =$$
$$= \frac{4}{3}\,G\pi\rho_{\text{Venus}}R_{\text{Venus}}$$

Sustituyendo los datos, resulta una gravedad de 8,8 m/s^2.

Puesto que el objeto lanzado hacia arriba experimenta un movimiento uniformemente acelerado, podemos aplicar la ecuación que relaciona velocidades con espacio recorrido:

$$v^2 = v_0^2 + 2gy_{\text{máx}}$$

En nuestro caso, la aceleración es negativa y la velocidad final es la del punto más alto, esto es, cero:

$$0 = 30^2 - 2 \cdot 8{,}8 \cdot y_{\text{máx}} \Rightarrow 51{,}14\ \text{m}$$

10 **Teniendo en cuenta que la masa del Sol es de unos $2 \cdot 10^{30}$ kg, calcula el valor de k para los planetas del sistema solar y exprésalo con sus correspondientes unidades del SI.**

Sustituyendo los valores ofrecidos en la expresión **2.9**, se obtiene:

$$k = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}} = 2{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$$

11 **El satélite de Júpiter llamado Ío tiene un período de revolución de 42 horas 29 minutos, y su distancia media a Júpiter es de 422 000 km. ¿Cuál es la masa de Júpiter?**

A partir de la tercera ley de Kepler, y sustituyendo los valores ofrecidos, se calcula el valor de la constante k en el caso de Júpiter:

$$k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(152\,940)^2}{(4{,}22 \cdot 10^8)^3} = 3{,}112 \cdot 10^{-16}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$$

Después se halla la masa de Júpiter a partir de la expresión **2.9:**

$$m_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{kG} = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ \text{kg}$$

12 **Marte se encuentra a una distancia media del Sol de 227 900 000 km. ¿Cuántos días dura el año marciano?**

Se trata de determinar, a partir de la tercera ley de Kepler, el período de Marte usando el valor de la constante k obtenido en la actividad 10.

$$T^2 = kr^3 = 2{,}96 \cdot 10^{-19} \cdot (2{,}279 \cdot 10^{11})^3 = 3{,}5 \cdot 10^{15}$$

$$T = 5{,}92 \cdot 10^7\ \text{s} = 685\ \text{días}$$

13 **Si el período de un péndulo simple que oscila bajo ángulos pequeños viene dado por $T = 2\rho\sqrt{l/g}$:**

a) **¿Qué le ocurriría a dicho período si lo alejáramos hasta el doble de la distancia que hay entre el péndulo y el centro de la Tierra?**

b) **¿Qué le ocurriría en ese mismo caso a su frecuencia de oscilación?**

a) Al duplicar la distancia, el valor de la aceleración de la gravedad se reduce a la cuarta parte; es decir:

$$g' = \frac{g}{4}$$

Al sustituir este nuevo valor en la expresión del período, observamos que este se duplica:

$$T = 2\rho\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\rho\sqrt{\frac{l}{g/4}} = 4\rho\sqrt{\frac{l}{g}}$$

b) Si se duplica el período, la frecuencia se reduce a la mitad.

14 **Haz una estimación del valor de la aceleración de marea en la zona más próxima a la Luna. ¿Qué elevación de marea produciría dicha aceleración, en condiciones ideales, actuando durante media hora?**

Dato: La masa de la Luna es 0,012 veces la de la Tierra.

La aceleración de la marea en el punto más cercano a la Luna viene dada por la expresión **2.14**. Sustituyendo $\vec{a}_A$ y $\vec{a}_T$ por sus respectivas expresiones matemáticas, resulta:

$$a_{\text{marea}} = Gm_{\text{Luna}} \cdot \left(\frac{1}{(r - r_T)^2} - \frac{1}{r^2} \right) =$$

$$= 0{,}012 \cdot G \cdot m_T \cdot \frac{2rr_T - r_T^2}{r^2(r - r_T)^2}$$

Ahora bien, como veremos en el epígrafe siguiente, el radio de la Tierra es mucho menor que la distancia Tierra-Luna, luego la expresión anterior se puede aproximar a:

$$a_{\text{marea}} \cong 0{,}012 \cdot Gm_T \cdot \frac{2rr_T}{r^2 r^2} = 0{,}012 \cdot Gm_T \frac{2r_T}{r^3}$$

Sustituyendo, resulta:

$$a_{\text{marea}} \cong 0{,}012 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6}{(3{,}84 \cdot 10^8)^3} =$$

$$= 1{,}08 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s}^2$$

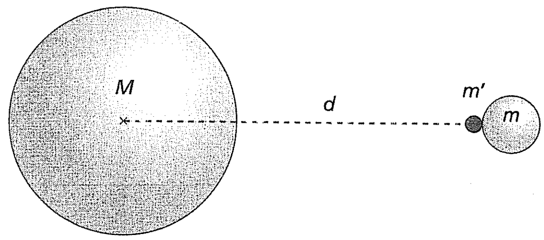
Si consideramos que el valor de la aceleración de marea se mantiene aproximadamente constante durante media hora, la elevación que se producirá será:

$$y = \frac{1}{2} at^2 = 1{,}75\ \text{m}$$

Debe hacerse notar que este ejercicio no es más que una mera aproximación.

