3 El concepto de campo en la gravitación

E S Q U E M A D E L A U N I D A D

- **1. ¿Por qué el concepto de campo?** páginas 83/84
  - **1.1. ¿Qué entendemos por campo?** página 84
- **2. El campo gravitatorio: intensidad de campo** páginas 85/91
  - **2.1. Campo gravitatorio producido por cuerpos esféricos** páginas 86/88
  - **2.2. El campo gravitatorio terrestre** páginas 89/90
  - **2.3. Principio de superposición de campos** página 91
- **3. El campo gravitatorio desde un enfoque energético** páginas 92/94
  - **3.1. Energía potencial gravitatoria** páginas 92/93
  - **3.2. Potencial gravitatorio** página 94
- **4. Representación gráfica del campo gravitatorio** página 95
  - **4.1. Representación mediante líneas de fuerza** página 95
  - **4.2. Representación mediante superficies equipotenciales** página 95
- **5. Aspectos energéticos del movimiento de los cuerpos en un campo gravitatorio** páginas 96/99
  - **5.1. Energía de amarre o ligadura** página 96
  - **5.2. Velocidad de escape** páginas 97
  - **5.3. Energía y órbitas** páginas 98/99
- **6. Origen y evolución del universo** página 99

Cuestiones previas (página 82)

1. ¿Qué interacciones se describen mediante el concepto de campo?

Interacción gravitatoria entre masas, interacción eléctrica entre cargas...

2. ¿Qué diferencia conceptual crees que existe entre la idea de campo y la de acción a distancia?

Acción a distancia

- Se requiere la existencia de, al menos, **dos cuerpos.** Un solo cuerpo no genera acción alguna.
- El espacio es el marco absoluto e invariable en el que sucede la interacción.
- La **interacción es instantánea,** de modo que las leyes newtonianas no se modifican (por ejemplo, el principio de acción y reacción).

Concepto de campo

- Se requiere la existencia de **un solo cuerpo** para originar un campo. El segundo cuerpo tan solo atestigua la existencia del campo.
- Son las distorsiones de las propiedades asociadas al espacio-tiempo las responsables de la interacción.
- Las **interacciones se propagan a la velocidad de la luz,** lo que modifica aspectos esenciales de las leyes de Newton (por ejemplo, el principio de acción-reacción).

3. ¿Crees que sería necesaria la misma velocidad para hacer escapar un cohete de la Tierra que para hacerlo de la Luna? ¿Por qué?

No, porque es característica del cuerpo celeste depende de su y de su radio la Tierra.

4. ¿Qué conoces de los agujeros negros? ¿Por qué se denominan así?

Los agujeros negros son como una masa muy grande concentrada en un punto que crea un gran campo gravitatorio, es decir, que tiene una gran fuerza de gravedad. Se denominan así porque absorben muchísima energía (igual que el color negro), son como sumideros de energía.

Esta fuerza de gravedad es tal que impide que la luz salga del campo de atracción, resultando por ello invisible.

5. ¿Tienen los satélites en órbita que usar permanente motores para mantenerse en la misma?

No, porque la fuerza centrípeta coincide con la fuerza gravitatoria.

Actividades (páginas 85/97)

1 ¿A qué distancia de un cuerpo de masa 3*m* tiene el campo gravitatorio el mismo valor que a una distancia *r* de un cuerpo de masa *m*?

Puesto que $g = Gm/r^2$, si la intensidad de los campos creados por m y por $3m$ es la misma, se cumple que:

$$G = \frac{3m}{d^2} = \frac{m}{r^2}$$

$$\frac{3}{d^2} = \frac{1}{r^2}$$

Despejando d, resulta:

$$d = \sqrt{3}r$$

2 Si el campo gravitatorio debido a una masa vale *g* a una distancia *r*, ¿a qué distancia de la masa valdrá la mitad?

El módulo del campo gravitatorio creado por una masa m es:

$$g = G\frac{m}{r^2}$$

A cierta distancia, d, el campo vale la mitad, es decir:

$$g' = G\frac{m}{r^2} = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}G\frac{m}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2r^2}$$

Despejando d, resulta:

$$d = \sqrt{2}r$$

3 Si la Tierra fuese una corteza esférica y se practicase en ella un orificio, ¿qué movimiento describiría una pelota que fuera lanzada al interior de dicho orificio?

Puesto que el campo en el interior de una corteza esférica es nulo, la pelota no estaría sometida a ningún tipo de aceleración y describiría un movimiento rectilíneo uniforme.

4 Si cavaras un hipotético túnel que se extendiese desde el lugar en el que te encuentras hasta los antípodas (suponiendo que la Tierra tiene densidad constante), ¿qué tipo de movimiento describiría una pelota que se dejara caer por dicho túnel? Explícalo con todo detalle.

Como el campo en el interior de una esfera sólida viene dado por la ecuación **3.3**, el peso de la pelota en el interior del hipotético túnel variaría conforme a la expresión:

$$\vec{P} = -G\frac{mm'}{r^3}r'\vec{u}_r$$

Por tanto, la fuerza que actúa sobre la pelota responde a la expresión típica de una fuerza restauradora, dirigida siempre hacia la posición de equilibrio ($r' = 0$) y que varía proporcionalmente con la distancia y en sentido opuesto. En consecuencia, la pelota oscilaría continuamente de un extremo al otro del hipotético túnel.

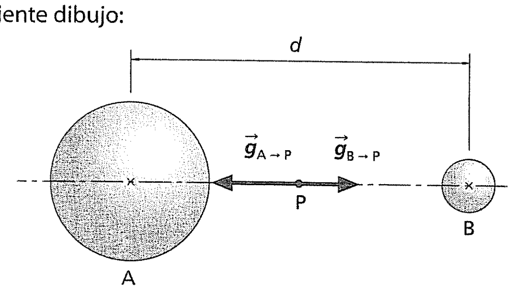
Nota: como ejercicio de ampliación, en la UNIDAD 7, dedicada al estudio del movimiento oscilatorio, puede sugerirse a los alumnos que demuestren que el período de dichas oscilaciones es igual al período orbital que tendría un cuerpo a una distancia equivalente al radio terrestre.

5 PAU Dos esferas A y B tienen la misma densidad, pero el radio de A es el triple del radio de B.

***a)* ¿Qué relación guardan los respectivos valores del campo en un punto P equidistante de los centros de las esferas?**

***b)* Si la separación entre los centros de las esferas es *d*, ¿a qué distancia de la esfera A se encuentra el punto en el que el campo resultante es nulo?**

La situación descrita en el enunciado se observa en el siguiente dibujo:



a) El campo creado por la esfera A en el punto P será:

$$g_{A\to P} = G\frac{m_A}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{R^3}{r^2}$$

En la expresión anterior, hemos puesto la masa como producto del volumen por la densidad.

