# 4 Representación de funciones

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1. Ejercicio resuelto.**

**2. Indica los puntos de discontinuidad, singulares y críticos para las siguientes funciones.**

**a)** $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+5}{2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2+4}$ **c)** $f(x)=x+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}$ **d)** $f(x)=|x+1|+|x-3|$

**a)** $D(f)=\mathbb{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

$f'(x)=\dfrac{3x^2-6x}{2}=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$ son los puntos singulares y críticos.

**b)** $x^3+x^2+4=(x+2)(x^2-x+2)=0 \Rightarrow x=-2$ es un punto de discontinuidad.

$f'(x)=\dfrac{-x(3x+2)}{(x^3+x^2+4)^2}=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-\dfrac{2}{3}$ son los puntos singulares y críticos.

**c)** $D(f)=\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. En $x=-\dfrac{1}{2}$ la función es continua solo por la derecha : $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}}\neq 0$ .

No hay puntos singulares y no hay puntos críticos, ya que en $x=-\dfrac{1}{2}$ la función no es continua.

**d)** $D(f)=\mathbb{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

Los puntos $x=-1$ y $x=3$ son críticos pero no singulares (en ellos no existe la primera derivada).

**3. Determina los puntos de discontinuidad, singulares y críticos de las siguientes funciones.**

**a)** $f(x)=x+\operatorname{sen}x$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ **c)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-4}$ **d)** $f(x)=e^{|x|}$

**a)** $D(f)=\mathbb{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

$f'(x)=1+\cos x=0 \Rightarrow x=(2k+1)\pi$ , con $k\in\mathbb{Z}$ son puntos singulares y críticos.

**b)** $D(f)=(-2,0]\cup(2,+\infty)$. Es continua en todo su dominio.

$f'(x)=\dfrac{-x^2-4}{2\sqrt{x}(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ , $x=0$ es punto crítico, pues aunque existe la función no es derivable en ese punto.

**c)** $D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Es discontinua para $x=2$ y $x=-2$.

$f'(x)=\dfrac{-x(x^2+12)}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2+4}}=0 \Rightarrow x=0.$ Es un punto singular y crítico.

**d)** $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x>0 \\ -e^{-x} & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad ni singulares. El punto $x=0$ es un punto crítico.

**4 y 5. Ejercicios resueltos.**

**6. Estudia las simetrías de las funciones:**

**a)** $f(x)=1+\dfrac{1+x^2}{x^4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ **c)** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$

**a)** $f(-x)=1+\dfrac{1+(-x)^2}{(-x)^4}=1+\dfrac{1+x^2}{x^4}=f(x)\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje $Y$. Función par.

**b)** $f(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)+1}=\dfrac{-2x}{-x+1}=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow$ No es par ni impar.

**c)** $f(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen de coordenadas. Función impar.

**d)** $f(-x)=\dfrac{-x}{1-|-x|}=-\dfrac{x}{1-|x|}=-f(x)\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen de coordenadas. Función impar.

**7. Indica si las siguientes funciones son periódicas y, en caso afirmativo, indica el período.**

**a)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$ **b)** $f(x)=\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(4x)$ **c)** $f(x)=1+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **d)** $f(x)=x+\operatorname{sen}x$

**a)** $f(x+2\pi)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+2\pi)}{1+\cos(x+2\pi)}=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\Rightarrow$ Función periódica con período $2\pi$.

**b)** $f(x+2\pi)=\operatorname{sen}(3x+2\pi)+\operatorname{sen}(4x+2\pi)=\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(4x)=f(x)\Rightarrow$ Función periódica con período $2\pi$.

**c)** $f(x+\pi)=1+\dfrac{1}{\cos^2(x+\pi)}=1+\dfrac{1}{(-\cos x)^2}=1+\dfrac{1}{\cos^2 x}=f(x)\Rightarrow$ Función periódica con período $\pi$.

**d)** No es periódica.

**8 y 9. Ejercicios resueltos.**

**10. Halla las asíntotas de las siguientes funciones y úsalas para trazar aproximadamente sus ramas infinitas.**

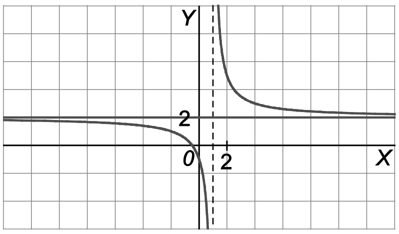
**a)** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$

**a)** $x=1$ es una asíntota vertical porque:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$

$y=2$ es asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2\Rightarrow y=2$.

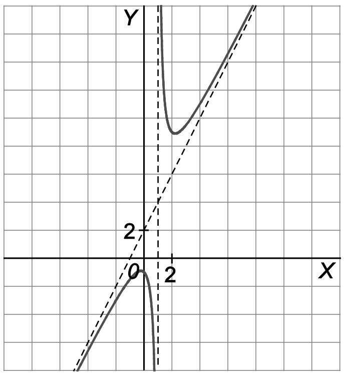
Al haber asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$, no hay oblicuas.




**b)** $x=1$ es asíntota vertical pues $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=-\infty$.

No hay asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=\pm\infty\Rightarrow y=2x+2$ es asíntota oblicua porque:

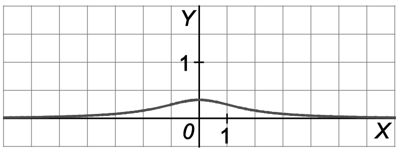
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-x}=2\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+2x}{x-1}=2\end{cases}.$$




**c)** $D=\mathbb{R}$, por tanto, no existen asíntotas verticales.

$y=0$ es asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2+3}=0$.

No hay asíntotas oblicuas.



**11. Dada la función $f(x) = xe^{-2x+1}$, estudia si tiene asíntotas y determina la posición de la curva respecto a ellas.**

Como $D(f) = \mathbb{R}$, solo tiene sentido estudiar su posible existencia en $+\infty$ o $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

Además $f(x) > 0$ si $x$ se acerca a $+\infty$, por tanto, $f$ se acerca a la asíntota por encima.

**12. Ejercicio interactivo.**

**13. Ejercicio resuelto.**

**14. Estudia los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de las funciones siguientes y esboza su gráfica.**

**a)** $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

**b)** $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 13$

**c)** $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{3}{2}x^4 + 3x^3 + 1$

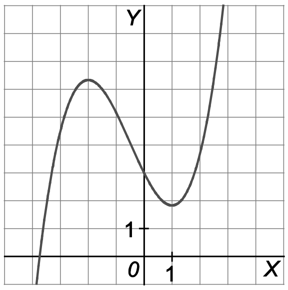
**d)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

**a)** $f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 1$

| | $-\infty$ … $-2$ | $-2$ … $1$ | $1$ … $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

Creciente: $(-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$. Decreciente: $(-2,1)$

Máximo relativo en $x = -2$. Mínimo relativo en $x = 1$.

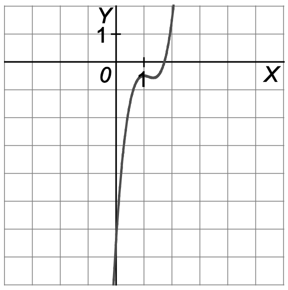



**b)** $f'(x) = 3x^2 - 14x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = \dfrac{8}{3}$

| | $-\infty$ … $2$ | $2$ … $\frac{8}{3}$ | $\frac{8}{3}$ … $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↗ |

Creciente: $(-\infty,2) \cup \left(\dfrac{8}{3},+\infty\right)$. Decreciente: $\left(2,\dfrac{8}{3}\right)$

Máximo relativo en $x = 2$. Mínimo relativo en $x = \dfrac{8}{3}$.

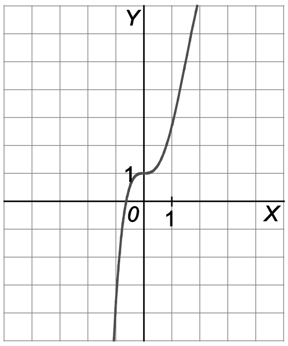



**c)** $f'(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$

| | $-\infty$ … $0$ | $0$ … $3$ | $3$ … $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↗ | ↗ |

Creciente en todo $\mathbb{R}$.

No tiene extremos relativos.

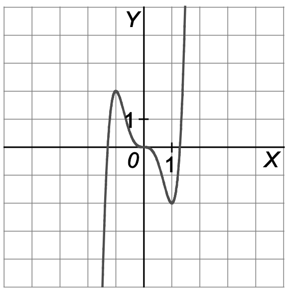



**d)** $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 0,\ x = 1$

| | $-\infty$ … $-1$ | $-1$ … $0$ | $0$ … $1$ | $1$ … $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | − | + |
| $f(x)$ | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ |

Creciente: $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Decreciente: $(-1,1)$

Máximo relativo en $x = -1$. Mínimo relativo en $x = 1$.



**15. Indica la concavidad y los puntos de inflexión de $f(x)=x^3-12x$.**

$f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$

$f''(x)<0$ en $(-\infty,0)$. Cóncava hacia abajo: $(-\infty,0)$

$f''(x)>0$ en $(0,+\infty)$. Cóncava hacia arriba: $(0,+\infty)$

Punto de inflexión en $(0,0)$.

**16. En cada caso, calcula los valores de *a* y *b* para que:**

**a)** $f(x)=x^3+ax^2+bx-113$ tenga un máximo en $(5,162)$.

**b)** $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+12x-28$ tenga un punto de inflexión en el punto $(2,0)$.

**a)** $f(x)=x^3+ax^2+bx-113$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(5)=162 \Rightarrow 125+25a+5b-113=162 \Rightarrow 25a+5b=150 \Rightarrow 5a+b=30$

$f'(5)=0 \Rightarrow 75+10a+b=0 \Rightarrow 10a+b=-75$

$$\begin{cases} 5a+b=30 \\ 10a+b=-75 \end{cases} \Rightarrow 5a=-105 \Rightarrow \ a=-21,\ b=135.$$

Por tanto, la función buscada es $f(x)=x^3-21x^2+135x-113$.

**b)** $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+12x-28$, $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+12$, $f''(x)=12x^2+6ax+2b$

$f(2)=0 \Rightarrow 16+8a+4b+24-28=0 \Rightarrow 8a+4b=-12 \Rightarrow 2a+b=-3$

$f''(2)=0 \Rightarrow 48+12a+2b=0 \Rightarrow 6a+b=-24$

$$\begin{cases} 2a+b=-3 \\ 6a+b=-24 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{21}{4};\ b=\frac{15}{2}$$

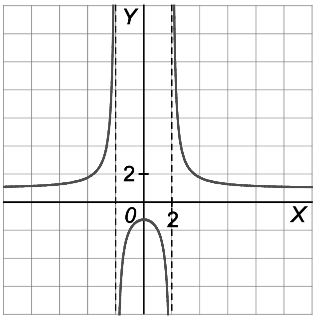
Por tanto, la función buscada es $f(x)=x^4-\frac{21}{4}x^3+\frac{15}{2}x^2+12x-28$.

**17. Ejercicio resuelto.**

**18. Estudia y representa las siguientes funciones.**

**a)** $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{3}{x^2+3}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$

**a)** Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{-2, 2\}$.




Simetría: Presenta simetría respecto al eje $Y$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje $Y$: $\left(0,-\dfrac{5}{4}\right)$; Eje $X$: No tiene.

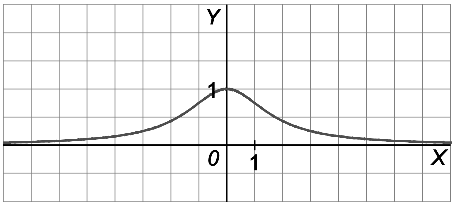
$f(x)>0$ en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y $f(x)<0$ en $(-2,2)$

Asíntotas: Verticales: $x = 2$, $x = -2$.Horizontales: $y = 1$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow$ $x = 0$. Crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0, 2)\cup(2,+\infty)$. Máximo: $\left(0,-\dfrac{5}{4}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{54x^2+72}{(x^2-4)^3}\neq 0\Rightarrow$ No hay puntos de inflexión. Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$.

**b)** Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$.




Simetría: Presenta simetría respecto al eje $Y$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje $Y$: $(0,1)$; Eje $X$: No tiene. $f(x)>0$ en $\mathbb{R}$.

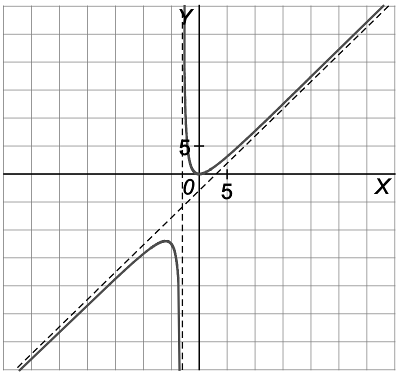
Asíntotas: Horizontales: $y = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-6x}{(x^2+3)^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow$ $x = 0$. Crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,+\infty)$.

Máximo: $(0, 1)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{18(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$, $f''(x)=0\Rightarrow x=1, x=-1$. Puntos de inflexión $\left(1,\dfrac{3}{4}\right)$ y $\left(-1,\dfrac{3}{4}\right)$ y es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$.

**c)** Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$.




Simetría: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje $X$: $(0, 0)$, Eje $Y$: $(0, 0)$

$f(x)<0$ en $(-\infty,-3)$ y $f(x)>0$ en $(-3, 0)\cup(0,+\infty)$

Asíntotas: Verticales: $x = -3$; Oblícuas: $y = x - 3$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{x(x+6)}{(x+3)^2}$

$f'(x)=0\Rightarrow$ $x = 0$, $x = -6$. Crece en $(-\infty,-6)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-6,-3)\cup(-3,0)$. Máximo: $(-6,-12)$ y mínimo $(0, 0)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{18}{(x+3)^3}\neq 0\Rightarrow$ No hay puntos de inflexión. Cóncava hacia arriba en $(-3,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty,-3)$.

**19. Halla el valor de *a* para que la función $f(x) = -\frac{1}{x^2 + a}$ tenga un punto de inflexión en $x = 1$ y calcula el valor de su ordenada.**

Se calcula la segunda derivada de *f*: $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + a)^2}$, $f''(x) = \frac{2a - 6x^2}{(x^2 + a)^3}$. Como $x = 1$ es un punto de inflexión, entonces $f''(1) = 0 \Rightarrow \frac{2a - 6}{(1 + a)^3} = 0 \Rightarrow a = 3$.

$f(1) = -\frac{1}{1+3} = -\frac{1}{4} \Rightarrow I\left(3, -\frac{1}{4}\right)$

**20. Dada la función $f(x) = \frac{2x + m}{x^2 - 4}$:**

Calcula el valor de *m* para que *f* tenga un extremo relativo en $x = 1$.

**b)** Para el valor hallado, comprueba que dicho extremo es un mínimo relativo y calcula su correspondiente ordenada.

**a)** $f'(x) = \frac{-2x^2 - 2mx - 8}{(x^2 - 4)^2}$. Entonces, $f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{-2 - 2m - 8}{9} = 0 \Rightarrow m = -5$

**b)** $f''(x) = \frac{4x^3 - 30x^2 + 48x - 40}{(x^2 - 4)^3}$. Como $f''(1) > 0$, entonces es un mínimo relativo y la ordenada es $f(1) = \frac{2 \cdot 1 - 5}{1^2 - 4} = \frac{-3}{-3} = 1$.

**21 y 22. Ejercicios resueltos.**

**23. Estudia los intervalos de crecimiento y los puntos singulares de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.**

El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$. La función es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$. En este punto presenta un punto crítico.