15 **PAU** **Supongamos una masa m' sobre la superficie de un satélite de masa m y radio r que orbita a una distancia d alrededor de un planeta masivo de masa M. Teniendo en cuenta que el límite de Roche sería la distancia crítica d en la que la fuerza de marea sobre m' originada por el planeta se iguala a la fuerza de atracción gravitatoria que el satélite ejerce sobre m', demuestra que el límite de Roche viene dado por la expresión:**

$$d = r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$



La fuerza de marea que ejerce el planeta masivo sobre el pequeño satélite será:

$$F_{\text{marea}} = G\frac{M\,2r}{d^3} \cdot m'$$

Mientras que la fuerza gravitatoria que ejerce el satélite sobre la masa m' es:

$$F_{\text{gravitatoria}} = G\frac{m\,m'}{r^2}$$

En el límite de Roche, ambas fuerzas se igualan, es decir:

$$G\frac{M\,2r}{d^3} \cdot m' = G\frac{m\,m'}{r^2}$$

Despejando la distancia:

$$d = r\left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}$$

16 **Demuestra que si en la anterior fórmula expresamos las masas en función de las densidades y volúmenes del planeta y satélite, se obtiene la siguiente expresión más útil para el límite de Roche, que solo depende del radio del planeta y de las densidades de ambos cuerpos:**

$$d = R\left(\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\right)^{1/3}$$

Si expresamos las masas en función de la densidad y el volumen de los planetas:

$$M = \frac{4}{3}\rho R^3 \cdot \rho_{\text{planeta}};\ m = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{\text{satélite}}$$

$$\frac{2M}{m} = \frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\left(\frac{R}{r}\right)^3$$

Si sustituimos este cociente en la expresión hallada en la actividad anterior, resulta:

$$d = R\left(\frac{2\rho_{\text{planeta}}}{\rho_{\text{satélite}}}\right)^{1/3}$$

Cuestiones y problemas (páginas 80/81)

Guía de repaso

1 **¿De qué tipo llegó a imaginar Kepler que podía ser la fuerza responsable del movimiento de los planetas? ¿A qué asociaba la causa de dicha fuerza?**

Kepler situaba la causa del movimiento de los planetas en el Sol. La razón que daba era que la fuerza con que el Sol movía a los planetas disminuía con la distancia, del mismo modo que lo hacía su propia luz. Por ello, dicha fuerza debía ser algo inherente a la sustancia solar. Seducido por los estudios de Gilbert sobre magnetismo terrestre, Kepler llegó a suponer que la fuerza que dimanaba del Sol era magnética.

2 **¿Cuál parece ser el origen de la idea contenida en el libro III de los *Principia* de Newton, según la cual la caída de los cuerpos y los movimientos planetarios obedecen a un mismo tipo de fuerza?**

Los cálculos que Newton realizó en 1666, en los que supuso que la Luna «caía» hacia la Tierra de forma continua, de igual modo que un proyectil se precipita parabólicamente a tierra.

Así, halló que la aceleración con que caía cumplía con la regla del inverso del cuadrado de la distancia.

3 **¿Cuál es el origen de la insistente suposición de que la fuerza responsable del movimiento de los planetas debía cumplir la ley del inverso del cuadrado de la distancia?**

La suposición de que la fuerza era centrípeta, junto con el cumplimiento de la tercera ley de Kepler.

4 **¿Por qué no aparece la constante de gravitación *G* en los Principia? ¿Qué impedía a Newton conocer su valor?**

Porque no se conocía la masa de la Tierra.

5 **¿Qué precauciones considerarías necesario tomar si te vieses en la tesitura de tener que reproducir el experimento de Cavendish? ¿Por qué es tan difícil su reproducción?**

Habría que evitar, por ejemplo, las posibles perturbaciones producidas por corrientes de aire. Debe, pues, reproducirse el experimento en condiciones de vacío.

Según el material que se emplee, ha de procurarse también que no se produzcan interacciones de naturaleza electrostática.

6 **¿Cómo se llega a la conclusión de que la masa inercial y la gravitacional son la misma magnitud?**

Se llega a esa conclusión a partir de la observación experimental de que la aceleración de la gravedad es la misma para todos los cuerpos, independientemente de su masa.

7 **¿Qué razones llevaron a suponer que la fuerza gravitatoria entre masas varía conforme al inverso del cuadrado de la distancia?**

La respuesta a esta cuestión es la misma que se dio para la cuestión 3.

8 **¿Te parece lícito considerar que *G* es una constante verdaderamente «universal»? ¿Qué otras constantes universales conoces?**

Sí es lícito, mientras no se demuestre lo contrario. Existen otras constantes universales, como la de Avogadro, la de Boltzmann, la masa y la carga del electrón, la velocidad de la luz en el vacío, la constante de Planck, las masas y cargas de partículas elementales o la constante de Hubble.

9 **¿Cómo podría incidir en el fenómeno de las mareas un calentamiento global del planeta? ¿Qué consecuencias podría tener dicha incidencia?**

Un calentamiento global del planeta que provocase la fusión de los casquetes polares conllevaría un aumento de la masa acuosa del planeta y, por tanto, problemas de anegación de zonas hoy habitadas debido a un ligero incremento de las mareas.

10 **¿Por qué el efecto de marea de la Luna sobre la Tierra es mayor si la fuerza gravitatoria del Sol supera a la ejercida por la Luna?**

Porque, como ya se ha comentado y puede observarse en el ejercicio resuelto número 6 de la página 77, las fuerzas y aceleraciones de marea varían conforme al inverso del cubo de la distancia.