Por su parte, el campo creado por la esfera B en el punto P será:

$$g_{B\rightarrow P} = G\,\frac{m_B}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho\,\frac{(R/3)^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{27r^2}$$

Por tanto, la relación entre los dos campos será:

$$\frac{g_{A\rightarrow P}}{g_{B\rightarrow P}} = 27$$

b) A cierta distancia del centro de la esfera A, los campos creados por ambas esferas son idénticos, si bien con sentidos opuestos. En ese punto, por tanto, $g_{A\rightarrow P} = g_{B\rightarrow P}$. Si llamamos r a dicha distancia:

$$\frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\,\frac{R^3}{27(d-r)^2}$$

Simplificando términos y tomando las inversas, resulta:

$$27(d-r)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d - r = \frac{r}{3\sqrt{3}}$$

Agrupando términos y despejando, obtenemos:

$$r = 0{,}839d$$

6 Haz una estimación del valor de g en la cima del Everest, teniendo en cuenta el valor de 9,8 m/s^2 al nivel del mar. ¿Crees que es correcto utilizar 9,8 m/s^2 como valor general para toda la superficie terrestre?

Dato: altura del Everest: 8,9 km

Aplicando la expresión **3.4,** en la que $h = 8\,900$ m, obtendremos:

$$g'_{\text{Everest}} = 9{,}77\ \text{m/s}^2$$

Como puede comprobarse, la generalización del valor aproximado de 9,8 m/s^2 para toda la corteza terrestre es válida para la mayor parte de las situaciones.

7 Considerando que en la superficie de Marte g es 3,72 m/s^2, calcula cuál sería el valor de la gravedad en la cima del monte Olimpo, que, con sus 25 km de altura, es el monte conocido más alto del sistema solar.

Aplicando de nuevo la expresión **3.4,** y tomando como radio promedio para Marte $3{,}38 \cdot 10^6$ m, el valor de g' en la cima del monte Olimpo de Marte será:

$$g' = 3{,}66\ \text{m/s}^2$$

Es decir, ha disminuido en un 2 %.

8 Dibuja una gráfica de las variaciones de la aceleración de la gravedad, g, en función de la distancia r al centro de la Tierra. ¿A qué profundidad, x, por debajo de la superficie terrestre hay que descender para que un cuerpo pese lo mismo que a una altura h sobre la misma?

La gráfica pedida es idéntica a la zona de la izquierda de la figura 3.12.

La segunda parte de la pregunta se refiere, en consonancia con el epígrafe, a alturas pequeñas. En consecuencia, la condición que debe cumplirse es:

$$G\,\frac{m_T}{r_T^3}\,r' = g\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{g}{r_T}\,r' = g\left(1 - \frac{2h}{r_T}\right)$$

De donde se obtiene:

$$r' = r_T - 2h$$

Puesto que r' es la distancia desde el centro terrestre hasta el punto considerado, la profundidad pedida será: $x = 2h$.

9 ¿Por qué produce la rotación terrestre un abultamiento ecuatorial y un achatamiento por los polos en nuestro planeta?

En la zona ecuatorial, la aceleración centrífuga alcanza su máximo valor, al ser también máxima la distancia al eje de rotación. Al actuar, en este caso, en la misma dirección que $\vec{g}$, el valor de $\vec{g}_{\text{efectiva}}$ es algo menor. Por esta razón, la Tierra presenta un abultamiento en la zona ecuatorial. Por el contrario, en las zonas polares, la aceleración centrífuga es nula, y $\vec{g}_{\text{efectiva}} = \vec{g}$, por lo que su valor es mayor. De ahí que la Tierra presente un achatamiento en las zonas polares.

10 Determina qué ángulo separa la vertical de la dirección radial en una latitud de 40°.

La relación que existe entre la componente horizontal y la radial de $\vec{g}_{\text{efectiva}}$ nos da la tangente del ángulo α, que separa la vertical de la dirección radial y es:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\omega^2 r_T \cos\varphi \cdot \text{sen}\,\varphi}{g - \omega^2 r_T \cos^2\varphi} = 0{,}0017$$

Por lo que $\alpha = 0{,}097°$.

Para obtener este valor, se ha tenido en cuenta que $\omega = 2\pi/86\,400$ rad/s. Obsérvese que la desviación de la vertical con respecto a la dirección radial es sumamente pequeña.

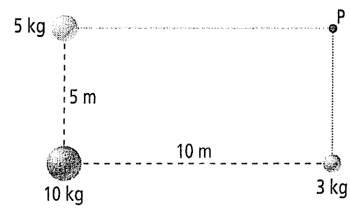
11 Calcula los valores de la gravedad efectiva en las latitudes canarias (aprox. 28°) y cantábricas (aprox. 43°). Considera $g = 9{,}81$ N/kg.

La gravedad efectiva viene dada por la expresión **3.5,** en la que se observa la variación con la latitud del lugar, φ. La velocidad angular de la Tierra puede ponerse en función del periodo de rotación: $\omega = 2\pi/T$. Sabemos que el periodo es de 24 horas, es decir, de 86 400 s. Por tanto:

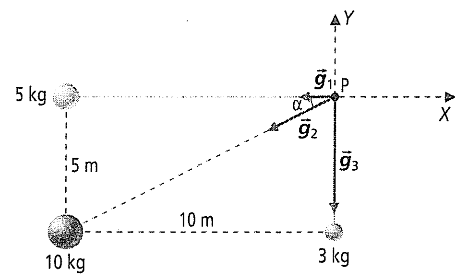
$$g_{\text{Canarias}} = g - \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 = 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \cos^2 28 = 9{,}783\,7\ \text{m/s}^2$$

$$g_{\text{Cantabria}} = g - \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 = 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot \cos^2 43 = 9{,}792\,0\ \text{m/s}^2$$

12 Determina el campo producido en el punto P por la distribución de masas de la siguiente figura.



Representemos primero los vectores de campo producidos por la distribución de masas en el punto P.