Como $f'(x) > 0$ para todos los valores $x > 0$ y $f'(x) < 0$ para todos los valores $x < 0$, la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. El $(0, 0)$ es un mínimo relativo.

**24. Halla el valor de *a* para que $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + 1}}$ tenga por asíntota horizontal la recta $y = -3$.**

Si la asíntota es por la derecha $\lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2 + 1}} = -3 \Rightarrow a = -3$.

Si la asíntota es por la izquierda $\lim_{x \to -\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-ax}{\sqrt{x^2 + 1}} = -a = -3 \Rightarrow a = 3$.

**25. Halla las asíntotas oblicuas de $f(x)=\sqrt{2x^2-8}$ .**

$y=\sqrt{2}x$ es asíntota oblicua en $+\infty$ porque:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-8}}{x}=\sqrt{2}\ \text{ y }\ n=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8}{\sqrt{2x^2-8}+\sqrt{2}x}=0$$

$y=-\sqrt{2}x$ es asíntota oblicua en $-\infty$ porque:

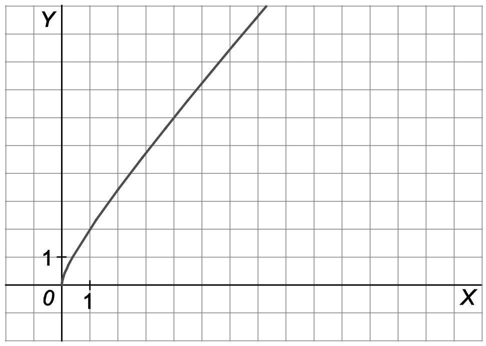
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-8}}{x}=-\sqrt{2}\ \text{ y }\ n=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-8}+\sqrt{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8}{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2}x}=0$$

**26. Traza la gráfica de las siguientes funciones, estudiando su dominio, cortes con los ejes, asíntotas y extremos relativos.**

**a)** $f(x)=x+\sqrt{x}$

**b)** $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

**a)** Dominio: $D(f)=[0,+\infty)$




Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$: $(0,0)$ Eje $Y$: $(0,0)$

Asíntotas:

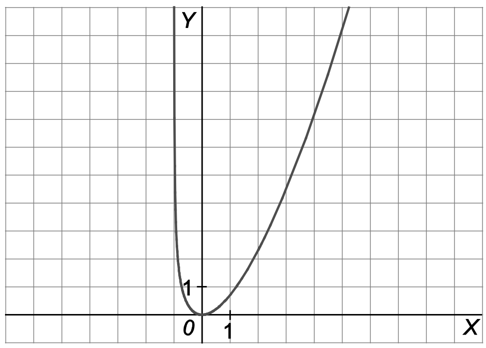
Verticales: No tiene.

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene porque $n=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ .

Máximos y mínimos: No tiene, crece en todo su dominio.

**b)** Dominio: $D(f)=(-1,+\infty)$




Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$: $(0,0)$ Eje $Y$: $(0,0)$

Asíntotas:

Verticales: $x=-1$ porque $\lim_{x\to-1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}=+\infty$ .

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene.

Máximos y mínimos: Mínimo relativo en $(0,0)$. Crece en $(0,+\infty)$ y decrece en $(-1,0)$ .

**27. Ejercicio resuelto.**

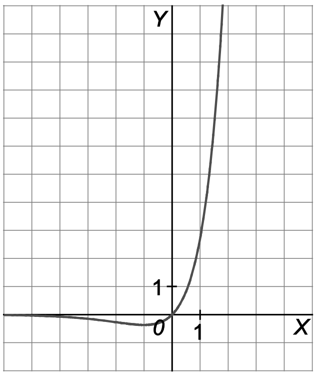
**28. Estudia y traza la gráfica de las siguientes funciones.**

**a)** $f(x) = xe^x$ **b)** $f(x) = e^{x+1}$

**a)** Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$ .

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje *X*: $(0,0)$ Eje *Y*: $(0,0)$




*f* es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$

Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$

Horizontales: $y = 0$ en $-\infty$

porque $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$ (indet.) $= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

Oblicuas: No tiene porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ .

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$

Decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$ . Mínimo en $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad:

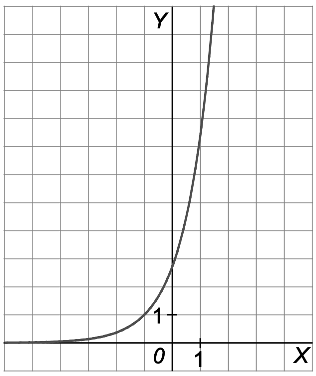
$f''(x) = e^x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$ . Punto de inflexión $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$

**b)** Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$ .

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje *Y*: $(0, e)$




*f* es positiva en todo $\mathbb{R}$ .

Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$

Horizontales: $y = 0$ en $-\infty$ porque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+1} = 0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = e^{x+1} \neq 0$ .

No tiene máximos y mínimos la función es siempre creciente.

Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) = e^{x+1} \neq 0$ . No tiene puntos de inflexión.

Cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$.

**29. Representa la gráfica de las siguientes funciones.**

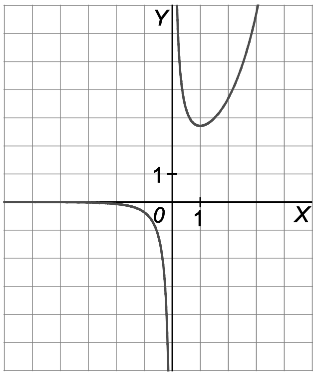
**a)** $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ **b)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4}$

**a)** Dominio: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Puntos de corte con los ejes y signo: No corta a ninguno de los ejes.

$f$ es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$.

Simetrías: La función no es par ni impar.




Asíntotas:

Verticales: $x = 0$ porque $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Horizontales: $y = 0$ en $-\infty$

porque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Mínimo en $(1, e)$.

Puntos de inflexión y concavidad:

$$f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \neq 0$$. No tiene puntos de inflexión.

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

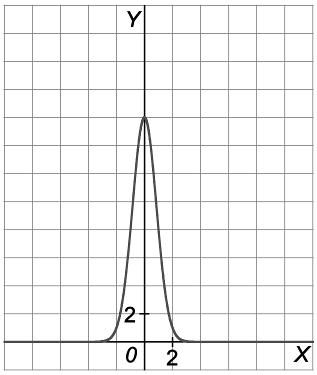
**b)** Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje $X$: No tiene Eje $Y$: $(0, 16)$

$f$ es positiva en todo $\mathbb{R}$

Simetrías: La función es par.




Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$

Horizontales: $y = 0$ en $\pm\infty$ porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4} = 0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} \ln\frac{1}{2} \cdot 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Decrece en $(0, +\infty)$ y crece en $(-\infty, 0)$. Máximo en $(0, 16)$.

**30. Ejercicio resuelto.**

**31. Estudia y traza la gráfica de las siguientes funciones.**

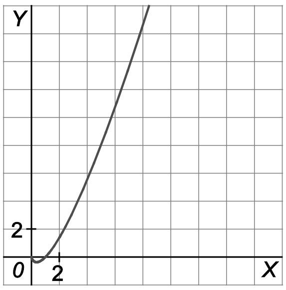
**a)** $f(x) = x\ln x$ **b)** $f(x) = \log\left(x^2 - 1\right)$

**a)** Dominio: $D(f) = (0,+\infty)$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje $Y$: No tiene Eje $X$: $(1,0)$

$f$ es positiva si $x > 1$ y negativa si $x < 1$.




Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: No tiene.

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x) = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

Decrece en $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. Mínimo relativo en $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow$ Cóncava hacia arriba en $(0,+\infty)$.

**b)** Dominio: $D(f) = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje $X$: $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$ Eje $Y$: No tiene

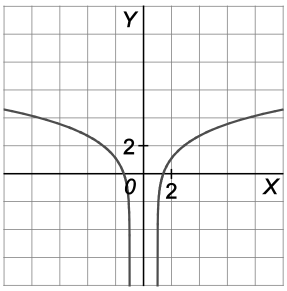
$f$ es positiva en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2},+\infty\right)$ y negativa en $\left(-\sqrt{2},-1\right) \cup \left(1,\sqrt{2}\right)$.

Simetrías: La función es par.

Asíntotas:

Verticales: $x = -1$ es asíntota vertical por la izquierda porque $\lim\limits_{x \to -1^-} \log\left(x^2 - 1\right) = -\infty$

$x = 1$ es asíntota vertical por la derecha porque $\lim\limits_{x \to 1^+} \log\left(x^2 - 1\right) = -\infty$.




Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = \frac{2x}{\left(x^2 - 1\right)\ln 10} \Rightarrow x = 0$ no pertenece al dominio.

Decrece en $(-\infty,-1)$ y crece en $(1,+\infty)$. No presenta extremos relativos.

Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) \neq 0$. No tiene puntos de inflexión. Cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$ y cóncava hacia arriba en $(0,+\infty)$.

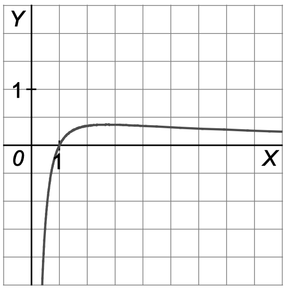
**32. Representa las siguientes funciones logarítmicas.**

**a)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $f(x)=\ln(2x+3)$

**a)** Dominio: $D(f)=(0,+\infty)$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje $Y$: No tiene Eje $X$: $(1,0)$




$f$ es positiva si $x>1$ y negativa si $x<1$.

Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: $x=0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

Horizontales: $y=0$ porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (indet.) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$

Decrece en $(e,+\infty)$ y crece en $(0,e)$. Máximo relativo en $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.

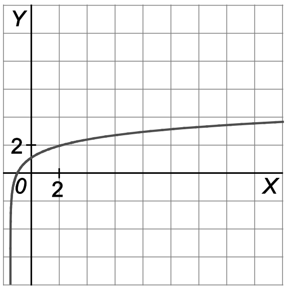
Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow x=e\sqrt{e}$ .

Cóncava hacia abajo en $\left(0,e\sqrt{e}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e\sqrt{e},+\infty\right)$

**b)** Dominio: $D(f)=\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje $X$: $(-1,0)$ Eje $Y$: $(0,\ln 3)$




$f$ es negativa si $x<-1$ y positiva si $x>-1$

Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: $x=-\dfrac{3}{2}$ porque $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+}\ln(2x+3)=-\infty$

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}\neq 0$ no tiene extremos relativos y la función es creciente en todo su dominio.

Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x)\neq 0$. No tiene puntos de inflexión. Cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

**33 y 34. Ejercicios resueltos.**

**35. Estudia y representa las siguientes funciones.**

**a)** $f(x) = \text{sen}(2x)$

**b)** $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$

**c)** $f(x) = \text{tg}(2x)$

**d)** $f(x) = -2 + \cos(2x)$

**a)** Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

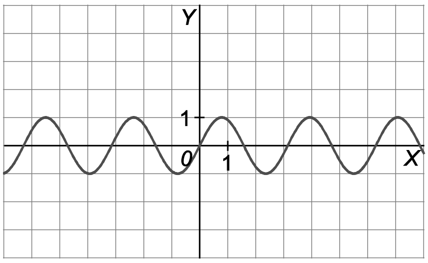
Simetrías: $f(-x) = \text{sen}(-2x) = -\text{sen}(2x) = -f(x) \Rightarrow$ $f$ es impar.

Periodicidad: $f(x+\pi) = \text{sen}(2(x+\pi)) = \text{sen}(2x+2\pi) = \text{sen}(2x) = f(x)$

La función es periódica con período $\pi$. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $[0,\pi]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$:




$$\text{sen}(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 0, 2x = \pi \Rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (0,0), \left(\frac{\pi}{2},0\right), (\pi,0)$$

Eje $Y$: $(0,0)$

Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x) = 2\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$$

Crece en $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$; decrece en $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$; y crece en $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$. Máximo $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$. Mínimo $\left(\frac{3\pi}{4},-1\right)$

**b)** Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

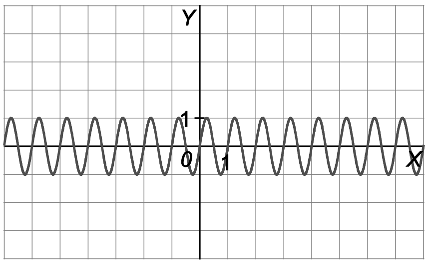
Simetrías: $f(-x) = \text{sen}(-2\pi x) = -\text{sen}(2\pi x) = -f(x) \Rightarrow$ $f$ es impar.

Periodicidad: $f(x+1) = \text{sen}(2\pi(x+1)) = \text{sen}(2\pi x + 2\pi) = \text{sen}(2\pi x) = f(x)$

La función es periódica con período 1. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $[0,1]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$:




$$\text{sen}(2\pi x) = 0 \Rightarrow 2\pi x = 0,\ 2\pi x = \pi \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{2} \Rightarrow (0,0), \left(\frac{1}{2},0\right), (1,0)$$

Eje $Y$: $(0,0)$

Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x) = 2\pi\cos(2\pi x) = 0 \Rightarrow \cos(2\pi x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = \frac{3}{4}$$

Crece en $\left(0,\frac{1}{4}\right)$; decrece en $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$; y crece en $\left(\frac{3}{4},1\right)$. Máximo $\left(\frac{1}{4},1\right)$. Mínimo $\left(\frac{3}{4},-1\right)$

**c)** Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Simetrías: $f(-x)=\mathrm{tg}(-2x)=-\mathrm{tg}(2x)=-f(x)\Rightarrow$ $f$ es impar.

Periodicidad: $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{tg}\left(-2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\mathrm{tg}(-2x-\pi)=\mathrm{tg}(2x)=f(x)$

La función es periódica con período $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

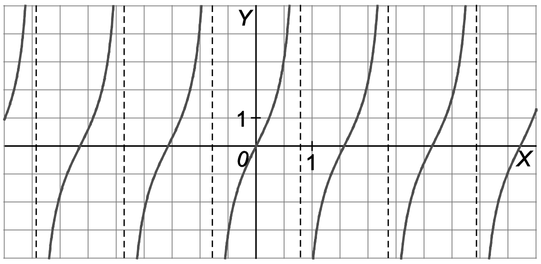
Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$:

$$\mathrm{tg}(-2x)=0\Rightarrow x=0, x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(0,0),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

Eje $Y$: $(0,0)$

Asíntotas: Verticales $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.




Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x)=2\left(1+tg^2 2x\right)\neq 0\Rightarrow$ No presenta extremos relativos.

Es creciente en todo su dominio.

**d)** Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$.

Simetrías: $f(-x)=-2+\cos(-2x)=-2+\cos(2x)\Rightarrow$ $f$ es par.

Periodicidad: $f(x+\pi)=-2+\cos(2(x+\pi))=-2+\cos(2x+2\pi)=-2+\cos(2x)=f(x)$

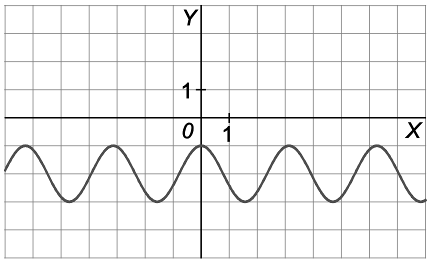
La función es periódica con período $\pi$. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $[0,\pi]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$: No tiene.

Eje $Y$: $(0,-1)$

Asíntotas: No tiene.




Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x)=-2\mathrm{sen}2x=0\Rightarrow \mathrm{sen}2x=0\Rightarrow x=0, x=\frac{\pi}{2}$. Máximo $(0,-1)$, mínimo $\left(\frac{\pi}{2},-3\right)$.

Decrece en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

**36. Haz un estudio y luego representa las siguientes funciones.**

**a)** $f(x) = \text{sen}^2(\pi x)$

**b)** $f(x) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$

**c)** $f(x) = \arccos\left(x^2\right)$

**d)** $f(x) = \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

**a)** Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

Simetrías: $f(-x) = \text{sen}^2(-\pi x) = (-\text{sen}(\pi x))^2 = f(x) \Rightarrow$ $f$ es par.

Periodicidad: $f(x+1) = \text{sen}^2(\pi(x+1)) = \text{sen}^2(\pi x + \pi) = (\text{sen}(\pi x))^2 = f(x)$

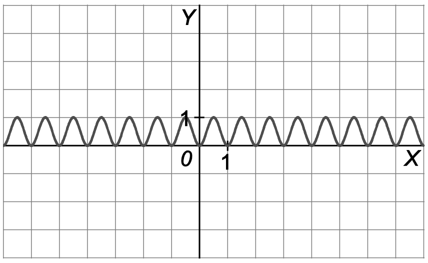
La función es periódica con período 1. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $[0,1]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$:

$\text{sen}^2(\pi x) = 0 \Rightarrow \pi x = 0, \pi x = \pi \Rightarrow x = 0, x = 1 \Rightarrow (0,0),(1,0)$

Eje $Y$: $(0,0)$




Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = 2\pi\text{sen}(\pi x)\cos(\pi x) = 0 \Rightarrow \pi\text{sen}(2\pi x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 1$

Crece en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; decrece en $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Mínimo $(0,0)$. Máximo $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Mínimo $(1,0)$

**b)** Dominio: $D(f) = [-2,2]$.

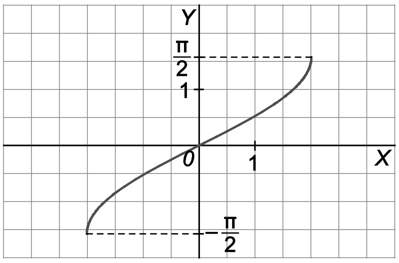
Simetrías: $f(-x) = \text{arcsen}\left(-\frac{x}{2}\right) = -\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) = -f(x) \Rightarrow$ $f$ es impar.

Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$:

$\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

Eje $Y$: $(0,0)$




Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow$ $f$ es siempre creciente.

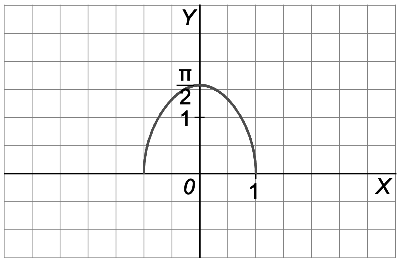
Puntos de inflexión:

$f''(x) = \frac{-x}{\left(x^2-4\right)\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión $(0,0)$.

En $(-2,0)$ cóncava hacia abajo y en $(0,2)$ cóncava hacia arriba.

**c)** Dominio: $D(f)=[-1,1]$.

Simetrías: $f(-x)=\text{arccos}\left((-x)^2\right)=\text{arccos}\left(x^2\right)=f(x)\Rightarrow$ $f$ es par.




Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$:

$$\text{arccos}\left(x^2\right)=0\Rightarrow x^2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0\right),\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},0\right)$$

Eje $Y$: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Asíntotas: No tiene.

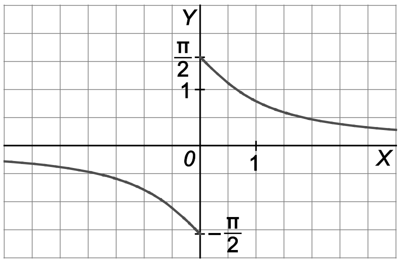
Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}=0\Rightarrow x=0$$

Crece en $(-1,0)$; decrece en $(0,1)$. Máximo $(0,1)$.

**d)** Dominio: $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Simetrías: $f(-x)=\text{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)\Rightarrow$ $f$ es impar.




Puntos de corte con los ejes:

Eje $X$:

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{x}=0\Rightarrow\text{ No hay punto de corte con el eje } X.$$

Eje $Y$: No hay punto de corte con el eje $Y$ porque $f$ no está definida en $x=0$.

Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-1$

Horizontales: $y=0$ en $+\infty$ porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$; $y=0$ en $-\infty$ porque $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}<0\Rightarrow\text{ } f \text{ es siempre decreciente.}$$

Puntos de inflexión:

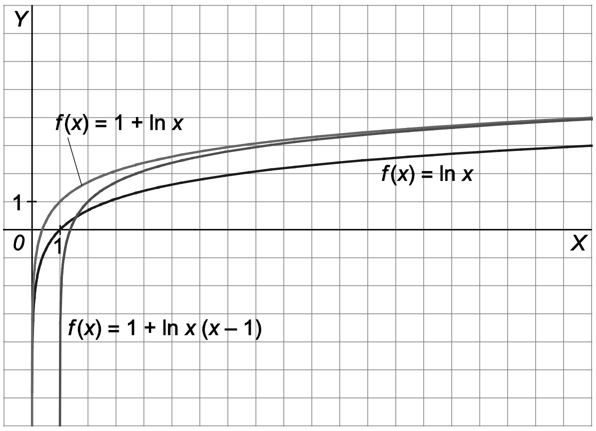
$$f''(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow\text{ No pertenece al dominio.}$$

En $(-\infty,0)$ cóncava hacia abajo y en $(0,+\infty)$ cóncava hacia arriba.

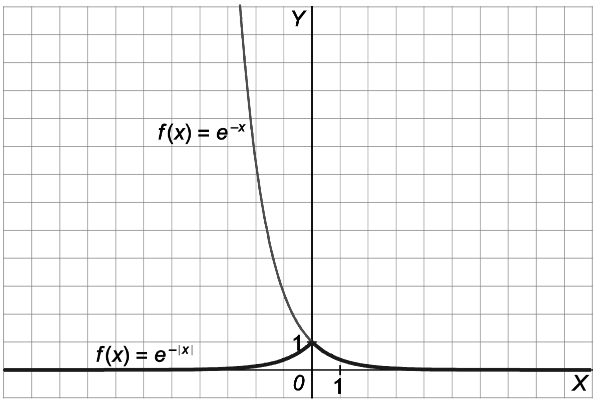
**37 y 38. Ejercicios resueltos.**

**39.** **Partiendo de la gráfica de $f(x) = \ln x$, traza las gráficas de:**

**a)** $f(x) = 1 + \ln x$ **b)** $f(x) = 1 + \ln(x - 1)$

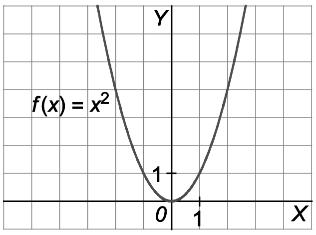



**40.** **A partir de la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$, traza la gráfica de $g(x) = e^{-|x|}$.**

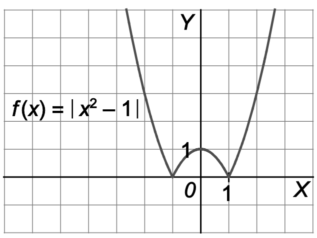



**41.** **A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, traza las de:**

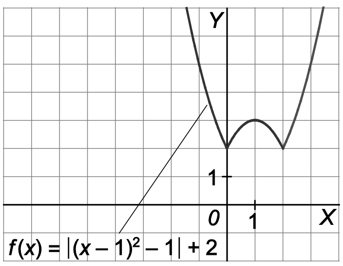
**a)** $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$ **b)** $g(x) = \left|(x-1)^2 - 1\right| + 2$




**a)**




**b)**




**42.** **Ejercicio interactivo.**

**43 a 51.** **Ejercicios resueltos.**

## EJERCICIOS

### Dominios y puntos de discontinuidad

**52. Para las funciones dadas:**

**a)** Estudia su dominio.

**b)** Indica los puntos de discontinuidad de especial interés (puntos de discontinuidad en los que al menos existe uno de los límites laterales).

Indica también si en alguno de estos puntos la función es continua a la izquierda o a la derecha.

**1.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x}$

**2.** $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{2x-3}$

**3.** $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}$

**4.** $f(x) = \ln(sen(x))$

**5.** $f(x) = \sqrt{e^{2x^2-5x+2}}$

**1.** $D(f) = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

Los puntos de discontinuidad de especial interés son $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

**2.** $\begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D(f) = \left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

En $x = \dfrac{3}{2}$ la función es continua por la derecha.

**3.** $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ 1-\sqrt{4-x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ \sqrt{4-x^2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq 4-x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2-4 \leq 0 \Rightarrow 3 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow D(f) = \left[-2,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},2\right]$

En $x = -2$ y $x = \sqrt{3}$ la función es continua por la derecha, y en $x = 2$ y $x = -\sqrt{3}$ la función es continua por la izquierda.

**4.** $\text{sen}\,x > 0 \Rightarrow x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$

Los puntos de discontinuidad de especial interés son $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

**5.** Las potencias de base positivas son positivas.

Por tanto, la raíz cuadrada siempre existe y el dominio es todo $\mathbb{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

## Puntos de corte con los ejes y signo

**53. Para las siguientes funciones, calcula sus puntos de corte con los ejes y estudia las zonas donde su imagen es positiva y donde su imagen es negativa.**

**a)** $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

**b)** $f(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$

**c)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$

**d)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

**e)** $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

**f)** $f(x) = \ln\left(x^2 - 8\right)$

**g)** $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos 2x$

**a)** Los puntos de corte con el eje $X$ son: $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$. Con el eje $Y$ es $(0, 4)$. La función es continua en todo $\mathbb{R}$. En $(-\infty, -2)$ la función es negativa; en $(-2, 1)$, positiva; en $(1, 2)$, negativa; y en $(2, +\infty)$, positiva.

**b)** Los puntos de corte con los ejes son:

Eje $X$: $(-5, 0)$, $(2, 0)$

Eje $Y$: $(0, 20)$

En $(-\infty, -5)$ la función es negativa, y en $(-5, 2) \cup (2, +\infty)$ positiva.

**c)** El signo de $f(x)$ será el mismo que el de $y = x^2 - 4$ excepto en $x = -2$ y $x = 2$, en los cuales la función no existe.

Punto de corte con el eje $Y$: $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

Por tanto, es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, y negativa, en $(-2, 2)$.

**d)** La función es positiva en todo su dominio que es $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$ excepto en $x = 1$, que vale 0.

**e)** El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La función no corta a los ejes.

En $(-\infty, 0)$ la función es positiva, y en $(0, +\infty)$ es negativa.

**f)** El dominio de la función es $\left(-\infty, -\sqrt{8}\right) \cup \left(\sqrt{8}, +\infty\right)$. La función corta al eje $X$ en $x = -3$, $x = 3$.

Por tanto, se consideran los intervalos $(-\infty, -3)$, $\left(-3, -\sqrt{8}\right)$, $\left(\sqrt{8}, 3\right)$ y $(3, +\infty)$. En dichos intervalos el signo de la función es, respectivamente, positivo, negativo, negativo y positivo.

**g)** $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos 2x = \text{sen}^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$. La función es positiva en todos los números reales excepto en los que $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \pm k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

## Simetría y periodicidad

**54. Estudia las simetrías de estas funciones.**

**a)** $f(x) = \dfrac{x^6}{x^4 - 1}$

**b)** $f(x) = \dfrac{x^6 + 1}{x^3 - x}$

**c)** $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 4}$

**d)** $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

**e)** $f(x) = \text{sen}(3x) + \cos(5x)$

**f)** $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,x + \text{tg}\,x}{\cos x}$

**g)** $f(x) = \dfrac{x\text{sen}\,x + \cos x}{\text{tg}\,x}$

**a)** $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ $f$ par (simétrica respecto a $Y$).

**b)** $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ $f$ impar (simétrica respecto a $O$).

**c)** No es par ni impar.

**d)** $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ $f$ impar (simétrica respecto a $O$).

**e)** $f(-x) = \text{sen}(-3x) + \cos(-5x) = -\text{sen}(3x) + \cos(5x) \Rightarrow$ $f$ no es par ni impar.

**f)** $f(-x) = \dfrac{\text{sen}(-x) + \text{tg}(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\text{sen}\,x - \text{tg}\,x}{\cos x} = -f(x) \Rightarrow$ $f$ impar (simétrica respecto a $O$).

**g)** $f(-x) = \dfrac{-x\text{sen}(-x) + \cos(-x)}{\text{tg}(-x)} = \dfrac{x\text{sen}\,x - \cos x}{-\text{tg}\,x} = -f(x) \Rightarrow$ $f$ es impar.

**55. Estudia si son periódicas las siguientes funciones.**

**a)** $f(x) = \text{sen}\,x + \text{tg}\,x$

**b)** $f(x) = \text{sen}(2x) + \text{tg}(2x)$

**c)** $f(x) = \text{sen}(3x) + \text{tg}(3x)$

**a)** $f(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 2\pi) + \text{tg}(x + 2\pi) = \text{sen}\,x + \text{tg}\,x = f(x) \Rightarrow$ periódica con período $T = 2\pi$.

**b)** $f(x + \pi) = \text{sen}(2(x + \pi)) + \text{tg}(2(x + \pi)) = \text{sen}(2x + 2\pi) + \text{tg}(2x + 2\pi) = \text{sen}(2x) + tg(2x) = f(x) \Rightarrow$ periódica con período $T = \pi$.

**c)** $f\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(3\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right) + \text{tg}\left(3\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \text{sen}(3x + 2\pi) + \text{tg}(3x + 2\pi) = \text{sen}(3x) + tg(3x) = f(x) \Rightarrow$

periódica con período $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

**56. Señala el período de cada una de las siguientes funciones.**

**a)** $f(x) = \sec x$

**b)** $f(x) = \text{tg}(\pi x)$

**c)** $f(x) = \text{sen}(4x)$

**d)** $f(x) = \text{sen}^4 x$

**e)** $f(x) = \text{sen}\,x + \cos(3x)$

**f)** $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

**a)** $T = 2\pi$

**b)** $T = 1$

**c)** $T = \dfrac{\pi}{2}$

**d)** $T = \pi$

**e)** $T = 2\pi$

**f)** La función es constante.

**57.** **Comprueba que si una función $f(x)$ tiene período $T$, entonces la función $f(ax)$ tiene período $\frac{T}{a}$.**

**Aplicando esta propiedad, halla el período de las siguientes funciones.**

**a)** $f(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$

**b)** $f(x)=\cos^2\frac{\pi x}{3}$

**c)** $f(x)=\operatorname{tg}(3\pi x)$

**d)** $f(x)=\operatorname{cotg}^2\frac{\pi x}{3}$

**e)** $f(x)=\sec(3\pi x)$

$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax)\Rightarrow f(ax)$ es periódica de con período $\frac{T}{a}$.

**a)** $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$ **b)** $T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$ **c)** $T=\frac{\pi}{3\pi}=\frac{1}{3}$ **d)** $T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$ **e)** $T=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$

## Asíntotas

**58.** **Estudia las asíntotas de la función polinómica: $f(x)=2x^4-3x^2+5x-2$.**

Por ser una función polinómica, no hay asíntotas.