11 **¿Cuántas mareas se producen al día en una localidad costera? ¿Cada cuánto tiempo?**

Al día se producen dos mareas altas y dos mareas bajas. Las mareas altas se producen cada 12 h y 26 min y el tiempo que transcurre entre una marea alta y una marea baja es de 6 h y 13 min.

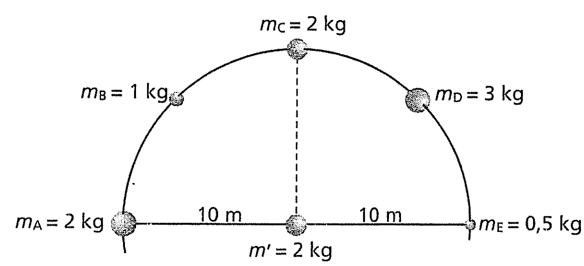
Ley de gravitación universal

12 **Dos masas aisladas se atraen gravitacionalmente. Si una es el doble que la otra, ¿cómo serán, en comparación, las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas? ¿Qué pasará a las fuerzas si la distancia entre las masas se reduce a la mitad? ¿Cómo serán, en comparación, las aceleraciones que adquirirán las masas?**

Las fuerzas, según se desprende de la formulación de la ley de gravitación y de la tercera ley de Newton, serán iguales y de sentidos opuestos. Si la distancia se reduce a la mitad, el valor de la fuerza se cuadruplica.

En cuanto a las aceleraciones que adquirirán ambos cuerpos, el de doble masa tendrá la mitad de la aceleración que el otro.

13 PAU **Determina la fuerza que actúa sobre la masa *m'* de la distribución que se aprecia en la figura.**



La fuerza total resultante en la dirección del eje *X* viene dada por:

$$F'_x = G\frac{m'}{r^2}(-m_A - m_B\cos 45° + m_D\cos 45° + m_E)$$

de donde:

$$F'_x = -0{,}021\,72 \cdot G$$

De manera análoga, la fuerza total resultante en la dirección del eje *Y* es:

$$F'_y = G\frac{m'}{r^2}(m_B\,\text{sen}\,45° + m_C + m_D\,\text{sen}\,45°)$$

de donde:

$$F'_y = 0{,}096\,56 \cdot G$$

Por lo que:

$$\vec{F'} = -0{,}021\,72 \cdot G\vec{i} + 0{,}096\,56 \cdot G\vec{j}\ \text{N}$$

cuyo valor es:

$$F' = G\sqrt{(-0{,}021\,72)^2 + (0{,}096\,56)^2} = 6{,}60 \cdot 10^{-12}\,\text{N}$$

14 **PAU** **Dos masas puntuales iguales de 5 kg se encuentran situadas en los vértices inferiores de un triángulo equilátero de 40 cm de lado.**

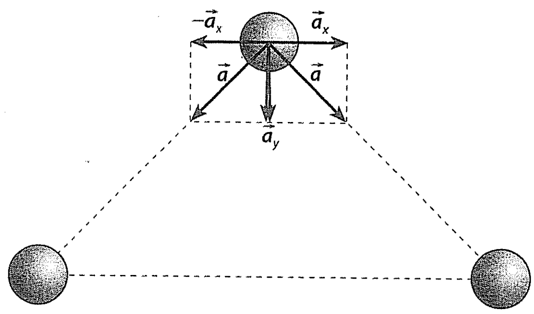
Si se coloca en el vértice superior una tercera masa m':

a) **¿Qué aceleración adquiere esta última masa en ese punto (exprésala en notación vectorial)?**

b) **¿Descenderá con aceleración constante?**

c) **¿Qué aceleración tendrá en el momento de llegar a la base del triángulo?**

La representación vectorial del problema se aprecia en la siguiente figura:



a) Puesto que las masas en los vértices inferiores son iguales, las componentes x de la aceleración que cada una de ellas comunica a m' se cancelan, de modo que la aceleración total que adquiere m' será:

$$\vec{a}_{total} = -2a_y\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

donde:

$$a_y = G\frac{m}{d^2}\cos 30°$$

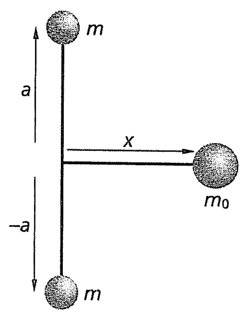
Sustituyendo $m = 5$ kg y $d = 0{,}4$ m, se obtiene:

$$\vec{a}_{total} = -3{,}6 \cdot 10^{-9}\vec{j}\ \text{m/s}^2$$

b) No lo hará con aceleración constante, pues a medida que desciende las componentes y de la aceleración disminuyen.

c) Puesto que se mueve en la dirección del eje Y, su aceleración total será 0, al estar en el punto medio de las dos masas iguales.