El campo total será la suma vectorial de los campos originados por las distintas masas:

$$\vec{g}_{\text{total}} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

Para la masa m_1, el campo creado será:

$$\vec{g}_1 = -G\,\frac{m_1}{r_1^2}\,\vec{i} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5\ \text{kg}}{(10\ \text{m})^2}\,\vec{i} =$$
$$= -3{,}335 \cdot 10^{-12}\,\vec{i}\ \text{N/kg}$$

Así, para la masa m_2, tendremos que:

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\cos\alpha\,\vec{i} - G\frac{m_2}{r_2^2}\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j} =$$

$$= -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{10\ \text{kg}}{(\sqrt{125\ \text{m}})^2} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{10}{\sqrt{125}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{125}}\vec{j}\right) =$$

$$= (-4{,}772 \cdot 10^{-12}\vec{i} - 2{,}386 \cdot 10^{-12}\vec{j})\ \text{N/kg}$$

Y, para m_3:

$$\vec{g}_3 = -G\frac{m_3}{r_3^2}\vec{j} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{3\ \text{kg}}{(5\ \text{m})^2}\vec{j} =$$

$$= -8{,}004 \cdot 10^{-12}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

Entonces, el campo total será:

$$\vec{g}_{\text{total}} = (-8{,}107 \cdot 10^{-12}\vec{i} - 1{,}039 \cdot 10^{-11}\vec{j})\ \text{N/kg}$$

Y su módulo será:

$$g = 1{,}317 \cdot 10^{-11}\ \text{N/kg}$$

13 ¿Cuánto trabajo se realiza al desplazar una masa de 1 000 kg desde la superficie terrestre hasta una distancia igual a tres veces el radio de la Tierra?

El trabajo será igual a la variación negativa de la energía potencial, por lo que:

$$W = -G\frac{m_T m}{r_T} - \left(-G\frac{m_T m}{3r_T}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}G\frac{m_T m}{r_T} = -4{,}19 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

El signo negativo del trabajo significa que se realiza contra la atracción gravitatoria.

14 Un sistema consta de cuatro partículas de 10 g situadas en los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?

La energía potencial del sistema será:

$$E_{\text{p total}} = E_{\text{p }12} + E_{\text{p }13} + E_{\text{p }14} + E_{\text{p }23} + E_{\text{p }24} + E_{\text{p }34}$$

Las distancias r_{13} y r_{24} son las diagonales del cuadrado y valen 0,28 m. Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$E_{\text{p total}} = -G \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}\left(\frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}2} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{0{,}28} + \frac{1}{0{,}2}\right) = -G \cdot 10^{-4}\left(\frac{4}{0{,}2} + \frac{2}{0{,}28}\right) =$$

$$= -1{,}8 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

15 PAU Cuatro masas de 2, 4, 3 y 0,4 kg, respectivamente, se encuentran en los vértices de un cuadrado de 2 m de lado. ¿Cuánto vale el potencial en el centro del cuadrado? ¿Qué energía potencial adquirirá una masa de 10 kg colocada en dicho punto?

La distancia de cada vértice al centro del cuadrado es igual a $\sqrt{2}$ m. Así pues:

$$V = -\frac{G}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right)$$

Sustituyendo los datos queda:

$$V = -4{,}43 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}$$

Por su parte, la energía potencial que adquiriría una masa $m' = 10$ kg situada en dicho punto será:

$$E_p = m'V = -4{,}43 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

16 PAU El potencial gravitatorio debido a cierta masa varía a lo largo de la dirección X según la expresión:

$$V(x) = -\frac{2 \cdot 10^{-7}}{x}\ \text{J/kg}$$

Determina:

a) **El valor de la masa, considerada puntual, que origina dicho potencial.**

b) **La expresión vectorial del campo gravitatorio en $x = 10$ m y en $x = 20$ m.**

a) Sabemos que el potencial creado por una masa puntual viene dado por la expresión:

$$V(x) = -G\frac{m}{x}$$

b) El campo es el gradiente del potencial cambiado de signo:

$$\vec{g} = -\frac{\delta V}{\delta x}\vec{i} = -\frac{2 \cdot 10^{-7}}{x^2}\vec{i}$$

Por tanto:

$$\vec{g}(x = 10) = -2 \cdot 10^{-9}\vec{i}$$

$$\vec{g}(x = 20) = -5 \cdot 10^{-10}\vec{i}$$

17 ¿Qué valor tiene el campo gravitatorio en el punto A de la figura 3.23? Razona tu respuesta.

En dicho punto, los campos gravitatorios lunar y terrestre son iguales y de sentidos opuestos, por ello el campo neto es nulo.

18 ¿Cuánto vale la velocidad de escape del Sol a una distancia igual al radio orbital terrestre? ¿Qué te sugiere el resultado?

La velocidad de escape de la atracción gravitatoria solar a esa distancia (149 600 000 km) es:

$$v = \sqrt{\frac{2Gms}{r}} = 42\,230\ \text{m/s} = 42{,}23\ \text{km/s}$$

La conclusión que se extrae de este resultado es que la velocidad de escape terrestre no es suficiente para abandonar el campo gravitatorio solar. Como se comenta en el texto, las sondas que han abandonado el sistema solar han tenido que adquirir la velocidad necesaria haciendo uso de la llamada «asistencia gravitacional».

Cuestiones y problemas (páginas 102/103)

Guía de repaso

1 ¿Qué importante diferencia se establece a partir de los trabajos de Maxwell en el tratamiento de la interacción a larga distancia y que marca una significativa diferencia entre el concepto de campo y el de acción a distancia?

Las interacciones entre cuerpos a distancia no son instantáneas, sino que se propagan a la velocidad límite de la luz.

2 ¿Qué se entiende por campo gravitatorio?

Campo gravitatorio es aquella región del espacio cuyas propiedades son perturbadas por la presencia de una masa m.

3 ¿Qué magnitudes se utilizan como inherentes o propias del campo gravitatorio? ¿Y cuáles se usan para describir la interacción del campo con una partícula testigo?

Las magnitudes que definen el campo son la Intensidad del campo en un punto y el potencial del campo.

Las magnitudes que se utilizan para describir la interacción del campo con una partícula testigo son la fuerza que actúa sobre la partícula como medida de la interacción, y la energía potencial de la partícula asociada a su posición relativa en el campo.

4 ¿Cuál es la expresión para la intensidad del campo debido a una masa puntual en un punto P distante?

$$\vec{g} = -Gm/r^2\vec{u}_r,\ \text{o bien}\ g = F/m'$$

donde m es la masa que origina el campo y m', la testigo.

5 **¿Cómo es el campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior? ¿Y en uno interior? ¿Podrías demostrar tu respuesta a esta última cuestión desde un punto de vista cualitativo?**

El campo gravitatorio debido a una corteza esférica en un punto exterior es idéntico al que se obtendría si toda la masa de la corteza estuviera concentrada en su centro. En un punto interior el campo es nulo. Véase la demostración dada en la página 87.