**59.** **Estudia las asíntotas de las siguientes funciones racionales.**

**a)** $f(x)=\frac{2x^2-3x}{x^3+1}$

**b)** $f(x)=\frac{4x^2-3x}{x^2+1}$

**c)** $f(x)=\frac{2x^3-3x^2+2}{2x^2-3}$

**d)** $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$

**e)** $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

**f)** $f(x)=\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$

**g)** $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$

**h)** $f(x)=\frac{x^2}{x^3-1}$

**a)** Asíntota vertical: $x=-1$ a la izquierda y a la derecha. Asíntota horizontal: $y=0$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

**b)** No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal: $y=4$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

**c)** Asíntotas verticales: $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua: $y=x-\frac{3}{2}$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

**d)** No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal: $y=1$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

**e)** No hay ningún tipo de asíntotas. La función es la recta $y=x+1$ con un agujero en $(-1, 0)$.

**f)** Asíntota vertical: $x=-2$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales. Asíntota oblicua: $y=x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

**g)** Asíntota vertical: $x=1$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

**h)** Asíntota vertical: $x=1$ a la izquierda y a la derecha. Asíntota horizontal: $y=0$ en $+\infty$ y en $-\infty$. No hay asíntotas oblicuas.

**60. Estudia las asíntotas horizontales y oblicuas, y su posición respecto de la curva, para las siguientes funciones racionales.**

**a)** $f(x) = \dfrac{-3}{x^2+4}$

**b)** $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-4}$

**c)** $f(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{2x^2-x+2}$

**d)** $f(x) = \dfrac{2x^3}{2x^2+1}$

**a)** Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$. En $+\infty$ y en $-\infty$ la curva queda por debajo de la asíntota.

**b)** Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$. En $(-\infty,-2)$ la curva queda por debajo de la asíntota, en $(-2,2)$ la curva queda por encima de la asíntota y en $(0,+\infty)$ la curva queda por debajo de la asíntota.

**c)** Asíntota horizontal: $y = 1$ en $+\infty$ y en $-\infty$. $\dfrac{2x^2+x+2}{2x^2-x+2} - 1 = \dfrac{2x}{2x^2-x+2}$

En $+\infty$ la curva queda por encima de la asíntota. En $-\infty$ la curva queda por debajo de la asíntota.

**d)** $f(x) = \dfrac{2x^3}{2x^2+1} = x - \dfrac{x}{2x^2+1}$. Asíntota oblicua: $y = x$ en $+\infty$ y en $-\infty$. La curva queda por encima en $-\infty$ y por debajo en $+\infty$.

**61. Halla las asíntotas de las siguientes funciones irracionales.**

**a)** $f(x) = \sqrt{x+\dfrac{3}{4}}$

**b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4-16}}{x}$

**c)** $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

**d)** $f(x) = \sqrt[4]{x^4+\dfrac{1}{4}}$

**a)** El dominio de la función es $\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$. No tiene asíntotas verticales. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\dfrac{3}{4}} = +\infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales. No tiene asíntotas oblicuas porque $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\frac{3}{4}}}{x} = 0$.

**b)** El dominio de la función es $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. No tiene asíntotas verticales. No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-16}}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-16}}{x} = -\infty$. $y = x$ es asíntota en $+\infty$ y en $-\infty$ porque:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^4-16}}{x^2} = 1 \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-16}}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-16}{x\left(\sqrt{x^4-16}+x^2\right)} = 0.$$

**c)** El dominio de la función es $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. No tiene asíntotas verticales ni horizontales. $y = x$ e $y = -x$ son asíntotas oblicuas porque:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1,\ n = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = 0 \qquad m = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1,\ n = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = 0$$

**d)** El dominio es todo $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales ni horizontales.

$y = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$ y por ser una función par, $y = -x$ es asíntota oblicua en $-\infty$ ya que:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+\frac{1}{4}}}{x} = 1 \qquad n = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+\frac{1}{4}} - x\right) = 0.$$

**62. Determina las asíntotas de las siguientes funciones.**

**a)** $f(x)=\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}$

**b)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$

**c)** $f(x)=\ln(2x-3)$

**d)** $f(x)=\ln\sqrt{x+1}$

**a)** El dominio es todo $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}=+\infty \Rightarrow$ No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+x^2\right)e^{-\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+x^2}{e^{\frac{x}{2}}}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right](\text{indet.})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}=0 \Rightarrow$ La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}}{x}=+\infty \Rightarrow$ No hay asíntota oblicua en $+\infty$.

**b)** El dominio es todo $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right](\text{indet.})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0 \Rightarrow$ La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}=+\infty$, $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)}{xe^x}=+\infty \Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $-\infty$.

**c)** El dominio es $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\ln(2x-3)=-\infty \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ es asíntota vertical por la derecha.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x-3)=+\infty \Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $+\infty$.

**d)** El dominio es $(-1,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\sqrt{x+1}=-\infty \Rightarrow x=-1$ es asíntota vertical por la derecha.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\sqrt{x+1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right](\text{indet.})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2(x+1)}=0 \Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua.

**63. Calcula las asíntotas de la función $f(x)=x^x$.**

El dominio es $(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$. No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^x}{x}=+\infty \Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $+\infty$.

**64. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones.**

**a)** $f(x)=\operatorname{sen}x$

**b)** $f(x)=\operatorname{sen}x+3\cos x$

**a)** No tiene asíntotas verticales ya que el dominio es todo $\mathbb{R}$.

No tiene asíntotas horizontales ya que no existe el límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

**b)** Al igual que la anterior, no tiene asíntotas.

**65. Halla las asíntotas de las siguientes funciones con valores absolutos.**

**a)** $f(x) = |2x - 3| + x|x - 1|$

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

**c)** $f(x) = \left|\dfrac{x}{x+1}\right|$

**d)** $f(x) = \dfrac{|x| + 2}{x + 2}$

**e)** $f(x) = \ln|x - 2|$

**f)** $f(x) = e^{-|x|}$

**a)** La función se puede escribir como una función definida a trozos en la que todos los tramos están expresados por polinomios. Por tanto, no tiene asíntotas.

**b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{x} = +\infty \Rightarrow$ $x = 0$ es asíntota vertical tanto por la izquierda como por la derecha.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ es asíntota horizontal, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

**c)** $x = -1$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow$ $y = 1$es asíntota horizontal tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

**d)** $x = -2$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha.

En $-\infty$, $y = -1$ es asíntota horizontal.

En $+\infty$, $y = 1$ es asíntota horizontal.

**e)** $x = 2$ es asíntota vertical.

**f)** $y = 0$ es asíntota horizontal tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

## Funciones polinómicas

**66. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ :**

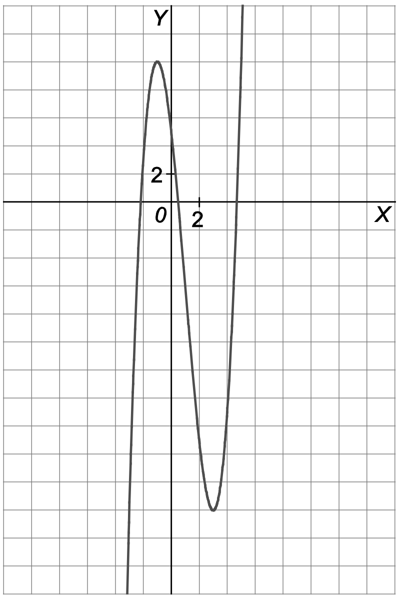
**a)** Traza su gráfica estudiando previamente el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

**b)** ¿Hay puntos de corte con los ejes de coordenadas?

**a)** $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ . Si $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 3$

Crece en $(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$ . Decrece en $(-1,3)$ .

Máximo $(-1,10)$ . Mínimo $(3,-22)$ .




**b)** Corta al eje *Y* en $(0,5)$ y al eje *X* en tres puntos.

**67. Dada la función $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ :**

**a)** Traza su gráfica estudiando primero los cortes con los ejes, el signo, el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

**b)** ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la función?

**a)** $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (x-1)^2(x+3)^2$

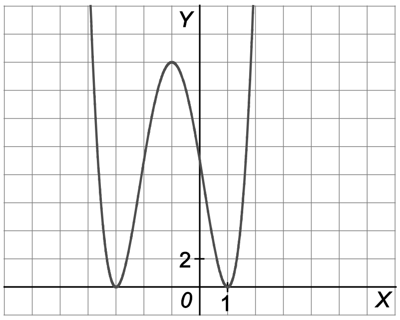
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 4(x+1)(x-1)(x+3)$

Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$ , $(-3,0)$ $(0,9)$

La función es siempre positiva, excepto en los puntos que se anula.

Crece en $(-3,-1) \cup (1,+\infty)$ . Decrece en $(-\infty,-3) \cup (-1,1)$ .

Máximo relativo: $(-1,16)$ . Mínimos relativos: $(-3, 0)$ , $(1, 0)$ .



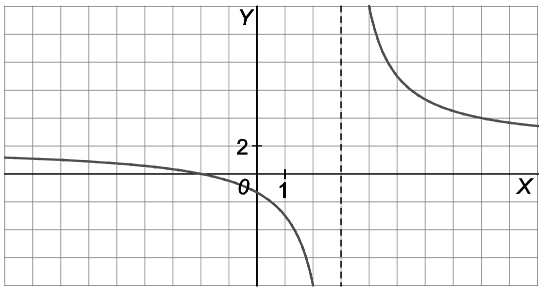

**b)** Tiene dos puntos de inflexión.

## Funciones racionales

**68. Dibuja las siguientes funciones racionales, realizando el estudio completo de las mismas.**

**a)** $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{3x}{x^3-8}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$

**a)** Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{3\}$




Simetría: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(-2,0)$, $\left(0,-\dfrac{4}{3}\right)$

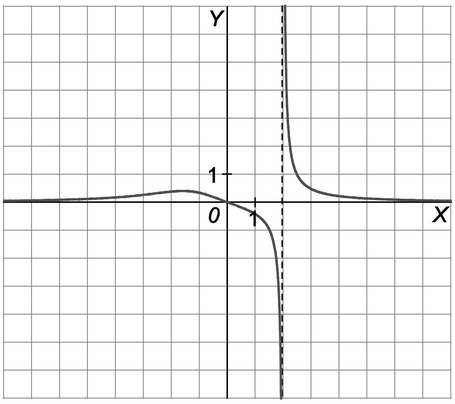
Asíntotas: Verticales: $x=3$. Horizontales: $y=2$.

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=-\dfrac{10}{(x-3)^2}$

Siempre decrece. No tiene extremos relativos.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{20}{(x-3)^3}$. Cóncava hacia arriba en $(3,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty,3)$. No tiene puntos de inflexión.

**b)** Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$




Simetría: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$

Asíntotas: Verticales: $x=2$

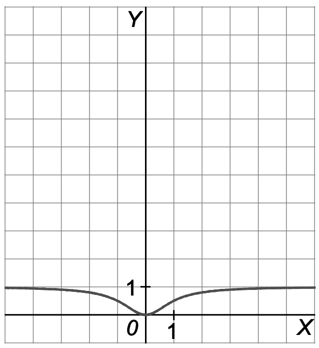
Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{6(x^3+4)}{(x^3-8)^2}$

Decrece en $(-\sqrt[3]{4},2)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(-\infty,-\sqrt[3]{4})$.

Máximo en $\left(-\sqrt[3]{4},\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)$

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{18x^2(x^2+16)}{(x^3-8)^3}$. Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-\sqrt[3]{16})\cup(2,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\sqrt[3]{16},0)\cup(0,2)$. Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt[3]{16},\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}\right)$.

**c)** Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$




Simetría: *f* es par.

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$

Asíntotas: Horizontales: $y=1$.

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$. Mínimo en $(0,0)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$. Cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$ y $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$.

**d)** Dominio y continuidad: $D(f) = \mathbb{R} - \{-2,2\}$

Simetría: *f* es impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$

Asíntotas: Verticales: $x = 2$, $x = -2$. Oblicuas: y = 2x

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$

Decrece en $\left(-\sqrt{12},-2\right) \cup (-2,2) \cup \left(2,\sqrt{12}\right)$ y

crece en $\left(-\infty,-\sqrt{12}\right) \cup \left(\sqrt{12},+\infty\right)$.

Máximo $\left(-\sqrt{12},-3\sqrt{12}\right)$   Mínimo $\left(\sqrt{12},3\sqrt{12}\right)$.

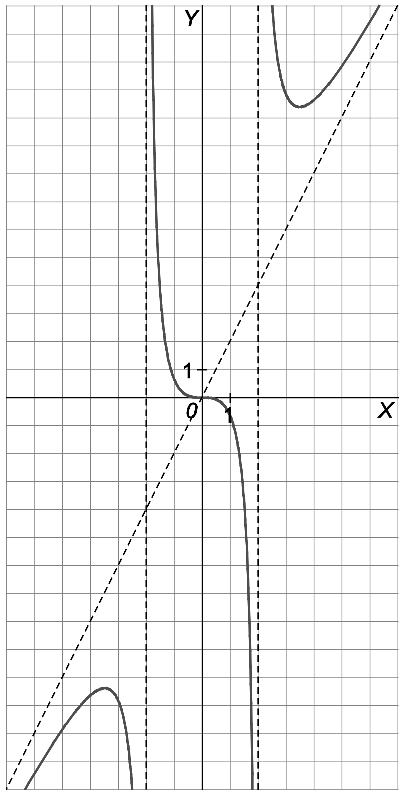
Puntos de inflexión y concavidad:

$$f''(x) = \frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Puntos de inflexión: $(0,0)$

Cóncava hacia arriba en $(-2,0) \cup (2,+\infty)$ y

cóncava hacia abajo en $(-\infty,-2) \cup (0,2)$.




## Funciones irracionales

**69. Para la función $f(x) = x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, halla el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas y los extremos relativos y, finalmente, traza su gráfica.**

Dominio: $D(f) = (0,+\infty)$

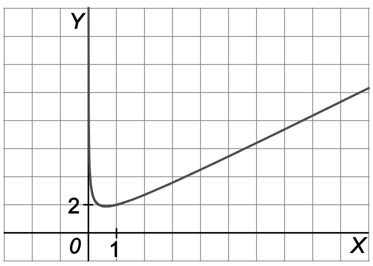
No tiene puntos de corte con los ejes.

Asíntotas verticales: $x = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}\right) = +\infty$

Asíntotas oblicuas: $y = x$ en $+\infty$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Decrece en $\left(0,\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)$ y crece en $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}},+\infty\right)$. Mínimo en $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}},\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$.



**70. Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2-4x+8}$ :**

**a)** Dibuja su gráfica estudiando previamente su dominio, los puntos de corte con los ejes, el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

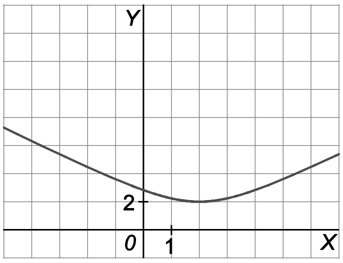
**b)** De acuerdo con gráfica, señala los intervalos de concavidad de la función.

**a)** Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$ .

Corta al eje Y en $(0,\sqrt{8})$

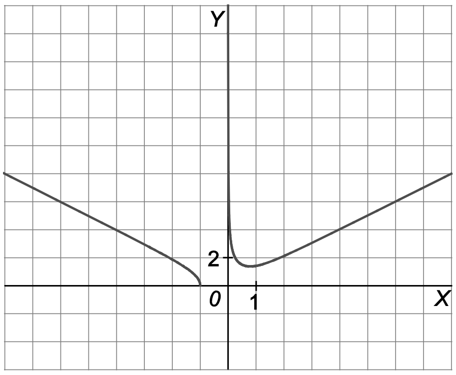
$$f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$$

Decrece en $(-\infty,2)$ y crece en $(2,+\infty)$ . Mínimo en $(2,2)$ .