D15 **PAU** **Dos masas puntuales de valor m se encuentran situadas sobre el eje Y en las posiciones $y = +a$ e $y = -a$, mientras que una tercera, m_0, se encuentra situada en el eje X a una distancia $-x$ del origen, como se indica en la figura.**

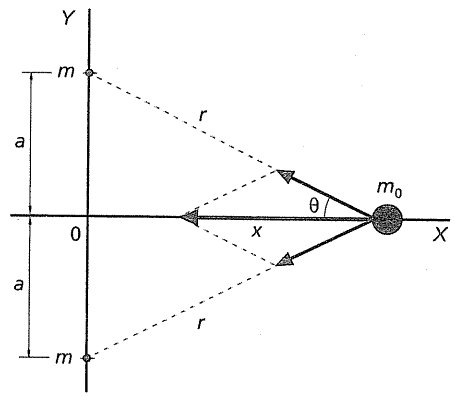


a) **Demuestra, detallando todos los pasos y argumentando la respuesta, que la fuerza que las dos masas idénticas ejercen sobre m_0, es:**

$$\vec{F} = \frac{2G\,mm_0x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\vec{i}$$

b) **¿Qué expresión se obtendrá si situamos la masa m_0 a una distancia mucho mayor que a?**

El diagrama de fuerzas es el siguiente:



a) El valor de la fuerza que cada masa ejerce sobre m_0 es:

$$F = G\frac{mm_0}{r^2} = G\frac{mm_0}{(x^2 + a^2)}$$

Al descomponer ambas fuerzas en sus componentes x e y, vemos que las componentes y se anulan entre sí, de modo que la fuerza neta resultante sobre m_0 es, como se aprecia en la figura:

$$\vec{F} = -2F_x\vec{i}$$

Aplicando la ley de gravitación universal:

$$F_x = F\cos\alpha = G\frac{mm_0}{(x^2 + a^2)} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = G\frac{mm_0x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Así pues, en forma vectorial:

$$\vec{F} = -2G\frac{mm_0x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\vec{i}$$

b) Si $x >> a$, entonces $(x^2 + a^2)^{3/2} \approx x^3$, quedando la anterior expresión de la manera:

$$\vec{F} = -2G\frac{mm_0x}{x^2}\vec{i}$$

Que será la que resultará de suponer la masa m_0 atraída por una única masa puntual de valor $2m$ situada a la distancia x.

16 **¿Dónde será mayor el período de un péndulo, en el ecuador o en los polos?**

Según la expresión utilizada en la actividad 13, el período de un péndulo será mayor en el ecuador, donde el valor de g es ligeramente menor. Este hecho era conocido por Newton, ya que Richter había llevado a cabo mediciones del período de un péndulo en la Guayana francesa en 1672 y observado que el péndulo oscilaba más lentamente. A raíz de ello, Newton concluyó que la Tierra debía estar abultada en su zona ecuatorial y achatada por los polos.

17 **Imagínate que la ESA (Agencia Espacial Europea) organiza un concurso de ideas en los centros de enseñanza sobre posibles experimentos para llevar a cabo en un satélite que se halle en órbita alrededor de la Tierra. Alguien propone analizar el movimiento de un péndulo en el interior del satélite. ¿Qué te parece la idea?**

La idea no resultaría en absoluto, pues el péndulo no oscilaría. En realidad, todos los objetos en el interior de la estación orbital estarían cayendo libremente, lo que les conferiría esa situación de «ingravidez», que no significa ausencia de gravedad.

18 **¿Qué le ocurriría a un péndulo si, de repente, la Tierra aumentara su velocidad de rotación? ¿Se vería afectado el péndulo si se encontrara en los polos?**

Como se tendrá ocasión de analizar en detalle en la siguiente unidad, la aceleración gravitatoria efectiva que actuaría sobre los cuerpos en latitudes no polares sería ligeramente menor, al aumentar la aceleración centrífuga.

En consecuencia, el período del péndulo aumentaría, con lo que oscilaría más lentamente. Por el contrario, en los polos no se vería afectado el valor de g, aunque aumentara la velocidad de rotación.

19 Imagínate que un planeta aumentara de tamaño sin alterar su densidad. ¿Se elevaría o disminuiría el peso de los cuerpos en su superficie?

Tal y como se desprende de la actividad 8 de la página 66, es posible expresar la aceleración de la gravedad superficial en función de la densidad del siguiente modo:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

Al aumentar el tamaño el planeta, se incrementa r y, si no varía la densidad, el valor de g se elevaría, por lo que el peso de los cuerpos en la superficie se incrementa linealmente con la distancia o radio.

20 Unos astronautas, al llegar a un planeta desconocido de gran tamaño, ponen su nave a orbitar a baja altura del planeta y con los motores desconectados. ¿Cómo podrían estimar la densidad del planeta usando solo un reloj?

Si los astronautas sitúan la nave en una órbita baja a la velocidad orbital adecuada, lo único que tienen que tener en cuenta es el tiempo que tardan en efectuar una órbita completa (período T). Con esto ya pueden estimar la densidad del planeta del modo que sigue. En primer lugar, como la aceleración centrípeta de la nave es la aceleración gravitatoria, ambas expresiones se igualan:

$$g = \omega^2 r$$

Puesto que la órbita es de baja altura, cabe suponer que r es el radio del planeta. Expresando la aceleración de la gravedad en función de la densidad del planeta (véase la actividad 8), y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi/T$, se obtiene:

$$\frac{4}{3} G\pi r\rho = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

Despejando la densidad, se concluye que:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

Así pues, como puede observarse, todo lo que necesitamos la densidad del planeta es un reloj para medir T.

21 ¿Qué pasaría si desde una nave orbital se dejase caer un objeto?

Permanecería orbitando en posición paralela a la nave, pues tanto esta como el objeto se encontrarían en caída libre. Lo veríamos, pues, en reposo relativo con respecto a la nave.