6 **¿Bajo qué aproximaciones equivale el campo creado por una esfera sólida en un punto exterior de esta al de esa misma masa considerada puntual y concentrada en el centro de la esfera?**

Hay que suponer que la densidad de la esfera es uniforme o varía solo con la distancia al centro, o decir, de modo isotrópico.

7 **¿De qué forma varía el campo en el interior de una esfera sólida? ¿Bajo qué suposiciones?**

Varía linealmente con la distancia al centro hasta hacerse cero en dicho punto. La suposición que hay que hacer es que la densidad de la esfera es uniforme.

8 **¿Cómo se modifica la aceleración gravitatoria efectiva en la superficie en función de la altitud? ¿Y en función de la latitud?**

En función de la altitud: $g_{\text{efectiva}} = g\left(1 - \dfrac{2h}{r_T}\right)$

En función de la latitud: $g_{\text{efectiva}} = g - \omega^2 r_T \cos^2 \varphi$

9 **¿En qué condiciones es lícito utilizar el término *mgh*, en el que *g* es constante?**

En pequeñas alturas (véase la página 93).

10 **¿Qué significado físico tiene hablar de energía potencial de un conjunto de partículas?**

La medida del trabajo que debería realizarse para separar el sistema hasta hacer infinita la distancia entre las partículas.

11 **¿Cuál es el significado físico de la energía de amarre o de ligadura?**

Es la energía que debe transferirse por unidad de masa para que un cuerpo abandone completamente un campo gravitatorio.

12 **¿Qué le ocurriría a un cuerpo lanzado desde la Tierra a una velocidad de 11,2 km/s si tenemos presente su situación en el sistema solar?**

Que no llegaría a abandonar el sistema solar.

El campo gravitatorio

13 PAU **Dos cortezas esféricas de distinto radio tienen la misma masa. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto situado a la misma distancia de sus respectivos centros?**

Sí, siempre y cuando el punto considerado sea exterior a ambas cortezas.

14 **Dos cortezas esféricas de la misma densidad tienen distinto radio. ¿Son iguales los valores del campo que originan en un punto equidistante de sus respectivos centros?**

A igualdad de densidad, la corteza de mayor radio (mayor superficie) tendrá mayor masa, por lo que el campo originado por ella en un punto equidistante será también mayor. Si consideramos la densidad como superficial, la masa de cada esfera vendrá dada por $\rho 4\pi r^2$, con lo que queda clara la interdependencia entre la masa y el radio de la corteza.

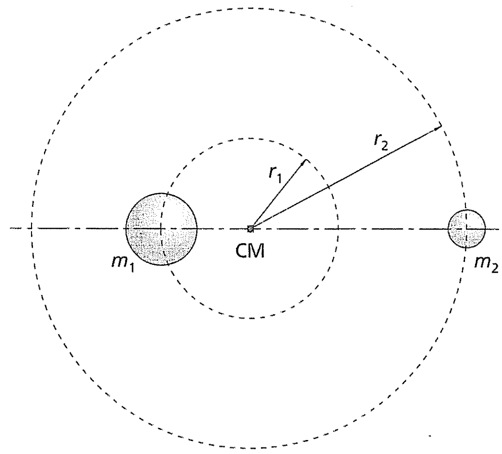
15 PAU **Observa que la variación de $\vec{g}$ con respecto a r en el interior de una esfera sólida puede expresarse mediante la igualdad $\vec{g} = -kr\vec{u}_r$. En consecuencia, ¿cómo varía la fuerza gravitatoria con la distancia en el interior de dicha esfera? ¿Qué fuerzas de las que estudiaste en 1.° de Bachillerato variaban de igual manera con la distancia?**

Varía del modo en que lo hacen las fuerzas restauradoras, como las elásticas, estudiadas en 1.° de Bachillerato. En este caso, la posición de equilibrio sería el centro de la esfera (suponiendo constante la densidad).

16 PAU **Sean dos masas m_1 y m_2 orbitando alrededor del centro de masas del sistema con idéntico período T, a distancias respectivas r_1 y r_2. Dado que es la interacción gravitatoria mutua la que proporciona la fuerza centrípeta necesaria a cada una, demuestra que debe cumplirse que:**

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

La situación descrita en el enunciado se muestra en el siguiente dibujo:



La fuerza gravitatoria que ejerce la masa m_1 sobre m_2 es igual y de sentido contrario a la que ejerce m_2 sobre m_1. Estas dos fuerzas son las responsables de los respectivos movimientos giratorios en torno al centro de masas, es decir:

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_1 v_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2 r_1}{r_1^2} = \frac{m_1 v_2^2 r_2}{r_2^2}$$

Ahora bien, el cociente entre la velocidad lineal y la distancia al centro de masas es la velocidad angular, idéntica para ambas masas. Por tanto, podemos simplificar la anterior igualdad:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Es decir, cuanto más grande sea una masa respecto a la otra, menor será el radio de su órbita respecto al radio de la otra masa.

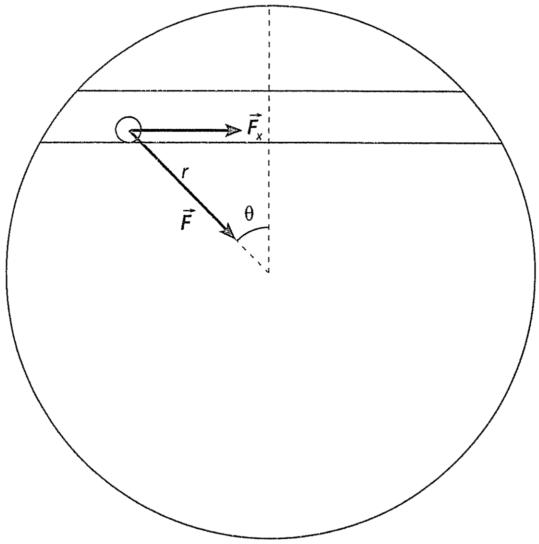
17 **¿Qué tipo de movimiento describiría una partícula en el interior de un hipotético túnel que se cavara desde un punto de latitud 60° N-longitud 0° hasta otro de latitud 60° N-longitud 180°, si la partícula se abandonara en la entrada del túnel?**

Describirá un movimiento oscilatorio bajo la acción de una fuerza variable con la distancia.