**b)** La función es siempre cóncava hacia arriba.

**71. Dada la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}$, traza su gráfica estudiando previamente su dominio los puntos de corte con los ejes, las asíntotas y los extremos relativos.**




Dominio: $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

Puntos de corte con los ejes: $(-1,0)$

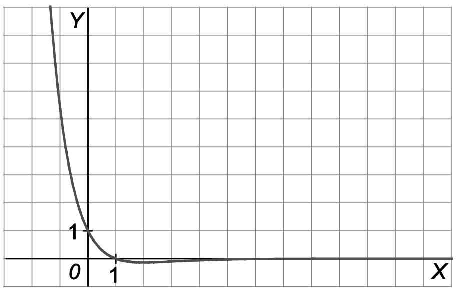
Asíntotas verticales: $x=0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}=+\infty$

Asíntotas oblicuas: $y=x$ en $+\infty$ e $y=-x$ en $-\infty$ .

$$f'(x)=\frac{(2x^3-1)\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}}{2x(x^3+1)}$$. Mínimo en $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},\dfrac{\sqrt[6]{432}}{2}\right)$.

## Funciones exponenciales

**72. Realiza el estudio completo de la función $f(x)=(1-x)e^{-x}$ y dibuja su gráfica.**




Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$ , $(0,1)$

Asíntotas horizontales: $y=0$ en $+\infty$ porque $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}=0$

$f'(x)=e^{-x}(x-2)=0\Rightarrow x=2$ .

Decrece en $(-\infty,2)$ y crece en $(2,+\infty)$ . Mínimo en $(2,-e^{-2})$

$f''(x)=e^{-x}(3-x)=0\Rightarrow x=3$

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,3)$ y cóncava hacia abajo en $(3,+\infty)$ .

Punto de inflexión en $(3,-2e^{-3})$

**73. Traza las gráficas de las siguientes funciones realizando, previamente, un estudio completo de ellas.**

**a)** $f(x)=\left(x^2-4x+5\right)e^x$

**b)** $f(x)=\left(x^2-4x+5\right)e^{-x}$

**a)** Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Simetrías: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,5)$

Asíntotas horizontales: $y=0$ en $-\infty$

$f'(x)=(x-1)^2e^x=0\Rightarrow x=1$

Creciente en todo el dominio.

$f''(x)=(x-1)(x+1)e^x=0\Rightarrow x=1,\ x=-1$

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Cóncava hacia abajo en $(-1,1)$

Puntos de inflexión: $\left(-1,10e^{-1}\right)$, $(1,2e)$

**b)** Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Simetrías: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,5)$

Asíntotas horizontales: $y=0$ en $+\infty$

$f'(x)=-(x-3)^2e^{-x}=0\Rightarrow x=3$

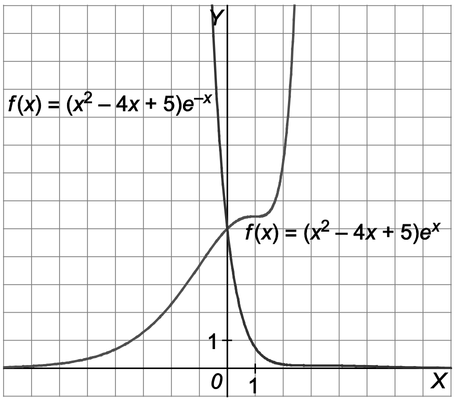
Decreciente en todo el dominio.

$f''(x)=-(x-3)(5-x)e^{-x}\Rightarrow x=3,\ x=5$

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$

Cóncava hacia abajo en $(3,5)$

Puntos de inflexión: $\left(3,2e^{-3}\right)$, $\left(5,10e^{-5}\right)$




**74. Dada la función $f(x)=x^2e^x$ :**

**a)** Traza su gráfica estudiando previamente el dominio, las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, el crecimiento y los extremos relativos.

**b)** A la vista de la gráfica, indica cuántos puntos de inflexión posee la función.

**a)** Dominio: $\mathbb{R}$ .

Punto de corte con los ejes: $(0,0)$

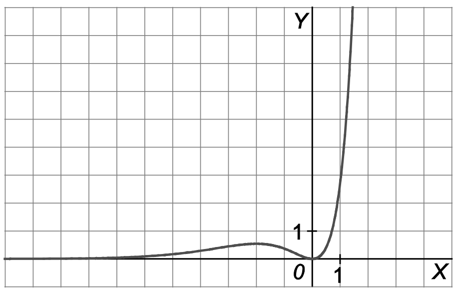
No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

$y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ .

$f'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x=0\Rightarrow x=0\ \ x=-2$

Crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)$ .

Máximo: $\left(-2,4e^{-2}\right)$ . Mínimo: $(0,0)$




**b)** Tiene dos puntos de inflexión.

Funciones logarítmicas

**75. Realiza el estudio completo de la función $f(x)=\ln(x^2-4)$ y traza su gráfica.**

Dominio: $D(f)=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

Simetría: *f* es par.

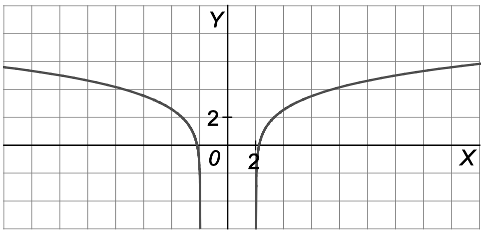
Puntos de corte con los ejes: $\left(-\sqrt{5},0\right)$, $\left(\sqrt{5},0\right)$

Asíntotas verticales: $x=-2$, $x=2$.

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=0\Rightarrow x=0$ que no es un punto del dominio.

Decrece en $(-\infty,-2)$ y crece en $(2,+\infty)$. No tiene extremos relativos.

$f''(x)=\dfrac{-2x^2-8}{(x^2-4)}\neq 0\Rightarrow$ No tiene puntos de inflexión. Cóncava hacia abajo en todo su dominio.




**76. Haz un estudio completo de la función $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ y dibuja su gráfica.**

Dominio: $D(f)=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

Simetría: No es par ni impar.

No tiene puntos de corte con los ejes.

Asíntotas verticales: $x=-2$, $x=1$

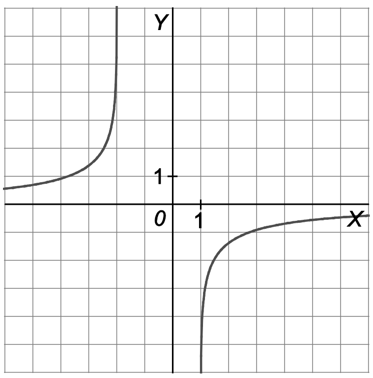
Asíntota horizontal: $y=0$ en $+\infty$ y en $-\infty$

$f'(x)=\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}\neq 0$

Es creciente en todo el dominio. No tiene extremos relativos.

$f''(x)=-\dfrac{6x+3}{(x-1)^2(x+2)^2}=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ que no es un punto del dominio.

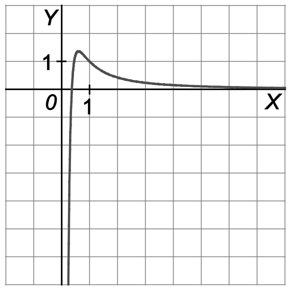
Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)$ y cóncava hacia abajo en $(1,+\infty)$. No tiene puntos de inflexión.



**77. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$, estudiando previamente su dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, el crecimiento y los extremos relativos.**

Dominio: $D(f)=(0,+\infty)$

Puntos de corte con los ejes: $\left(\frac{1}{e},0\right)$




Asíntota vertical: $x=0$

$f'(x)=\frac{-1-2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$

Crece en $\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y decrece en $\left(e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$. Máximo relativo en $\left(e^{-\frac{1}{2}},\frac{e}{2}\right)$.

$f''(x)=\frac{1+6\ln x}{x^4}=0\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{6}}$

Cóncava hacia abajo en $\left(0,e^{-\frac{1}{6}}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e^{-\frac{1}{6}},+\infty\right)$. Punto de inflexión $\left(e^{-\frac{1}{6}},\frac{5\sqrt[3]{e}}{6}\right)$.

## Funciones trigonométricas y sus inversas

**78. Dada la función $f(x)=2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2x)$, traza su gráfica estudiando previamente las simetrías y periodicidad, los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos.**

Simetría: *f* es impar.

Periodicidad: *f* es periódica de período $2\pi$.

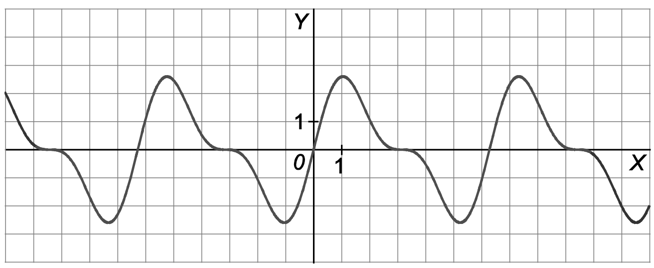
Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$, $(\pi,0)$ porque:

$$2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x=0\Rightarrow 2\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos x=0\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=0\Rightarrow x=0, x=\pi\\ \cos x=-1\Rightarrow x=\pi\end{cases}$$

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=0\Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}\\ \cos x=-1\Rightarrow x=\pi\end{cases}$$

Crece en $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$. Máximo $\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y mínimo $\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.



**79. Dada la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}$, dibuja su gráfica estudiando previamente la periodicidad, las asíntotas verticales, los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos.**

Periodicidad: *f* es periódica de período $2\pi$.

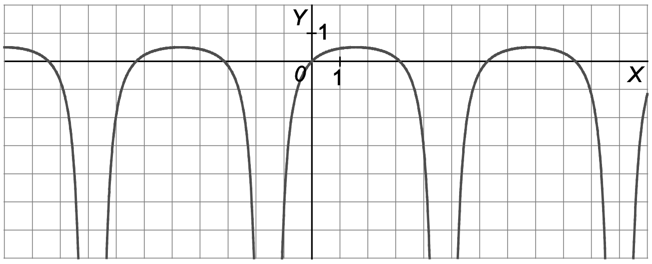
Asíntota vertical $x=\dfrac{3\pi}{2}$ por la izquierda y por la derecha porque:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}=-\infty \text{ y } \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}=-\infty$$

Puntos de corte con los ejes en $[0,2\pi)$: $(0,0)$, $(\pi,0)$ porque: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}=0\Rightarrow \operatorname{sen} x=0\Rightarrow x=0, x=\pi$

$f'(x)=\dfrac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$.

Crece en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ y decrece en $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Máximo relativo en $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

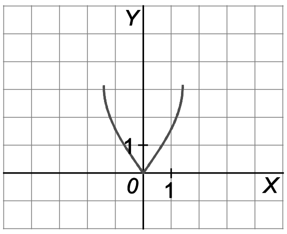



**80. Traza las gráficas de las siguientes funciones.**

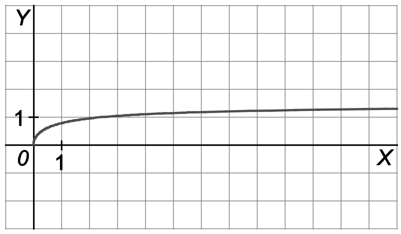
**a)** $f(x)=\arccos\left(1-x^2\right)$

**b)** $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x}\right)$

**a)**




**b)**



## Síntesis

**81. Dada la función $f(x)=\frac{1}{8}x^4+ax^3-2x^2+bx-\frac{14}{3}$:**

**a)** Calcula los valores de *a* y *b* para que tenga un punto de inflexión en $(-2,0)$. Utiliza los valores hallados para *a* y *b* en el resto de los apartados.

**b)** Para los valores hallados de *a* y *b*, traza la gráfica de *f* estudiando previamente el crecimiento, los extremos relativos, la concavidad y los puntos de inflexión.

**c)** ¿En cuántos puntos corta *f* al eje de abscisas?

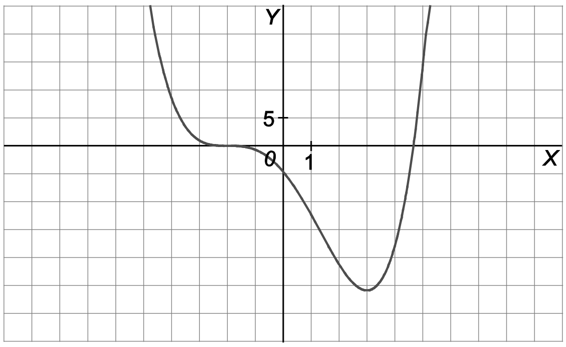
$f'(x)=\frac{1}{2}x^3+3ax^2-4x+b$, $f''(x)=\frac{3}{2}x^2+6ax-4$

**a)** $f''(-2)=6-12a-4=0\Rightarrow a=\frac{1}{6}$ y $f(-2)=0\Rightarrow 2+\frac{1}{6}\cdot(-8)-8-2b-\frac{14}{3}=0\Rightarrow b=-6$

Por tanto, $f(x)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{6}x^3-2x^2-6x-\frac{14}{3}$

**b)** $f'(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x-6\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x-3)(x+2)^2$.

Decrece en $(-\infty,3)$ y crece en $(3,+\infty)$.




Mínimo en $\left(3,-\frac{625}{24}\right)$

$f''(x)=\frac{3}{2}x^2+x-4=0\Rightarrow x=\frac{4}{3}$, $x=-2$.

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

Cóncava hacia abajo en $\left(-2,\frac{4}{3}\right)$

Puntos de inflexión $(-2,0)$ y $\left(\frac{4}{3},-\frac{1250}{81}\right)$.

**c)** Tiene dos puntos de corte con el eje de abscisas.

**82. Calcula el valor de *k* para que la recta *y* = 2*x* – 5 sea asíntota oblicua de la función: $f(x)=\frac{2x^3+kx^2+7x+3k}{x^2+3}$**

**Estudia el resto de asíntotas de *f*, si es que existen.**

$f(x)=\frac{2x^3+kx^2+7x+3k}{x^2+3}=2x+k+\frac{x}{x^2+3}\Rightarrow k=-5$

No tiene asíntotas verticales porque $D(f)=\mathbb{R}$.

No tiene asíntotas horizontales porque:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x^2+7x+15}{x^2+3}=+\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+5x^2+7x+15}{x^2+3}=-\infty$$

**83. Halla el valor de *k* para que $f(x)=\dfrac{2x+k}{\sqrt{x-1}}$ tenga un extremo relativo en $x=\dfrac{5}{2}$. ¿Qué tipo de extremo es?**

**Para el valor de *k* hallado, determina el dominio, las asíntotas, el crecimiento de *f* y traza su gráfica.**

$f'(x)=\dfrac{2x-k-4}{2\sqrt{(x-1)^3}}$, $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=0\Rightarrow k=1$. Es un mínimo.

Dominio: $(1,+\infty)$

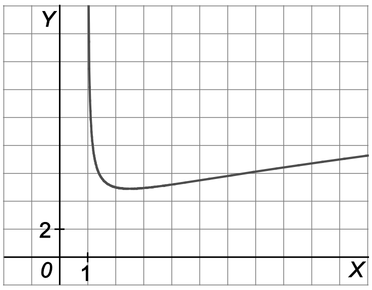
Asíntota vertical: $x=1$.

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

Crece en $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$.

$f''(x)=\dfrac{11-2x}{4\sqrt{(x-1)^5}}=0\Rightarrow x=\dfrac{11}{2}$. Punto de inflexión $\left(\dfrac{11}{2},4\sqrt{2}\right)$.