22 PAU En la superficie de un planeta cuyo radio es 1/3 del de la Tierra, la aceleración gravitatoria es de 5,8 m/s². Halla:

***a)* La relación entre las masas de ambos planetas.**

***b)* La altura desde la que debería caer un objeto en el planeta para que llegara a su superficie con la misma velocidad con que lo haría en la Tierra un cuerpo que se precipita desde 50 m de altura.**

a) La aceleración gravitatoria de la Tierra:

$$G\frac{m_T}{r_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

mientras que en el otro planeta:

$$G\frac{m_P}{r_P^2} = 5{,}8 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{m_T r_P^2}{m_P r_T^2} = 1{,}69$$

como $r_p = r_T/3$ se tiene que:

$$\frac{m_T r_T^2}{m_P r_T^2} \cdot \frac{1}{9} = 1{,}69$$

de donde:

$$\frac{m_T}{m_P} = 15{,}21$$

o bien, a la inversa:

$$\frac{m_P}{m_T} = 6{,}57 \cdot 10^{-2}$$

b) Las velocidades con que llegan al suelo los objetos que caen libremente son:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Puesto que en ambos casos la velocidad debe ser la misma:

$$\sqrt{2g_T y_T} = \sqrt{2g_P y_P} \Rightarrow g_T y_T = g_P y_P$$

Despejando el valor de y_P:

$$y_P = \frac{g_T}{g_P} \cdot y_T = 84{,}45 \text{ m}$$

23 Considerando que la densidad media de la Tierra es de 5 500 kg/m³, y teniendo en cuenta el valor de su radio, haz una estimación del valor de la constante *G*.

Expresando el valor de g en función de la densidad y despejando G, resulta:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho \Rightarrow G = \frac{3g}{4\pi r\rho}$$

Sustituyendo los valores:

$$G = \frac{3 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{4\pi \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 5\,500 \text{ kg/m}^3} =$$
$$= 6{,}68 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

24 PAU Una masa cae con una aceleración de 3,7 m/s² sobre la superficie de un planeta sin atmósfera cuyo radio es 0,4 veces el terrestre.

***a)* ¿Cómo es la masa de este planeta en relación con la terrestre?**

***b)* ¿Qué velocidad debería llevar una nave para orbitar a 500 km sobre la superficie del planeta?**

***c)* ¿Cuánto tardaría en efectuar una órbita completa a esa altura?**

a) La aceleración superficial en el planeta es:

$$g_P = G\frac{m_P}{r_P^2} = 3{,}7 \text{ m/s}^2$$

Y en la Tierra:

$$g_T = G\frac{m_T}{r_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{m_P r_T^2}{m_T r_P^2} = \frac{3{,}7}{9{,}8}$$

de donde:

$$\frac{m_P}{m_T} = 0{,}06$$

b) Teniendo en cuenta que la aceleración gravitatoria es centrípeta, se obtiene:

$$G\frac{m_P}{d^2} = \frac{v^2}{d}$$

Despejando el valor de v:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_p}{d}}$$

donde:

$$d = r_P + 500\text{ km} = 0{,}4 \cdot 6\,370\text{ km} + 500\text{ km} = 3\,048\text{ km}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$v = 2\,806{,}7\text{ m/s}$$

c) Como:

$$v = \frac{2\pi d}{T}$$

Entonces:

$$T = \frac{2\pi d}{v} = 6\,823\text{ s} \cong 0{,}08\text{ días}$$

25 PAU Supongamos que la Tierra tiene una densidad media ρ. Determina cuál sería el valor de g sobre su superficie si:

a) El diámetro fuese la mitad y la densidad fuese la misma.

b) El diámetro fuese el doble sin variar la densidad.

Usando la expresión de g en función de la densidad:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

se observa que:

a) Si el radio se reduce a la mitad, entonces:

$$g' = \frac{1}{2} \cdot g$$

b) Si el radio se duplica, entonces:

$$g' = 2 \cdot g$$

26 PAU La masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre. Calcula:

a) La distancia que recorrería un cuerpo en 3 s cayendo libremente.

b) La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba si con la misma velocidad se elevara en Tierra hasta 30 m.

La aceleración de la gravedad en la superficie lunar viene dada por la expresión:

$$g_{\text{Luna}} = G\frac{M_{\text{Luna}}}{R^2_{\text{Luna}}} = G\frac{0{,}012 \cdot M_{\text{Tierra}}}{0{,}27^2 \cdot R^2_{\text{Tierra}}} = 0{,}1646\, g_{\text{Tierra}} = 1{,}6\text{ m/s}^2$$

a) Para hallar la distancia recorrida en la caída, hacemos uso de la ecuación del movimiento de caída libre:

$$y = 1/2\, g_L t^2 = 7{,}2\text{ m}$$

b) La altura a la que se elevaría en un lanzamiento vertical vendrá dada por la expresión:

$$h_L = \frac{v_0^2}{2g_L}$$

Comparando las alturas que alcanzarían en la luna y en la Tierra, lanzados con la misma velocidad, se obtendría:

$$\frac{h_L}{h_T} = \frac{v_0^2}{2g_L} = \frac{v_0^2/2g_L}{v_0^2/2g_T} \Rightarrow h_L = h_T\frac{g_T}{g_L} = 30 \cdot \frac{9{,}8}{1{,}6} = 183{,}7\text{ m}$$

27 PAU Dos planetas extrasolares A y B presentan la misma densidad, pero el radio de A es el doble que el de B. Demuestra cómo serán en comparación los pesos de una misma masa *m* en sus respectivas superficies.