Como puede observarse en el dibujo, en este caso es la componente x de la fuerza gravitatoria la que varía con la distancia (la componente y es compensada por la reacción normal de la pared del túnel), con lo que:

$$F_x = F \operatorname{sen} \theta = -G\frac{m_T m}{r_T^3} r \operatorname{sen} \theta = -G\frac{m_T m}{r_T^3} x$$

Es decir, se trata de una fuerza restauradora del tipo $F = -kx$.



18 **Si se mantuviera constante la densidad de la Tierra:**

a) **¿Cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie si su radio se duplicara?**

b) **¿Cómo variaría el peso de los cuerpos en su superficie si su diámetro fuera la mitad?**

a) Puesto que podemos expresar el campo gravitatorio superficial en función de la densidad como:

$$g = \frac{4}{3} G\pi r\rho$$

si el planeta aumenta de tamaño sin variar la densidad, el peso de los cuerpos en la superficie se incrementaría linealmente con r. Concretamente, el radio (o el diámetro) se duplica, el peso también se duplicaría.

b) Haciendo uso de la misma expresión que en el apartado anterior, si el diámetro se reduce a la mitad, g también lo hará en la misma proporción, luego el peso se reducirá también a la mitad.

19 **Considerando que el período de un péndulo en la superficie terrestre viene dado por $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$, donde l es la longitud del péndulo, analiza si un reloj de péndulo que funcionase bien en nuestras latitudes se atrasaría o se adelantaría en las siguientes situaciones:**

a) **El reloj es trasladado al polo Norte.**

b) **El reloj es trasladado al ecuador.**

c) **El reloj asciende a gran altura en un globo aerostático.**

d) **El reloj desciende a gran profundidad en el interior terrestre.**

e) **El reloj viaja en el interior de una estación orbital.**

a) El período disminuye y, en consecuencia, el reloj se adelantaría, pues g aumenta.

b) Ahora g disminuye y el período aumenta, por lo que el reloj se atrasaría.

c) Sucede lo mismo que en ***b)***.

d) En este caso, g disminuye con respecto al valor superficial y el reloj se atrasaría al aumentar el período.

e) El reloj no funcionaría al estar en situación de caída libre.

20 **¿En qué lugar pesa más un cuerpo: en la superficie de nuestro planeta, a 2 000 m de altura o a una profundidad de 2 000 m?**

El mayor valor de g corresponde a la superficie de nuestro planeta, por lo que será ahí donde pese más.

21 **En un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, la aceleración superficial es de 5,4 m/s². Determina cuánto vale comparativamente la densidad (suponiendo que sea constante) del planeta en relación con la densidad terrestre, ρ_T (considerándola también constante).**

El valor de la aceleración gravitatoria de la Tierra es:

$$g_T = \frac{4}{3} G\pi r_T \rho_T = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

En el caso del planeta:

$$g_P = \frac{4}{3} G\pi r_P \rho_P = 5{,}4 \text{ m/s}^2$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{r_P \rho_P}{r_T \rho_T} = 0{,}55$$

Como $r_P = r_T/3$, entonces:

$$\frac{\rho_P}{3 \cdot \rho_T} = 0{,}55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_P = 1{,}65 \cdot \rho_T$$

22 **PAU** **Halla la altura sobre la superficie terrestre a la que debe colocarse un satélite artificial para que su peso se reduzca en un 20 %.**

Dato: radio terrestre = 6 370 km

El satélite deberá situarse en un punto tal que la intensidad del campo valga:

$$0{,}8 \cdot g = 7{,}84 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, a partir de la expresión:

$$g' = G\frac{m_T}{r^2}$$

se puede obtener r:

$$r = \sqrt{\frac{Gm_T}{g'}} = 744\,642{,}6 \text{ m} = 7\,144{,}64 \text{ km}$$

Como $r = r_T + h$, la altura a la que debe colocarse el satélite será:

$$h = r - r_T = 774{,}64 \text{ km}$$

23 **PAU** **Halla el valor que tiene el campo gravitatorio en la superficie del planeta Júpiter, teniendo en cuenta que su masa es 300 veces la de la Tierra, y su radio, 11 veces mayor que el terrestre.**

El valor del campo gravitatorio en la superficie de Júpiter será:

$$g_J = G\frac{m_J}{r_J^2} = G\frac{300 \cdot m_T}{(11 \cdot r_T)^2} = 2{,}48 \cdot g_T$$

Es decir:

$$g_J = 24{,}3 \text{ m/s}^2$$

El campo gravitatorio desde un enfoque energético

24 **Si entendemos que la energía potencial es algo así como la capacidad de realizar un trabajo en función de la posición, ¿consideras acertado el criterio de que la energía potencial es cero en el infinito?**

Como la intensidad del campo, por definición, tiende a cero en el infinito, lo más lógico sería considerar el valor cero de energía potencial a distancia infinita, entendiendo que, al tender el campo a cero, también lo hace la fuerza gravitatoria capaz de realizar el trabajo, por lo que el cuerpo, a distancia infinita, perdería dicha capacidad.

25 **Si elegimos como criterio que la energía potencial es cero en la superficie terrestre, ¿cuánto valdría en el infinito?**

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al desplazar un cuerpo de masa m desde el infinito hasta la superficie de nuestro planeta viene dado, en todos los casos, por:

$$W = \int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -Gmm' \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr =$$
$$= -Gmm' \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r} = G\frac{mm'}{r}$$

Y puesto que el trabajo equivale a la variación negativa de energía potencial:

$$W = -\Delta E_p$$

llegamos a:

$$-\Delta E_p = E_{p\infty} - E_{pr} = G\frac{mm'}{r}$$

Así pues, queda claro que si elegimos como valor cero el de la energía potencial en la superficie, el valor de la energía potencial en el infinito será:

$$E_{p\infty} = G\frac{mm'}{r}$$

donde r es el radio terrestre. Debe entenderse que, sea cual sea el criterio de energía potencial cero elegido, el resultado del cálculo del trabajo efectuado debe ser el mismo.