Cóncava hacia arriba en $\left(1,\dfrac{11}{2}\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(\dfrac{11}{2},+\infty\right)$.




**84. Para la función $f(x)=\dfrac{2x+k}{x^2-2x+1}$:**

**a)** Halla el valor de *k* para que *f* tenga un máximo relativo en el punto $x=2$. ¿Cuál es el valor de este máximo?

**b)** Estudia, si es que existen, el resto de extremos relativos de la función.

**a)** $f(x)=\dfrac{2x+k}{x^2-2x+1}=\dfrac{2x+k}{(x-1)^2}$, $f'(x)=\dfrac{-2(x+k+1)}{(x-1)^3}\Rightarrow f'(2)=-6-2k=0\Rightarrow k=-3$.

Se puede observar que a la izquierda de 2 la función crece y a la derecha decrece.

El valor de la función en $x=2$ es 1.

**b)** $f'(x)=\dfrac{-2(x-2)}{(x-1)^3}=0\Rightarrow x=2$.

Por tanto, la función no tiene más extremos relativos.

**85. Calcula, si es que existen, el valor o los valores de *k* para que la función $f(x)=\dfrac{x+k}{e^x}$:**

**a)** Tenga un máximo relativo en $x=-2$.

**b)** Tenga un punto de inflexión en $x=1$.

**c)** Tenga la asíntota horizontal $y=0$ en $+\infty$.

**d)** Tenga la asíntota horizontal $y=0$ en $-\infty$.

**a)** $f'(x)=\dfrac{1-x-k}{e^x}$, $f'(-2)=\dfrac{1-(-2)-k}{e^{-2}}=0\Rightarrow k=3$

**b)** $f''(x)=\dfrac{-2+x+k}{e^x}$, $f''(1)=\dfrac{-2+1+k}{e^x}=0\Rightarrow k=1$

**c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+k}{e^x}=0$ para cualquier valor real de $k$

**d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+k}{e^x}=-\infty$. Por tanto, no existe ningún valor de $k$ para que $y=0$ sea asíntota horizontal en $-\infty$.

**86. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+k}{e^x}$:**

**a)** Halla el valor de $k$ para que tenga un punto de inflexión en $x=0$.

**b)** Para el valor de $k$ obtenido, traza la gráfica de la función estudiando previamente el dominio, los puntos de corte con los ejes, el signo, las asíntotas, la concavidad y los puntos de inflexión.

**c)** A la vista de la gráfica, indica cuántos máximos y mínimos relativos tiene $f$.

**d)** A la vista de la gráfica, indica, si es que existe, el valor del máximo y mínimo absoluto de $f$.

**a)** $f'(x)=-\dfrac{x^2-2x+k}{e^x}$, $f''(x)=\dfrac{x^2-4x+k+2}{e^x}$, $f''(0)=0\Rightarrow k+2=0\Rightarrow k=-2$. Luego $f(x)=\dfrac{x^2-2}{e^x}$

**b)** Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

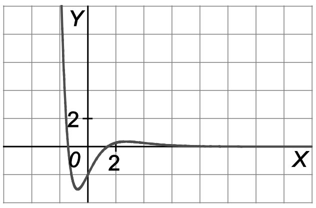
Puntos de corte con los ejes: $(0,-2)$, $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$.

Signo: $f>0$ en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ y $f<0$ en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Asíntota horizontal $y=0$ en $+\infty$.

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(0,+\infty)$.

Puntos de inflexión: $(0,-2)$, $\left(4,\dfrac{14}{e^4}\right)$.




**c)** Máximo relativo: $\left(1+\sqrt{3};0,36\right)$. Mínimo relativo: $(-0,73;-3,04)$.

**d)** No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto vale $-3,04$.

**87. Halla el valor de $k$ para que $f(x)=\dfrac{k+\ln x}{x^2}$ tenga en $x=e$ un máximo relativo. ¿Cuál es su valor?**

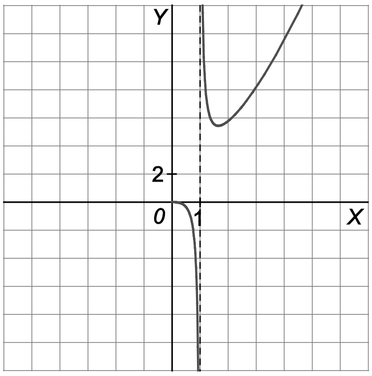
$f'(x)=\dfrac{1-2k-2\ln x}{x^3}$, $f'(e)=\dfrac{1-2k-2}{e^3}=0 \Rightarrow 1-2k-2=0 \Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}$

A la izquierda de $x=e$ la función crece y a la derecha la función decrece.

Luego es un máximo y su valor es $\dfrac{1}{2e^2}$.

**88. Halla el valor de $k$ para que $f(x)=\dfrac{x^2+k}{\ln x}$ tenga un extremo relativo en $x=\sqrt{e}$. Para el valor encontrado traza la gráfica.**

$f'(x)=\dfrac{2x^2\ln x-x^2-k}{x(\ln x)^2}$, $f'\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{2e\cdot\frac{1}{2}-e-k}{\frac{\sqrt{e}}{4}}=0 \Rightarrow k=0.$




Dominio: $(0,1)\cup(1,+\infty)$

No tiene puntos de corte con los ejes.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\ln x}=\dfrac{0}{0}(\text{indet.})=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}2x^2=0$

Asíntota vertical: $x=1$

Decrece en $(0,1)\cup\left(1,\sqrt{e}\right)$ y crece en $\left(\sqrt{e},+\infty\right)$. Mínimo $\left(\sqrt{e},2e\right)$.

$f''(x)=\dfrac{2(\ln x)^2-3\ln x+2}{(\ln x)^3}$. No tiene solución real, por tanto, no hay puntos de inflexión.

**89. Dada la función $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$.**

**a)** Estudia su dominio, continuidad y su periodicidad.

**b)** ¿Por qué no posee ningún tipo de asíntota?

**c)** Estudiando previamente sus puntos de corte con los ejes y extremos relativos, traza la gráfica de $f$.

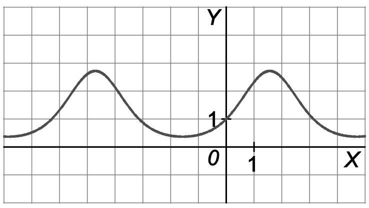
**a)** Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$. Es continua en todo el dominio.

$f(x+2\pi)=e^{\operatorname{sen}(x+2\pi)}=e^{\operatorname{sen} x}=f(x)$. Función periódica de periodo $2\pi$.

**b)** No tiene ningún tipo de asíntota porque el dominio es $\mathbb{R}$ y $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

**c)** Puntos de corte: $(0,1)$

$f'(x)=\cos x e^{\operatorname{sen} x}=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}, x=\dfrac{3\pi}{2}$

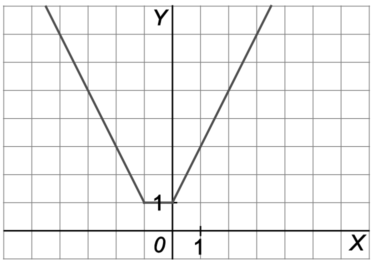



Crece en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ y decrece en $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Máximo: $\left(\dfrac{\pi}{2},e\right)$. Mínimo: $\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{1}{e}\right)$.

**90. Expresa la función $f(x)=|x|+|x+1|$ como una función definida a trozos, y traza su gráfica estudiando sus extremos relativos. Determina también el máximo y el mínimo absolutos de *f*.**

$$f(x)=\begin{cases}-2x-1 & \text{si } x\le -1\\ 1 & \text{si } -1<x<0\\ 2x+1 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

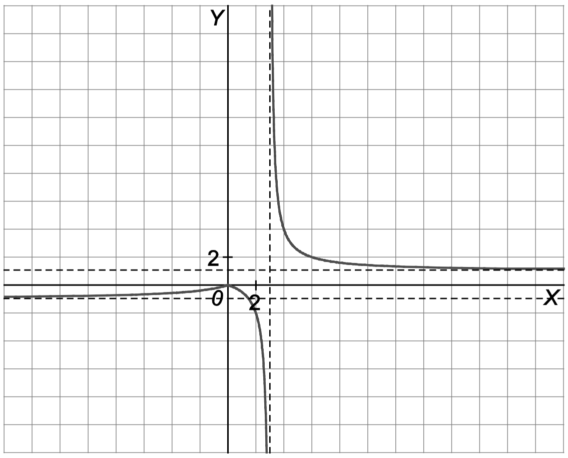



Los extremos relativos se encuentran en los puntos tales que $f'(x)=0$ más aquellos puntos del dominio donde no existe la derivada. Por tanto, todos los valores de x pertenecientes al intervalo $[-1,0]$ son puntos donde alcanza un mínimo relativo ya que en sus cercanías, a la derecha y a la izquierda, la función no toma valores menores.

La función no posee máximo absoluto. El mínimo absoluto de la función es 1 y se alcanza en cualquiera de los puntos del intervalo $[-1,0]$.

**91. Traza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x-3}$ estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y extremos relativos.**

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{x-3} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{x-3} & \text{si } 0\le x\end{cases}$$




Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$

Asíntotas:

Verticales: $x=3$ porque $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x|}{x-3}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x|}{x-3}=-\infty$

Horizontales: $y=1$ en $+\infty$. $y=-1$ en $-\infty$.

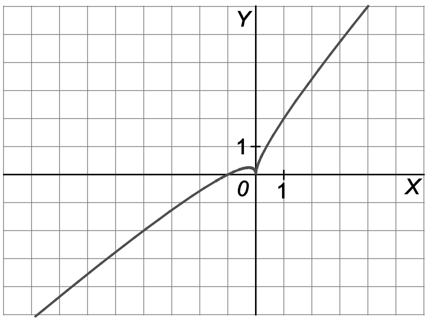
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{(x-3)^2} & \text{si } x<0\\ -\dfrac{3}{(x-3)^2} & \text{si } 0<x\end{cases}.$$

No existe $f'(0)$ porque $f'(0^-)=\dfrac{1}{3}$ y $f'(0^+)=-\dfrac{1}{3}$. $x=0$ es un punto crítico.

Creciente en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,3)\cup(3,+\infty)$. Máximo relativo en $x=0$.

**92. Dada la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$, traza su gráfica estudiando previamente su dominio, cortes con los ejes, existencia de asíntotas y extremos relativos.**

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ x + \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$




Dominio: $\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$, $(-1,0)$.

No tiene asíntotas.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Los puntos críticos son $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 0$ (ya que no existe $f'(0)$).

Crece en $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. Máximo relativo en $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Mínimo relativo en $(0,0)$.

**93. Dada la función $f(x) = |\text{sen}(x + \pi)| + 1$.**

**a)** Establece su período.

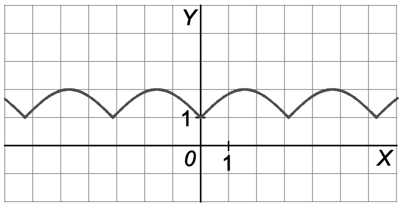
**b)** Determina sus puntos de corte con los ejes.

**c)** Dibuja la gráfica de la función.

**a)** $f(x+\pi) = |\text{sen}(x+\pi+\pi)| + 1 = |-\text{sen}(x+\pi)| + 1 = |\text{sen}(x+\pi)| + 1 = f(x)$. Período $T = \pi$.

**b)** Puntos de corte con los ejes: $(0,1)$.

**c)** $f(x) = \text{sen}(x+\pi) + 1 \quad 0 \leq x < \pi$




Dominio: $\mathbb{R}$

No tiene asíntotas.

$f'(x) = -\cos x$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Los puntos críticos son $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ y $x = \pi$ (ya que no existen $f'(0)$ ni $f'(\pi)$)

Crece en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$. Mínimos en $(0,1)$, $(\pi, 1)$.

## CUESTIONES

**94. a)** ¿Puede una función cortar a una asíntota horizontal suya? En caso afirmativo, muestra un ejemplo y en caso negativo explica la razón.

**b)** ¿Puede una función cortar a alguna de sus asíntotas verticales? En caso afirmativo, muestra un ejemplo y en caso negativo, explica la razón.

**a)** Sí puede ser cortada por alguna rama de la función. Por ejemplo, $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+3}$, la asíntota en $+\infty$ es $y=1$

$\frac{x^2+x}{x^2+3}=1 \Rightarrow x^2+x=x^2+3 \Rightarrow x=3$. Luego la función corta a la asíntota en $(3,1)$.

**b)** Sí puede una función cortar a alguna de las asíntotas verticales. Por ejemplo, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$. Por tanto, $x=0$ es una asíntota vertical y la función corta a la asíntota en $(0,0)$.

**95. Se considera la función $y=f(x)$ de la cual se sabe que es una función par. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

**a)** Si la función tiene una asíntota vertical en $x=a$, entonces también tiene asíntota vertical $x=-a$.

**b)** Si la función tiene la asíntota horizontal $y=b$ en $+\infty$, también tiene la asíntota horizontal $y=-b$ en $-\infty$.

**c)** Si la función tiene un máximo relativo en $(-2,4)$ tiene también un máximo relativo en $(2,4)$.

**d)** Si la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-3,-1)$ entonces es cóncava hacia abajo en $(1,3)$.

**a)** Verdadero, porque $\lim_{x\to -a} f(x)=\lim_{x\to a} f(-x)=\lim_{x\to a} f(x)$.

**b)** Falso, porque $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(-x)=\lim_{x\to \infty} f(x)=b$.

**c)** Verdadero, porque $f(-2)=f(2)=4$ y es simétrica respecto del eje *Y.*

**d)** Falso, porque la función es par y por tanto simétrica respecto del eje *Y*, luego es cóncava hacia arriba en $(1,3)$.

**96. Se considera una función impar *f*. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

**a)** Si $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ entonces $\lim_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$

**b)** Si $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-3$ entonces $\lim_{x\to -\infty} f(x)=3$

**c)** Si *f* tiene un máximo relativo en $(-3,10)$, entonces también tiene un máximo relativo en $(3,10)$.

**d)** Si la función es creciente en el intervalo $(-5,-2)$ entonces es decreciente en el intervalo $(2,5)$.

**a)** Falso, porque $\lim_{x\to -2^-} f(x)=-\lim_{x\to 2^+} f(x)=-(-\infty)=+\infty$

**b)** Verdadero, porque $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} f(-x)=-\lim_{x\to +\infty} f(x)=-(-3)=3$

**c)** Falso, porque es impar y $f(3)=-f(-3)=-10$.

**d)** Falso, porque la derivada es par y entonces $f'(x)>0$ en $(2,5)$.

**97. Si la función $f(x)$ tiene como asíntota oblicua en $+\infty$ la recta $y = 2x + 1$, ¿qué asíntota oblicua en $+\infty$ tendrá la función $g(x) = f(x+3)$ ?**

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+3)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t-3} = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x+3) - 2x\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(f(t) - 2(t-3)\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(f(t) - 2t\right) + 6 = 1 + 6 = 7$$

Luego la asíntota oblicua es $y = 2x + 7$.

**98. Si la función $f(x)$ tiene como asíntotas oblicuas $y = x$ en $+\infty$ e $y = -x$ en $-\infty$. ¿Tendrá la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ asíntotas horizontales u oblicuas? Indica cuáles son.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, pendiente de la asíntota oblicua en $+\infty$.

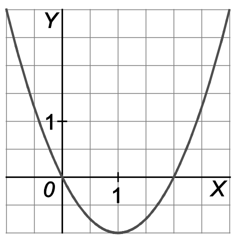
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$, pendiente de la asíntota oblicua en $-\infty$.