El peso de una masa m en la superficie de un planeta de masa M y radio R puede expresarse en función del radio y la densidad del planeta:

$$P = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{4}{3}\pi R^3\rho \cdot \frac{m}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R\rho m$$

Si la densidad de ambos planetas es la misma, la relación entre el peso en el planeta A y en el planeta B será:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{R_A}{R_B} = 2 \Rightarrow P_A = 2P_B$$

D28 PAU La densidad de Marte es 0,71 veces la de la Tierra, mientras que su diámetro es 0,53 veces el terrestre. Deduce y explica cómo serán, en comparación, los pesos de una misma masa *m* en Marte y en la Tierra. ¿Cuál es el valor de *g* en la superficie de Marte si en la Tierra es de 9,8 m/s²?

Haciendo uso de la expresión $g = \frac{4}{3}G\pi\rho r$, se obtiene:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{4/3\, G\pi \cdot 0{,}71\rho_T \cdot 0{,}53 r_T}{4/3\, G\pi\rho_T r_T} = 0{,}38$$

Puesto que $P = mg$, resulta claro que el peso de una misma masa en Marte es 0,38 veces el correspondiente en la Tierra. Y teniendo en cuenta que $g_T = 9{,}8\text{ m/s}^2$, por tanto:

$$\frac{P_{\text{Marte}}}{P_{\text{Tierra}}} = \frac{g_{\text{Marte}}}{g_{\text{Tierra}}}$$

despejando queda:

$$g_{\text{Marte}} = 0{,}38 \cdot g_{\text{Tierra}} = 3{,}7\text{ m/s}^2$$

Gravitación y tercera ley de Kepler

29 ¿Qué condición cumplen los satélites que emiten señales de TV? ¿A qué distancia deben orbitar?

Deben ser geoestacionarios, es decir, orbitar con el mismo período que el de rotación terrestre (véase el problema resuelto número 4 de la página 76).

30 ¿Sería posible situar un satélite estacionario sobre nuestro país?

No sería posible situar un satélite permanentemente sobre nuestro país, porque el centro o foco orbital de este satélite debe ser el centro terrestre, por donde pasa la dirección de acción de la fuerza gravitatoria.

31 Calcula la masa de Marte sabiendo que Fobos, uno de sus dos satélites, completa una órbita de 9 300 km de radio cada 0,32 días.

La aceleración centrípeta de Fobos es la gravitatoria, de modo que:

$$G\frac{m}{r^2} = \omega^2 r$$

Despejando la masa, tenemos que:

$$m = \frac{\omega^2 r^3}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Sustituyendo los datos correspondientes, llegamos a:

$$m = 6{,}23 \cdot 10^{23}\text{ kg}$$

Para obtener este resultado, T se ha expresado en segundos, y r, en metros.

32 Halla cuántas veces es mayor la masa solar que la terrestre a partir de los datos orbitales de la Luna alrededor de la Tierra y de esta alrededor del Sol.

Aplicando la tercera ley de Kepler al movimiento orbital de la Luna alrededor de la Tierra y conociendo el valor de la constante k para un satélite alrededor de la Tierra (subepígrafe 3.2), se obtiene:

$$T_L^2 = k' d_{TL}^3 = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \cdot d_{TL}^3$$

Haciendo lo propio en el caso del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol, se obtiene:

$$T_T^2 = k d_{TS}^3 = \frac{4\pi^2}{Gm_S} \cdot d_{TS}^3$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos:

$$\frac{T_L^2}{T_T^2} = \frac{m_S d_{TL}^3}{m_T d_{TS}^3}$$

Es decir:

$$\frac{m_S}{m_T} = \frac{T_L^2 d_{TS}^3}{T_T^2 d_{TL}^3}$$

Considerando los siguientes datos:

$$T_L = 27{,}31 \text{ días}; \quad d_{TS} = 149\,600\,000 \text{ km}$$
$$T_T = 365{,}25 \text{ días}; \quad d_{TL} = 384\,000 \text{ km}$$

cabe concluir que:

$$\frac{m_S}{m_T} = 3{,}3 \cdot 10^5$$

Es decir, la masa solar es $3{,}3 \cdot 10^5$ veces la terrestre.

33 **¿Cuál sería la masa de la Tierra, comparada con la real, para que la Luna girase en torno a nuestro planeta con el período actual, pero a una distancia dos veces mayor?**

Aplicando la tercera ley de Kepler para el caso real:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \cdot d^3$$

Por otro lado, si $d' = 2 \cdot d$ y se mantiene el periodo, tendremos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm'_T} \cdot (2 \cdot d)^3$$

Igualando ambas expresiones, se llega a que:

$$m'_T = 8 \cdot m_T$$

Es decir, la masa ficticia debería ser 8 veces la real.