26 **PAU** ***a)* Determina la velocidad con que llega a la superficie terrestre un cuerpo que se deja caer desde una altura *h* no despreciable medida desde la superficie. Demuestra, asimismo, que si *h* es despreciable comparada con el radio terrestre se obtiene la expresión:**

$$v = \sqrt{2gh}$$

***b)* Determina la velocidad con la que llegará a la superficie terrestre un objeto que es abandonado en reposo a una altura de 5 000 km sobre ella.**

a) Para efectuar el cálculo, consideraremos que la energía mecánica del cuerpo se conserva en la caída. Es decir:

$$(E_p)_r = (E_c + E_p)_{r_T}$$

Sustituyendo llegamos a:

$$-G\frac{m_T m}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{m_T m}{r_T}\right)$$

Si despejamos v y desarrollamos la expresión teniendo en cuenta que $r = r_T + h$, obtenemos:

$$v = \sqrt{2Gm_T \frac{h}{r_T^2 + r_T h}}$$

Esta es la expresión general de la velocidad de un objeto que cae desde cualquier altura, por grande que sea, cuando llega al suelo. Observemos que, si consideramos que la altura h es pequeña comparada con el radio terrestre, podemos despreciar en el denominador $r_T h$ frente a r_T^2, con lo que nos queda la conocida expresión (válida sólo para alturas pequeñas):

$$v = \sqrt{2gh}$$

b) La expresión general de la velocidad puede simplificarse del siguiente modo:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T^2} \cdot \frac{h}{1 + h/r_T}} = \sqrt{2g\frac{h}{1 + h/r_T}}$$

Sustituyendo el valor de la altura h, resulta:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{5 \cdot 10^6}{1 + \frac{5 \cdot 10^6}{6{,}37 \cdot 10^6}}} = 7\,409{,}7 \text{ m/s}$$

En este cálculo no se ha tenido en cuenta la fricción del aire, que frena a todo cuerpo en su caída.

27 **Si el campo en el interior de una esfera sólida homogénea varía conforme a *r*, ¿cómo lo hará el potencial en función de *r* en el interior de dicha esfera?**

El potencial en el interior de la esfera variará conforme a r^2. La razón es que, si consideramos los puntos situados a lo largo de una dirección en el interior de la esfera, la relación que existe entre el campo y el potencial en los puntos de dicha recta viene dada por la expresión $g = -dV/dr$, por lo que V debe depender de r^2 para obtener la correspondiente variación lineal de g con r.

28 **¿Qué puede decirse del potencial gravitatorio en el interior de una corteza esférica?**

Puede decirse que será constante. Usando la relación entre g y V ($g = -dV/dr$), dado que $g = 0$ en el interior de una corteza esférica, el potencial ha de ser constante.

29 **PAU** **Tres partículas cuyas masas son 2, 4 y 0,3 kg se encuentran situadas en los vértices de un triángulo equilátero de 8,66 m de altura. ¿Cuál es la energía potencial del sistema?**

La energía potencial del sistema será:

$$E_p = -\frac{G}{l}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)$$

donde:

$$l = \frac{h}{\text{sen } 60^\circ} = 10 \text{ m}$$

Por tanto:

$$E_p = -6{,}53 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

30 **PAU** **¿A qué altura de la superficie terrestre ascendería un objeto lanzado verticalmente desde dicha superficie con una velocidad de 5 km/s?**

El objeto lanzado verticalmente alcanzará la altura máxima cuando $E_{c\,\text{final}} = 0$, por lo que:

$$E_{c\,\text{inicial}} + E_{p\,\text{inicial}} = E_{p\,\text{final}}$$

de donde:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mm_T}{r_T} = -G\frac{mm_T}{r_T + h}$$

Simplificando, cambiando de signo e invirtiendo términos se obtiene:

$$h = \frac{v_0^2 r_T^2}{2Gm_T - v_0^2 r_T}$$

Sustituyendo los valores:

$$h = 1\,590\,460 \text{ m} = 1\,590{,}46 \text{ km}$$

Luego:

$$\frac{1}{\frac{2Gm_T}{r_T} - v_0^2} = \frac{r_T + h}{2Gm_T}$$

Despejando h y simplificando, resulta la siguiente expresión, que permite obtener la altura:

$$\frac{2Gm_T - r_T}{2Gm_T - v_0^2 r_T} = r_T + h$$

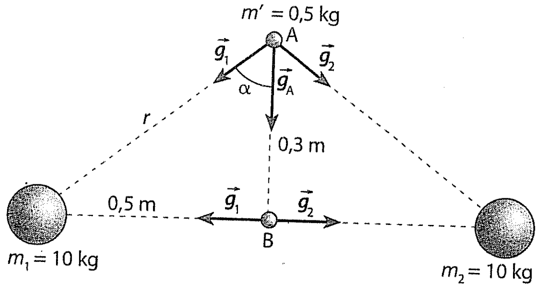
31 **PAU** **Dos masas puntuales de 10 kg cada una se encuentran fijas en dos puntos separados por una distancia de 1 m. Una tercera masa de 0,5 kg se abandona en un punto A equidistante de ambas y situado a 30 cm por encima del punto medio B del segmento que las une. Calcula:**

***a)* La aceleración de la tercera masa en los puntos A y B.**

***b)* La velocidad que llevará cuando pase por el punto B.**

***c)* El tipo de movimiento que describe.**

La figura siguiente ilustra el enunciado del problema:



a) Según se desprende de la figura:

$$r = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}3^2} = 0{,}58 \text{ m}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{0{,}5}{0{,}58}$$

El ángulo α es:

$$\alpha = 59°$$

La intensidad del campo debido a m_1 en el punto A es:

$$\vec{g}_1 = G\frac{m_1}{r^2}(-\text{sen } 59°\vec{i} - \cos 59°\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

y la del originado por m_2 es:

$$\vec{g}_2 = G\frac{m_2}{r^2}(\text{sen } 59°\vec{i} - \cos 59°\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

Así pues, la intensidad del campo en el punto A, teniendo en cuenta que $m_1 = m_2$, es:

$$\vec{g}_A = -2G\frac{m_1}{r^2} \cdot \cos 59°\vec{j} = -2 \cdot 10^{-9}\vec{j} \text{ m/s}^2$$

Es decir, la aceleración gravitatoria debida a m_1 y m_2 en el punto A es $2 \cdot 10^{-9}$ m/s^2.

Sin embargo, en el punto B, la aceleración gravitatoria total es cero, pues los dos campos se anulan mutuamente.

b) Por el principio de conservación de la energía mecánica, se cumplirá que:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

es decir:

$$E_{cB} - E_{cA} = E_{pA} - E_{pB}$$

donde $E_{cA} = 0$.

Por supuesto, la energía potencial en A es:

$$E_{pA} = m'V_A = m'\left(-2G\frac{m}{r}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{pA} = -1{,}15 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

mientras que la energía potencial en B es:

$$E_{pB} = m'V_B = m'\left(-2G\frac{m}{x}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$E_{pB} = -1{,}335 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Así pues:

$$\frac{1}{2}m'v^2 = E_{pA} - E_{pB} = 1{,}85 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Despejando la velocidad, se obtiene:

$$v = 2{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

c) Las condiciones del movimiento en el que la v_0 es igual a cero en el punto A y distinta de cero en el punto B, y la aceleración es distinta de cero en el punto A y cero en el punto B, para, a continuación, invertir su sentido.