Luego tiene asíntotas horizontales $y = 1$ en $+\infty$ e $y = -1$ en $-\infty$.

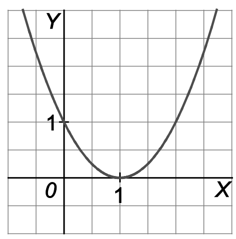
**99. Las siguientes figuras representan las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x-1)^2 - 1$, $h(x) = \left|x^2 - 1\right|$ y $j(x) = (x-1)^2$.**

**Indica cuál es la gráfica que corresponde a cada una de ellas.**

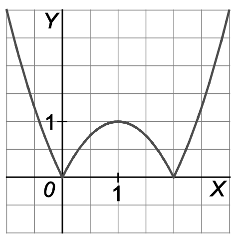
**a)**



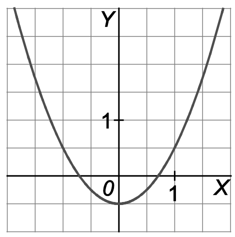

**c)**




**b)**




**d)**




**a)** $g(x) = (x-1)^2 - 1$ **b)** $h(x) = \left|x^2 - 1\right|$ **c)** $j(x) = (x-1)^2$ **d)** $f(x) = x^2 - 1$

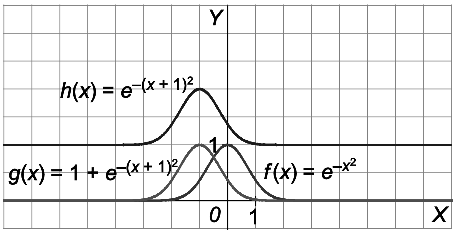
## PROBLEMAS

**100. Dibuja $f(x) = e^{-x^2}$ obteniendo sus asíntotas y extremos relativos. Con la ayuda de dicha gráfica, dibuja las funciones:**

**a)** $g(x) = e^{-(x+1)^2}$ **b)** $h(x) = 1 + e^{-(x+1)^2}$

Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

Máximo relativo: $(0,1)$.




**101. Construye la gráfica de una función que cumpla todos y cada uno de los siguientes requisitos:**

**I.** $D(f) = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$

**II.** $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

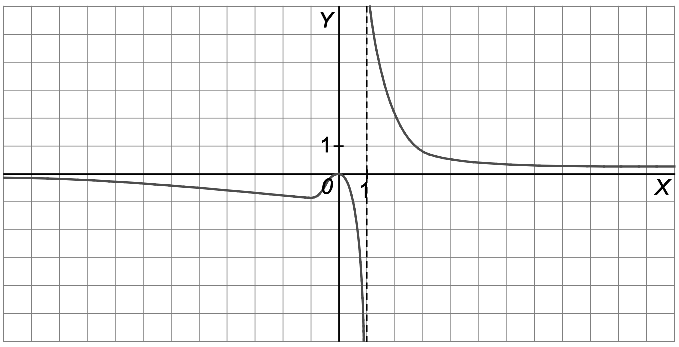
**III.** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

**IV.** Tiene un máximo relativo en $(0,0)$.

**V.** Tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt[3]{-2}$.

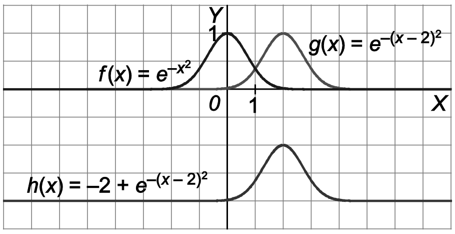
**VI.** Es creciente en el intervalo $\left(\sqrt[3]{-2},0\right)$

**VII.** Es decreciente en $\left(-\infty,\sqrt[3]{-2}\right) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$.

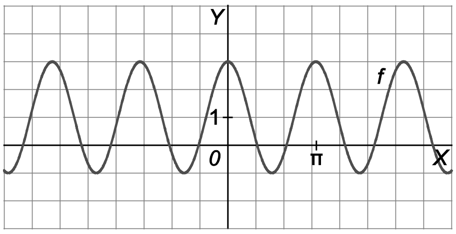


**102. Dibuja la función $f(x)=e^{-x^2}$ obteniendo sus asíntotas y el crecimiento de *f*. Con la ayuda de dicha gráfica, dibuja las funciones:**

**a)** $g(x)=e^{-(x-2)^2}$ **b)** $h(x)=-2+e^{-(x-2)^2}$




**103. Sabiendo que la función que aparece en la gráfica es del tipo $f(x)=a+b\,\text{sen}(cx+d)$, determina los valores de *a*, *b*, *c* y *d*.**




Se considera la gráfica de la función $f(x)=\text{sen}\,x$. Si se comprime horizontalmente a la mitad, se traslada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda, se dilata verticalmente al doble y, finalmente, se desplaza una unidad hacia arriba, se obtiene la gráfica dada.

Por tanto, $f(x)=1+2\,\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ y los valores buscados son $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=\frac{\pi}{2}$.

**104. Partiendo de la gráfica de $y = \cos x$, construye las gráficas de:**

a) $y = \cos(x + \pi)$

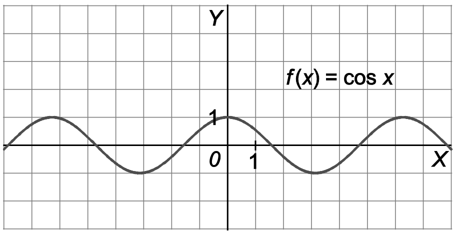
b) $y = 2\cos x$

c) $y = \cos(2x)$

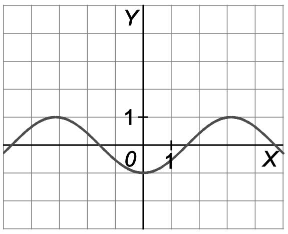
d) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

e) $y = |\cos x|$

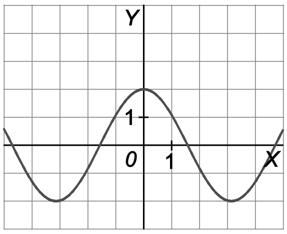
f) $y = \cos|x|$



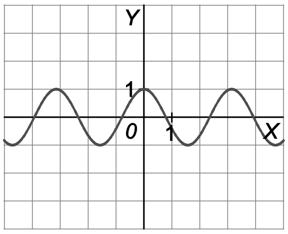

a)



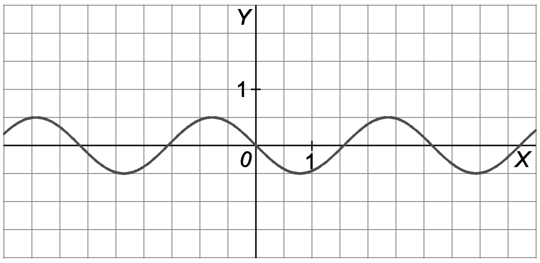

b)



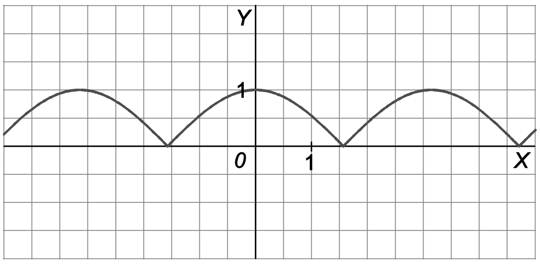

c)



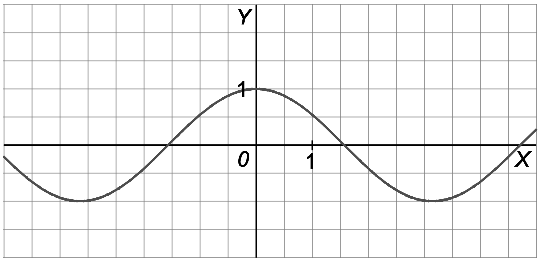

d)




e)




f)



**105. En cierto momento, el número de bacterias en un cultivo es de 3000. Debido a ciertas condiciones ambientales, este número evoluciona según el modelo $N(t)=3-\frac{2\ln(t+1)}{t+1}$ donde $t$ representa los días que han pasado desde el instante inicial y $N(t)$ representa los miles de individuos que hay en cada momento.**

**a)** Comprueba que, efectivamente en el momento inicial hay 3000 individuos.

**b)** Estudia si, con el paso de los días, la población se estabiliza e indica hacia qué valor.

**c)** En qué momento la población es la menor posible. ¿Cuál es dicha población?

**d)** Dibuja la gráfica correspondiente e interprétala.

**a)** $N(0)=3-\frac{2\ln 1}{1}=3$. Luego hay 3000 bacterias en el momento inicial.

**b)** $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)=3-\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2\ln(t+1}{t+1}=3-0=3$. Se estabiliza en 3000 individuos.

**c)** $N'(t)=\frac{2\ln(t+1)-2}{(t+1)^2}=0 \Rightarrow 2\ln(t+1)-2=0 \Rightarrow \ln(t+1)=1 \Rightarrow t+1=e \Rightarrow t=e-1$.

Como la función decrece en $(0,e-1)$ y crece en $(e-1,+\infty)$, entonces hay un mínimo en $t=e-1$.

La población es $N(e-1)=3-\frac{2\ln(e-1+1)}{e-1+1}=3-\frac{2}{e}\simeq 2{,}264$, es decir, 2264 bacterias aproximadamente.

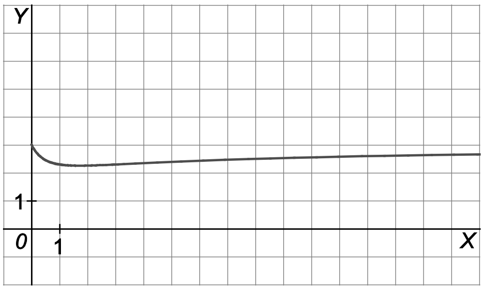
**d)** Dominio: $D(N(t))=[0,+\infty)$

Puntos de corte con los ejes: $(0,3)$

Asíntota horizontal: $N(t)=3$ en $+\infty$

Decrece en $(0,e-1)$ y crece en $(e-1,+\infty)$. Mínimo en $\left(e-1,3-\frac{2}{e}\right)$.

Inicialmente hay una población de 3000 bacterias que va descendiendo hasta, aproximadamente, el segundo día, cuando alcanza una población aproximada de 2264 bacterias. A partir de este momento, la población de bacterias en el cultivo aumenta hasta estabilizarse en 3000 bacterias.



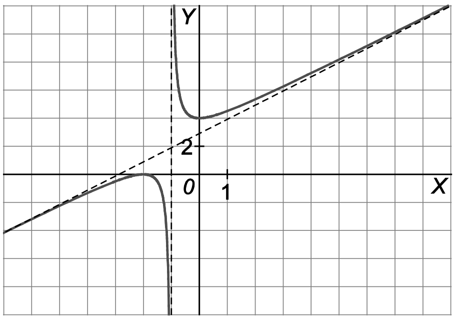
## PARA PROFUNDIZAR

**106. Dibuja la gráfica de las funciones:**

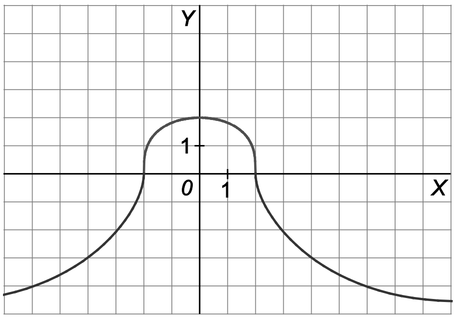
**a)** $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{8}{4+e^{-x}}$ **e)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$

**b)** $f(x)=\sqrt[3]{8-2x^2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ **f)** $f(x)=\operatorname{sen} x\sqrt{\cos x}$

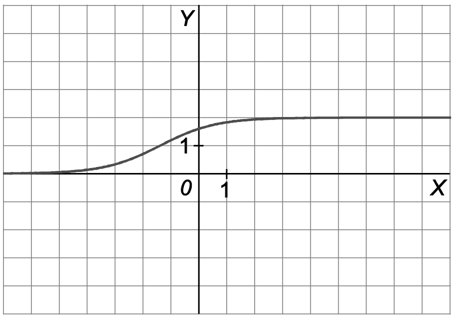
**a)**



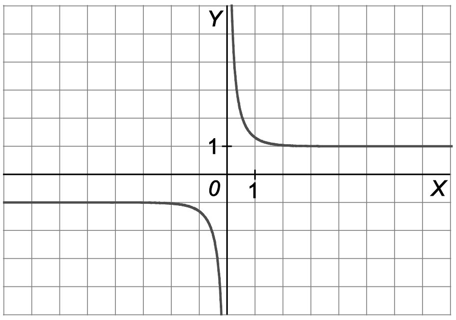
**b)**



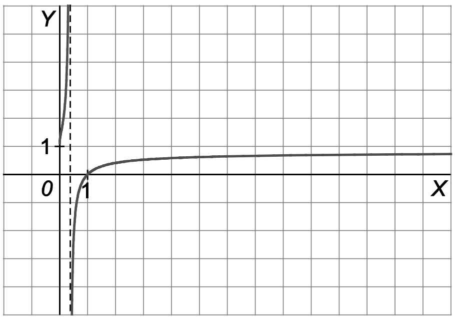
**c)**



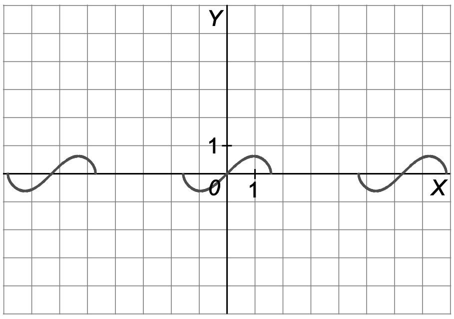
**d)**



**e)**



**f)**



**107. Demuestra la igualdad algebraica:** $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$

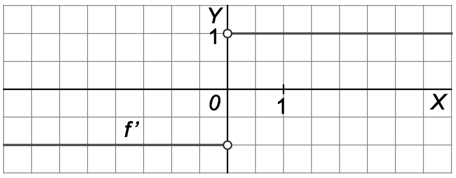
**Apoyándote en la igualdad anterior, demuestra que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-1}$.**

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{b^3}=a-b$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\infty-\infty(\text{indet.})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^6-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^6-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=$$

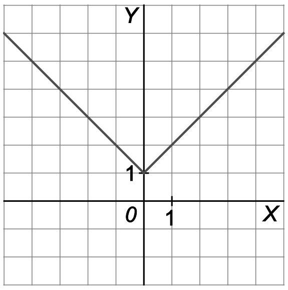
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1-\left(x^3-1\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^6-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^6-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=0$$

**108. De una función $f(x)$ continua en todo $\mathbb{R}$ se conoce la gráfica de su derivada (figura adjunta). Se sabe, además, que $f(0)=1$. Dibuja la gráfica de $f(x)$ y encuentra su expresión analítica.**




$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ -x+b & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Como la función debe ser continua en 0, entonces $a=b=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ -x+1 & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=|x|+1$.




**109. Se consideran las funciones *f*, periódica con período *T*, y *g* otra función cualquiera:**

**a)** Demuestra que $(g\circ f)(x)$ es una función periódica. ¿Es $(f\circ g)(x)$ periódica?

**b)** Aplicando la propiedad indicada en el apartado a, demuestra que $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$ es periódica

**c)** ¿Se puede aplicar la propiedad anterior a $f(x)=\operatorname{sen}(\ln x)$.

**a)** $(g\circ f)(x+T)=g(f(x+T))=g(f(x))=(g\circ f)(x)\Rightarrow g\circ f$ es periódica de período *T*.

En general, $(f\circ g)(x)$ no es periódica.