34 **PAU** **El satélite de Júpiter llamado Ío orbita a una distancia del centro planetario de 422 000 km, con un período de revolución de 1,77 días. Con estos datos, calcula a qué distancia se encuentra Europa, otra de sus lunas, si su período de revolución es de 3,55 días.**

Teniendo en cuenta que el valor de la constante k es el mismo para ambos casos, e igualando a partir de la tercera ley de Kepler, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{T_{Ío}^2}{d_{Ío}^3} = \frac{T_{Europa}^2}{d_{Europa}^3}$$

Despejando la distancia a que se encuentra Europa, se obtiene:

$$d_{Europa} = d_{Ío} \cdot \left(\frac{T_{Europa}}{T_{Ío}}\right)^{2/3}$$

Sustituyendo los datos correspondientes que nos facilita el problema, concluimos que:

$$d_{Europa} = 1{,}59 \cdot d_{Ío} = 671\,144 \text{ km}$$

35 **PAU** **La masa de Saturno es 95,2 veces la de la Tierra. Encélado y Titán, dos de sus satélites, tienen períodos de revolución de 1,37 días y 15,95 días, respectivamente. Determina a qué distancia media del planeta orbitan estos satélites.**

En ambos casos se aplica la tercera ley de Kepler:

$$d^3 = \frac{T^2}{k} = \frac{Gm_{Saturno}T^2}{4\pi^2}$$

donde:

$$d = \left(\frac{Gm_{Saturno}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Como $m_{Saturno} = 95{,}2 \cdot m_T = 5{,}71 \cdot 10^{26}$ kg, al sustituir en la anterior expresión, se obtiene:

$$d_{Encélado} = 237\,520 \text{ km}$$
$$d_{Titán} = 1\,223\,161 \text{ km}$$

36 **PAU** **El Apolo VIII orbitó en torno a la Luna a una altura de su superficie de 113 km. Si la masa lunar es 0,012 veces la terrestre y su radio es 0,27 veces el terrestre, calcula:**

a) **El período de su órbita.**

b) **Su velocidad orbital y su velocidad angular.**

a) Puesto que la aceleración centrípeta de su órbita es la gravitatoria, al igualar, se obtiene:

$$G\frac{m_L}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$$

de donde:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_L}$$

Teniendo en cuenta que:

$$r = r_L + h = 1\,833 \text{ km}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$T = 7\,113 \text{ s}$$

b) Su velocidad orbital será:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 1\,618 \text{ m/s}$$

Y su velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = 8{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$$

37 **PAU** **Con los datos ofrecidos en el ejercicio anterior, halla:**

a) **La distancia que recorrería un cuerpo en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar.**

b) **La altura a la que ascendería un cuerpo lanzado verticalmente si con esa velocidad se eleva en la Tierra hasta 20 m.**

Para resolver ambos apartados, debemos calcular la aceleración gravitatoria en la superficie lunar, que será, aproximadamente:

$$g_L = G\frac{m_L}{r_L^2} = G\frac{0{,}012 \cdot m_T}{(0{,}27 \cdot r_T)^2}$$
$$g_L = 0{,}164 \cdot g_T = 1{,}60 \text{ m/s}^2$$

a) Así pues, la distancia que un cuerpo recorrería en un segundo cayendo libremente en la superficie lunar sería:

$$y = \frac{1}{2}g_L t^2 = 0{,}81 \text{ m}$$

b) Teniendo en cuenta que la altura máxima que alcanza un objeto al ser lanzado verticalmente es:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

y si las velocidades de lanzamiento son iguales desde la Tierra y desde la Luna, entonces:

$$2g_T y_T = 2g_L y_L$$

donde:

$$y_L = \frac{g_T}{g_L} \cdot y_T = 121 \text{ m}$$

38 **La masa del planeta Saturno es 95,2 veces la de la Tierra, su radio es 9,4 veces el terrestre, y su distancia media al Sol es de 1 427 000 000 km. Calcula:**

a) **La duración de su año en días terrestres.**

b) **El valor de la gravedad en su superficie en relación con el terrestre.**

a) Por aplicación de la tercera ley de Kepler:

$$T = \sqrt{kd^3}$$

donde k es igual a $2{,}96 \cdot 10^{-19}$ s^2 m^{-3} (véase la actividad 10 de la página 67).

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$T = 9{,}274 \cdot 10^8 \text{ s} = 10\,734 \text{ días}$$

b) El valor de la gravedad superficial de Saturno es:

$$g_S = G\frac{m_S}{r_S^2}$$

Como $m_S = 95{,}2 \cdot m_T$, y $r_S = 9{,}4 \cdot r_T$, podemos concluir que:

$$g_S = G\frac{95{,}2 \cdot m_T}{(9{,}4 \cdot r_T)^2} = 1{,}08 \cdot g_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_S}{g_T} = 1{,}08$$

39 **Marte se encuentra un 52 % más alejado del Sol que la Tierra. Con este dato, determina la duración del año marciano en días terrestres. Dato: año terrestre = 365 días**

Según la tercera ley de Kepler, $T^2 = kR^3$. Es decir, T^2/R^3 es constante. Por tanto:

$$\frac{T^2_{\text{Marte}}}{R^3_{\text{Marte}}} = \frac{T^2_{\text{Tierra}}}{R^3_{\text{Tierra}}} \Rightarrow \left(\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Tierra}}}\right)^2 = \left(\frac{R_{\text{Marte}}}{R_{\text{Tierra}}}\right)^3$$

Ahora bien, sabemos que $R_{\text{Marte}} = 1{,}52R_{\text{Tierra}}$, y que el periodo de la órbita terrestre es de 365 días, luego:

$$\left(\frac{T_{\text{Marte}}}{T_{\text{Tierra}}}\right)^2 = 1{,}52^3 = 3{,}511\,8$$

$$T_{\text{Marte}} = 1{,}874 \cdot T_{\text{Tierra}} = 684 \text{ días terrestres}$$

D40 **PAU** **Júpiter tiene una masa 320 veces mayor que la terrestre y un volumen 1 320 veces superior al correspondiente a la Tierra. Determina:**

a) A qué altura h sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite en órbita circular, para que su período de revolución fuese de 9 h y 50 minutos.

b) ¿Qué velocidad tendrá el satélite en dicha órbita?