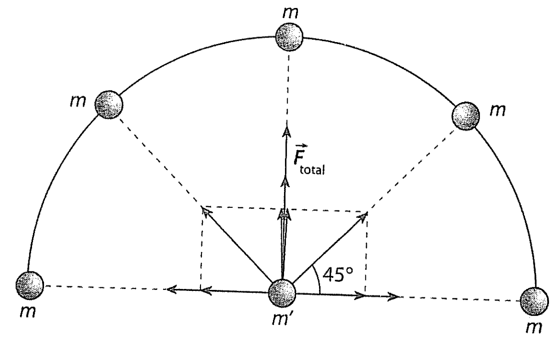
Estas condiciones, permiten predecir que el movimiento de la partícula será oscilatorio y que tendrá como punto de equilibrio el punto B.

32 PAU **Cinco masas de 4 kg cada una están en posiciones equidistantes sobre el arco de una semicircunferencia de 80 cm de radio. Una masa de 0,5 kg se sitúa en el centro de curvatura de dicho arco. Determina:**

a) La fuerza que actúa sobre dicha masa.

b) La energía potencial de dicha masa en ese punto.

a) La siguiente figura ilustra el enunciado de este problema:



Al ser iguales las cinco masas, la fuerza resultante sobre m' es:

$$\vec{F}_{total} = (F + 2 \cdot F \text{ sen } 45°)\vec{j} \text{ N}$$

Es decir:

$$\vec{F}_{total} = \left[G\frac{mm'}{r^2}(1 + \sqrt{2})\right]\vec{j} \text{ N}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$\vec{F}_{total} = 5{,}02 \cdot 10^{-10}\vec{j} \text{ N}$$

b) La energía potencial de la masa m' en el punto indicado es:

$$E_p = m'V = m'\left(-G\frac{5 \cdot m}{r}\right) = -8{,}34 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Movimiento de cuerpos en campos gravitatorios

33 **Un satélite artificial en movimiento circular alrededor del planeta O es acelerado cuando pasa por el punto P. Razona cuál de las siguientes figuras refleja la nueva órbita en la que se moverá el satélite.**

A la vista de las posibles órbitas, el satélite sigue teniendo energía total negativa tras pasar por P, es decir, describe una elipse. Si suponemos que, tras la aceleración, el satélite sigue sujeto exclusivamente a la atracción gravitatoria que ejerce el planeta O, este deberá estar situado en uno de los focos de la elipse que describe la trayectoria. En consecuencia, la trayectoria válida será la ***a***.

34 **Un objeto celeste que proviene del exterior del sistema solar pasa muy cerca de la atmósfera terrestre con una velocidad de 15 km/s. ¿Quedará fijado en una órbita alrededor de la Tierra? ¿Quedará capturado en el sistema solar?**

El objeto no quedará fijado en ninguna órbita alrededor de la Tierra, dado que su velocidad es superior a la de escape terrestre. Sin embargo, sí quedará atrapado en el sistema solar, pues su velocidad es inferior a la que se requiere para escapar del sistema solar. No se consideran aquí posibles asistencias gravitatorias que podrían catapultarlo fuera del sistema.

35 **Si el radio lunar es 0,27 veces el terrestre y la masa lunar es 0,012 veces la terrestre, ¿cuál es la velocidad de escape de la superficie lunar? ¿Cuánto valdrá la energía de ligadura lunar por kilogramo de masa?**

Considerando en la expresión **3.12** la masa y el radio lunar en comparación con los datos terrestres, podemos concluir que:

$$v_{\text{escape lunar}} = 0{,}21 \cdot v_{\text{escape terrestre}} = 2{,}35 \text{ km/s}$$

Por otra parte, sustituyendo los valores ofrecidos en la expresión de la energía de ligadura, comprobamos que en el caso lunar vale:

$$E_{\text{ligadura lunar}}/\text{kg} = 0{,}044 \cdot E_{\text{ligadura terrestre}} = 2{,}76 \cdot 10^6 \text{ J}$$

36 **¿Puede orbitar un satélite en torno a la Tierra sin que su plano orbital contenga en su interior el centro terrestre?**

No puede orbitar en esas condiciones. La fuerza central que mantiene al satélite en órbita ha de estar dirigida hacia el centro terrestre, lo que obliga a que la Tierra esté contenida en el plan orbital.

D37 **PAU** **Desde la superficie terrestre se lanza un satélite; al llegar a la máxima altura *r* medida desde el centro terrestre, se le comunica una velocidad horizontal. ¿Qué ocurrirá en cada uno de los siguientes casos?**

a) **La velocidad comunicada es** $v_1 = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}$**.**

b) **La velocidad comunicada está comprendida entre** v_1 **y** $\sqrt{2}v_1$**.**

c) **La velocidad comunicada es mayor o igual a** $\sqrt{2}v_1$**.**

a) La energía mecánica del satélite tras proporcionarle la velocidad horizontal es:

$$E = \frac{Gm_Tm}{r} + \frac{1}{2}m\frac{Gm_T}{r} = -\frac{1}{2}\frac{Gm_Tm}{r}$$

Se trata de una velocidad negativa, luego el satélite describirá una órbita cerrada. Además, según se ha visto en el subepígrafe 5.3, la velocidad suministrada es la que da lugar a una órbita circular.

b) En este caso, la energía sigue siendo negativa, pero mayor que la requerida para una órbita circular. Por tanto, la órbita será elíptica.

c) En ese caso, el cuerpo abandona el campo gravitatorio terrestre, siguiendo una trayectoria parabólica (si $v = \sqrt{2}v_1$) o hiperbólica (si $v > \sqrt{2}v_1$).