Datos: $R_{\text{Tierra}} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m; $M_{\text{Tierra}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg

a) En el sistema gravitatorio creado por Júpiter, la constante de la tercera ley de Kepler será:

$$k_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Júpiter}}} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Tierra}} \cdot 320}$$

Por otro lado, sabemos que la aceleración de la gravedad terrestre viene dada por la expresión:

$$g_{\text{Tierra}} = \frac{GM_{\text{Tierra}}}{R^2_{\text{Tierra}}} \Rightarrow GM_{\text{Tierra}} = g_{\text{Tierra}}R^2_{\text{Tierra}}$$

Ahora ya podemos expresar la constante de Kepler para Júpiter en función de datos conocidos:

$$k_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2}{g_{\text{Tierra}}R^2_{\text{Tierra}} \cdot 320} = 3{,}10 \cdot 10^{-16}$$

Conocida $k_{\text{Júpiter}}$, podemos aplicar la tercera ley de Kepler para determinar el radio de la órbita del satélite, convirtiendo previamente el periodo a segundos:

$$R^3_{\text{satélite}} = \frac{T^2_{\text{satélite}}}{k_{\text{Júpiter}}} = \frac{35\,400^2}{3{,}10 \cdot 10^{-16}} = 4{,}04 \cdot 10^{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\text{satélite}} = 1{,}59 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Para determinar la altura, calculamos el radio de Júpiter. Los volúmenes son proporcionales a los radios al cubo:

$$R^3_{\text{Júpiter}} = 1\,320 \cdot R^3_{\text{Tierra}} \Rightarrow R_{\text{Júpiter}} = 10{,}97 \cdot R_{\text{Tierra}} = 7{,}0 \cdot 10^7 \text{ m}$$

La altura del satélite sobre la superficie de Júpiter se obtiene restando al radio de la órbita el radio de Júpiter, de donde resulta que $h = 8{,}95 \cdot 10^7$ m, es decir, 89 527 km.

b) Igualando la fuerza gravitatoria y la centrípeta:

$$G\frac{m_J m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Se obtiene la velocidad orbital del satélite a la distancia r:

$$v = \sqrt{gm_J/r} = 2{,}8 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

El fenómeno de las mareas

41 **Compara el efecto de marea que la Tierra produce sobre la Luna con el que la Luna ejerce sobre la Tierra. ¿Aclara el resultado por qué la Tierra no muestra siempre la misma cara a la Luna y, sin embargo, esta sí lo hace?**

Según hemos visto en el epígrafe 5 de esta unidad, la aceleración de marea que la Tierra ejerce sobre la Luna es, aproximadamente:

$$a_{TL} = G\frac{m_T 2r_L}{d^3}$$

Mientras que la aceleración de marea que nuestro satélite ejerce sobre la Tierra es:

$$a_{LT} = G\frac{m_L 2r_T}{d^3}$$

Al dividir ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{a_{TL}}{a_{LT}} = \frac{m_T r_L}{m_L r_T}$$

Teniendo en cuenta que el radio lunar es de 1 873 km y que la masa de la Luna es 0,012 veces la terrestre, puede comprobarse que la aceleración de marea de la Tierra sobre la Luna es unas 24,5 veces mayor que la producida por la Luna en nuestro planeta.

Esa es la razón de que haya sido la Luna la que disminuyó más rápidamente su rotación hasta acoplar sus movimientos de rotación y traslación.

42 **PAU** **En el apogeo (punto de la órbita más lejano de la Tierra) la Luna está 1/9 más lejos de la Tierra que en el perigeo. Calcula en qué porcentaje disminuye la fuerza de marea cuando la Luna está en el apogeo.**

La aceleración de marea y, por tanto, la fuerza de marea, es proporcional al inverso del cubo de la distancia Tierra-Luna, es decir:

$$F_{\text{marea}} \propto r^{-3}$$

Donde r es la distancia Tierra-Luna. La relación entre la fuerza de marea en el apogeo y en el perigeo será:

$$\frac{F_{\text{apogeo}}}{F_{\text{perigeo}}} = \frac{r^3_{\text{perigeo}}}{r^3_{\text{apogeo}}} = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0{,}729$$

Es decir, la fuerza de marea en el apogeo es, aproximadamente, un 73 % menor que en el perigeo; por lo que, disminuye en un 27 %.

43 **¿En qué estación del año y bajo qué condiciones lunares se producirían las máximas elevaciones de marea?**

Teniendo en cuenta que las máximas elevaciones (mareas vivas) se producen cuando se suman las contribuciones de la Luna y el Sol, es decir en períodos lunares de plenilunio o novilunio y considerando las dependencias con el inverso del cubo de la distancia a cada uno, es fácil entender que la circunstancia de máxima elevación de marea requiere:

- Mínima distancia lunar: luna en perigeo.
- Mínima distancia solar: invierno boreal o verano austral.
- Luna nueva o luna llena.

Por tanto, las condiciones más favorables tendrán lugar en nuestro invierno y dándose la coincidencia de que en el momento de luna llena o nueva, esta se encuentra en el perigeo o en sus proximidades.