38 **PAU** **La distancia de la Tierra al Sol es de 152 100 000 km en el afelio, mientras que en el perihelio es de 147 100 000 km. Si la velocidad orbital de la Tierra es de 30 270 m/s en el perihelio, determina, por conservación de la energía mecánica, cuál será su velocidad orbital en el afelio.**

La energía mecánica en el perihelio es:

$$E_{ph} = E_{c\,ph} + E_{p\,ph} = \frac{1}{2}m_Tv_{ph}^2 + \left(-G\frac{m_Tm_S}{r_{ph}}\right)$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$E_{ph} = -2{,}69 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

La energía mecánica se conserva, luego:

$$E_{c\,af} + E_{p\,af} = E_{ph}$$

Por tanto:

$$E_{c\,af} = E_{ph} - E_{p\,af} = E_{ph} - \left(-G\frac{m_Tm_S}{r_{af}}\right)$$

Sustituyendo los datos, se obtiene:

$$E_{c\,af} = 2{,}57 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

Como:

$$v_{af} = \sqrt{\frac{2E_{c\,af}}{m_T}}$$

El resultado será:

$$v_{af} = 29\,247{,}5 \text{ m/s}$$

39 **Los agujeros negros se denominan así porque su increíble densidad hace que su acción gravitatoria sea tan intensa que ni la luz tiene suficiente velocidad de escape para salir de él. A la distancia crítica en la que este hecho sucede (medida desde el centro del agujero) se la denomina «radio de Schwarzchild». ¿Cuál sería este radio para un agujero de diez masas solares?**

En el límite del radio de Schwarzchild, la velocidad de escape es *c*, por lo que:

$$c = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} \Rightarrow r = \frac{2Gm}{c^2}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene:

$$r = 29\,644 \text{ m} = 29{,}64 \text{ km}$$

40 **PAU** **Determina la velocidad de escape de la superficie de un planeta cuyo radio es un tercio del terrestre, y cuya aceleración gravitatoria en la superficie es de 5,4 m/s².**

Datos: $R = 6\,370$ **km;** $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ **N m²/kg²;** $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ **kg**

La velocidad de escape será:

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} = \sqrt{\frac{2Gm}{r^2} \cdot r} = \sqrt{2g'r}$$

donde $r = r_T/3$, por lo que:

$$v = \sqrt{2/3\, g'r_T} = 4\,800 \text{ m/s}$$

Para ello, se ha considerado que $r_T = 6\,400$ km.

D41 **PAU** **Una sonda espacial de 1 000 kg se halla en una órbita circular de radio 2*R* alrededor de la Tierra. ¿Cuánta energía se requiere para transferir la sonda hasta otra órbita circular de radio 3*R*? Analiza los cambios en la energía cinética, potencial y total.**

La energía potencial viene dada por la expresión general:

$$E_p = -\frac{Gm_Tm}{r}$$

Si las órbitas son circulares, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_Tm}{r^2}$$

Por tanto, la energía cinética valdrá:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm_Tm}{2r}$$

En ambas expresiones, *r* es el radio de la órbita. Para la primera órbita, obtenemos:

$$E_{p1} = -\frac{Gm_Tm}{2R}; E_{c1} = \frac{Gm_Tm}{4R} \Rightarrow E_{\text{total }1} = -\frac{Gm_Tm}{4R}$$

Mientras que para la segunda órbita:

$$E_{p2} = -\frac{Gm_Tm}{3R}; E_{c2} = \frac{Gm_Tm}{6R} \Rightarrow E_{\text{total }2} = -\frac{Gm_Tm}{6R}$$

La energía necesaria para transferir la sonda de una órbita a otra será la diferencia entre estas dos energías totales:

$$\Delta E = E_{\text{total }2} = -\frac{Gm_Tm}{R} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{Gm_Tm}{12R}$$

Sustituyendo los valores, esta energía resulta ser de $5{,}24 \cdot 10^9$ J.

Tanto la energía potencial como la cinética en la segunda órbita tienen valores que resultan de multiplicar por 2/3 los de la primera órbita. Sin embargo, en el caso de la energía potencial, esta aparente reducción es en realidad un aumento, al tratarse de una energía negativa. Del mismo modo, la energía total de la segunda órbita es 2/3 de la energía total de la primera órbita. Sin embargo, al tratarse de una energía negativa, en realidad se ha producido un aumento de energía, como puede verse en el signo de ΔE, positivo.

42 **PAU** **Un satélite artificial de 1 200 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 2 300 km sobre la superficie terrestre. Determina su momento angular con respecto al centro terrestre.**

El momento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Luego su módulo será $L = mrv$, donde r es el radio de la órbita: $r = R + h = 8{,}67 \cdot 10^6$ m. Sabemos que la fuerza centrípeta que mantiene al satélite en su órbita es la fuerza gravitatoria:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm_T m}{r^2} = v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = 6\,794 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión del módulo del momento angular, resulta:

$$L = mrv = 7{,}07 \cdot 10^{13} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

Lo calculado es el módulo del momento angular. La dirección del vector $\vec{L}$ será perpendicular al plano de la órbita, mientras que el sentido viene determinado por la regla de la mano derecha.

D43 **PAU** **Las grandes estrellas (de masas superiores a 1,4 veces la solar) acaban el ciclo de sus vidas colapsándose o aplastándose gravitacionalmente, formando diminutas estrellas de neutrones de unos 40 km de diámetro. Supón que eso pudiera sucederle al Sol, que tiene $1{,}39 \cdot 10^9$ m de diámetro y que gira una vez cada 27 días.**

a) **¿Cuál sería la nueva velocidad angular de «Sol neutrónico», expresada en vueltas o revoluciones por segundo?**

b) **¿Cuál sería la gravedad superficial en la estrella de neutrones formada?**

c) **¿Cuál sería la velocidad de escape de su superficie?**

Nota: considera que la masa del Sol sigue siendo la misma durante el proceso.

a) En el proceso de colapso de las estrellas de gran tamaño, el momento angular se mantiene constante al no existir fuerzas externas capaces de modificarlo. Sabemos que $L = I\omega$.

El momento de inercia para una esfera maciza que gira alrededor de un diámetro es:

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Puesto que el momento angular se conserva:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_1^2\omega_1 = R_2^2\omega_2$$

En esta expresión, conocemos R_1, R_2 y la velocidad angular ω_1, que podemos expresar como $2\pi/27$ rad/día.

Sustituyendo los datos, resulta que $\omega_2 = 2{,}81 \cdot 10^8$ rad/día, lo cual corresponde a un período $T = 2{,}236 \cdot 10^{-8}$ días $\approx$ $\approx 0{,}002$ s.

Es decir, el período de rotación resulta ser de unas dos milésimas de segundo.

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la estrella colapsada será:

$$g = G\frac{M_{Sol}}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{1{,}98 \cdot 10^{30}}{(2 \cdot 10^4)} = 3{,}3 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2$$

c) La velocidad de escape viene dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{Sol}}{R_{Sol\ neutrónico}}}$$

Sustituyendo los datos, resulta una velocidad de escape de $1{,}15 \cdot 10^8$ m/s.