**b)** $f(x)=\operatorname{sen} x$ es periódica de período $2\pi$. Como $g(x)=e^x$, por el apartado a, $(g\circ f)(x)=e^{\operatorname{sen} x}$ es periódica de período $2\pi$.

**c)** No. Para poder aplicarla, a la *x* debe afectarle directamente una función periódica.

## Autoevaluación

### Comprueba qué has aprendido

**1. Determina el dominio y las posibles asíntotas de las siguientes funciones.**

**a)** $f(x)=\frac{2x^3}{8-x^2}$ **b)** $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$

**a)** Se trata de una función racional. Por tanto:

Dominio: $8-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{8} \\ x=-\sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow D(f)=\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)\cup\left(-\sqrt{8},\sqrt{8}\right)\cup\left(\sqrt{8},+\infty\right)$

Asíntotas: Verticales $x=\sqrt{8}$, $x=-\sqrt{8}$

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Oblicuas: $f(x)=\frac{2x^3}{8-x^2}=-2x+\frac{16x}{8-x^2}\Rightarrow y=-2x$ es asíntota oblicua.

**b)** Como $x^2+1>0\Rightarrow$ el numerador de la función siempre existe. Por otra parte, el denominador se anula para $x=0$. Por tanto: $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Asíntotas: Verticales $x=0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$.

Horizontales: $y=\frac{1}{2}$ en $+\infty$ ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$

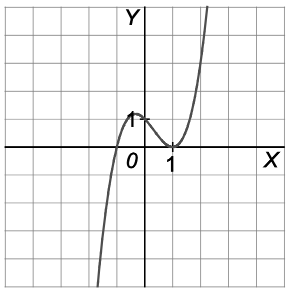
$y=-\frac{1}{2}$ en $-\infty$ ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{-2x}=\frac{\sqrt{1}}{-2}=-\frac{1}{2}$

Obviamente, no tiene asíntotas oblicuas.

**2. Traza la gráfica de la función polinómica $f(x)=(x-1)^2(x+1)$ realizando, previamente, un estudio completo de la misma.**

Dominios: $D(f)=\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$, $(-1,0)$ y $(0,1)$




Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=(x-1)(3x+1)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$, $x=1$.

Crece en $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $\left(-\frac{1}{3},1\right)$.

Mínimo: $(1,0)$. Máximo: $\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=6x-2=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$.

Cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$. Punto de inflexión: $\left(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\right)$.

**3. Dibuja la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x+1}$, tras realizar un estudio completo de la misma.**

Dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Simetrías: La función no es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,8)$.

Asíntotas:

Verticales: $x = -1$

Horizontales: No tiene.

Oblicua: $y = x - 1$, ya que $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x+1} = x - 1 + \dfrac{9}{x+1}$

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -4,\ x = 2$$

Crece en $(-\infty,-4) \cup (2,+\infty)$ y decrece en $(-4,-1) \cup (-1,2)$.

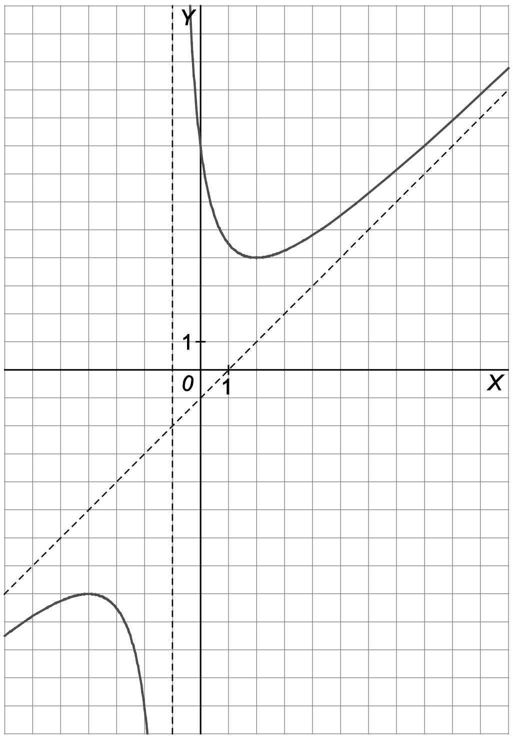
Máximo en $(-4,-8)$. Mínimo en $(2,4)$

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x) = \dfrac{18}{(x+1)^3} \neq 0$

Cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)$ y

cóncava hacia arriba en $(-1,+\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.




**4. Calcula, en cada caso, los posibles valores de *a* y *b* para que la función racional $f(x) = \dfrac{x^2+a}{x+b}$ tenga:**

**a)** Por asíntota oblicua la recta $y = x - 2$.

**b)** Un máximo relativo en el puno $(-1,-1)$.

**a)** $f(x) = \dfrac{x^2+a}{x+b} = x - b + \dfrac{b^2+a}{x+b}$. Para cualquier valor de $a$ y $b = 2$, la función tiene una asíntota oblicua $y = x - 2$.

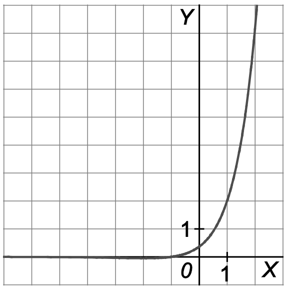
**b)** $f'(x) = \dfrac{x^2+2xb-a}{(x+b)^2}$

$\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+a}{-1+b} = -1 \\ \dfrac{1-2b-a}{-1+b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1-2b \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 1.$ Con estos valores la función sería $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} = x - 1$ si $x \neq -1$ y no existe en el punto en el que debería tener un máximo.

**5. Realiza un estudio completo de la función $f(x)=(x+1)e^{x-1}$ y con los resultados obtenidos, traza su gráfica.**

Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $(-1,0)$, $(0,e^{-1})$




Asíntotas:

Horizontales: $y=0$ en $-\infty$, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=(x+2)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-2$.

Decrece en $(-\infty,-2)$ y crece en $(-2,+\infty)$. Mínimo $\left(-2,-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=(x+3)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-3$.

Cóncava hacia abajo en $(-\infty,-3)$ y cóncava hacia arriba en $(-3,+\infty)$. Punto de inflexión: $\left(-3,-\dfrac{2}{e^4}\right)$.

**6. Dada la función $f(x)=\dfrac{\ln(x^4)}{x^2}$, dibuja su gráfica tras hacer un estudio completo de la misma.**

Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Simetrías: *f* es par pues $f(-x)=\dfrac{\ln((-x)^4)}{(-x)^2}=\dfrac{\ln(x^4)}{x^2}=f(x)$.

Puntos de corte con los ejes: $(-1,0)$, $(1,0)$

Asíntotas:

Verticales: $x=0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^4)}{x^2}=-\infty$

Horizontales: $y=0$

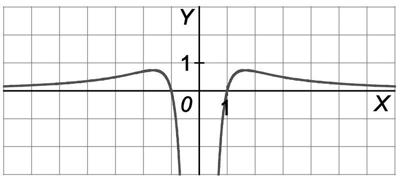
Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{4-4\ln(x^2)}{x^3}=0 \Rightarrow x=\sqrt{e}, x=-\sqrt{e}$

Crece en $(-\infty,-\sqrt{e})\cup(0,\sqrt{e})$ y decrece en $(-\sqrt{e},0)\cup(\sqrt{e},+\infty)$. Máximo en: $\left(-\sqrt{e},\dfrac{2}{e}\right)$, $\left(\sqrt{e},\dfrac{2}{e}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-20+12\ln(x^2)}{x^4}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{e^{\frac{5}{3}}}\ x=\sqrt{e^{\frac{5}{3}}}$

Cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\sqrt{e^{\frac{5}{3}}}\right)\cup\left(\sqrt{e^{\frac{5}{3}}},+\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{e^{\frac{5}{3}}},0\right)\cup\left(0,\sqrt{e^{\frac{5}{3}}}\right)$

Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{e^{\frac{5}{3}}},\dfrac{10}{3e^{\frac{5}{3}}}\right)$, $\left(\sqrt{e^{\frac{5}{3}}},\dfrac{10}{3e^{\frac{5}{3}}}\right)$



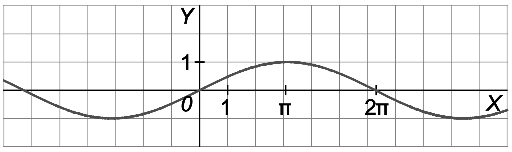
**7. Estudia la periodicidad de la función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ y traza su gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, su crecimiento y sus extremos relativos.**

$$f(x+4\pi) = \text{sen}\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) \Rightarrow \text{ Período } T = 4\pi$$

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$, $(2\pi,0)$ y $(4\pi,0)$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = 3\pi \end{cases}$

Crece en $(0,\pi) \cup (3\pi,4\pi)$ y decrece en $(\pi,2\pi)$. Máximo: $(\pi,1)$. Mínimo: $(3\pi,-1)$.




**8. Si la gráfica de $f(x)$ es la que aparece en la figura, dibuja las gráficas de:**

**a)** $f(x+2)$

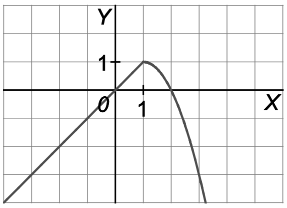
**b)** $f(x)+2$

**c)** $f(x+2)-2$

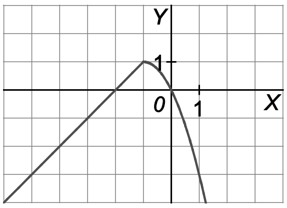
**d)** $f(2x)$

**e)** $|f(x)|$

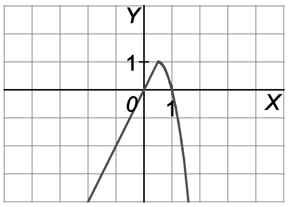
**f)** $f(|x|)$



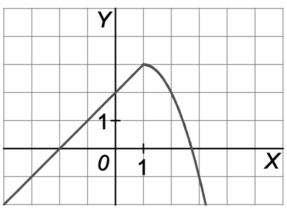

**a)**



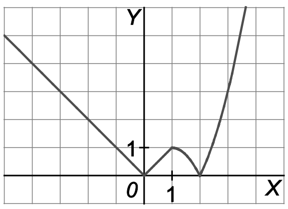

**d)**



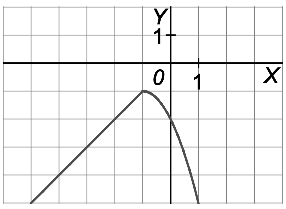

**b)**



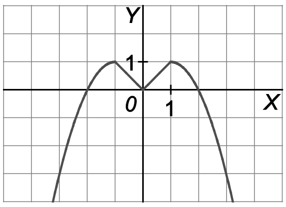

**e)**




**c)**




**f)**



## Relaciona y contesta

**Elige la única respuesta correcta en cada caso**

**1. La función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$:**

**A.** Es par.

**B.** Es impar.

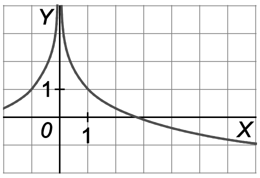
**C.** Presenta una simetría respecto del eje *X*.

**D.** Las tres respuestas anteriores son falsas.

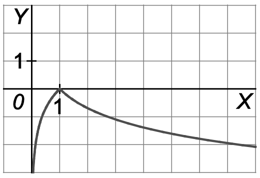
La respuesta correcta es D. $f(-x)=\dfrac{x^2}{-x^3+1}$ que es distinta a $f(x)$ y a $f(-x)$. Por tanto, no es par ni impar, en consecuencia, no presenta simetrías.

**2. La gráfica de la función $f(x)=1-|\ln(x)|$ es:**

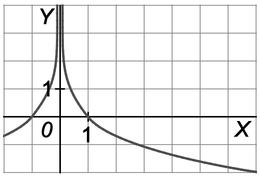
**A.**



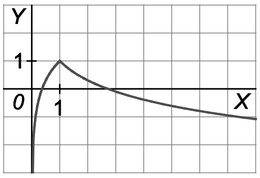

**B.**




**C.**




**D.**




La respuesta correcta es D, porque la función pasa por el punto $(1,1)$ y su dominio es $(0,+\infty)$.

**3. De entre las siguientes posibilidades, ¿cuál es posible para el número de puntos de corte con los ejes que puede tener la gráfica de la función $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ?**

**A.** Uno con el eje *Y* e infinitos con el eje *X*.

**B.** Uno con el eje *Y* y cinco con el eje *X*.

**C.** Ninguno con el eje *Y* y cuatro con el eje *X*.

**D.** Uno con el eje *Y* y dos con el eje *X*.

Al ser una función polinómica debe tener un punto con el eje *Y* y al ser una función polinómica de cuarto grado puede tener cero, uno, dos, tres o cuatro puntos de corte con el eje *X* La respuesta correcta es la B.

**4. *Si $f(x)=mx^3+nx^2+mx-n$ tiene un punto de inflexión en $x=2$, entonces la relación entre los valores de $m$ y $n$ es:**

**A.** $6m+n=0$ **B.** $2m-n=0$ **C.** $2m+n=0$ **D.** $m-2n=0$

La respuesta correcta es A.

$f'(x)=3mx^2+2nx+m$, $f''(x)=6mx+2n=0 \Rightarrow 6m\frac{1}{3}+2n=0 \Rightarrow 2m+2n=0 \Rightarrow m+n=0$

**Señala, en cada caso, las respuestas correctas**

**5.** **Dada la función $f(x) = xe^{-x}$ :**

**A.** Tiene un máximo relativo en $x = 1$.

**B.** Tiene una asíntota horizontal en $+\infty$.

**C.** Es discontinua en $x = 0$.

**D.** Es siempre decreciente.

Las respuestas correctas son la A y la B.

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$.

$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$ , $f''(1) < 0$ .

Por tanto tiene un máximo en $x = 1$.

Además, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ . Asíntota horizontal $y = 0$.

**6.** **Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ :**

**A.** Tiene un mínimo relativo en $x = e$.

**B.** Tiene una asíntota vertical.

**C.** Su dominio es $(0,+\infty)$ .

**D.** Es siempre decreciente.

Las respuestas correctas son A y B.

El dominio de la función es $(0,1) \cup (1,+\infty)$ .

En $x = 1$ tiene una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$ .

$f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

$f''(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} \Rightarrow f''(e) = \dfrac{2-1}{e} = \dfrac{1}{e} > 0$ .

Tiene un mínimo en $x =$ e. La función es creciente en $(e,+\infty)$ .

## Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

**7. *La función $y = f(x)$ verifica que:**

**1.** $f'(0) = f''(0) = 0$ **;**

**2. Tiene un mínimo relativo en $x = 0$.**

**A.** $1 \Leftrightarrow 2$

**B.** $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

**C.** $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$.

**D.** Pueden ocurrir las dos cosas.

La respuesta correcta es D.

Si $f'(0) = f''(0) = 0$, entonces no se puede de deducir que $x = 0$ sea un mínimo de la función porque dependería del valor de $f'''(0)$. Si $f'''(0) \neq 0$ entonces $x = 0$ es un punto de inflexión pero no mínimo y si $f'''(0) = 0$ se tiene que calcular la derivada siguiente.

Si $x = 0$ es mínimo relativo, entonces $f'(0) = 0$ y $f''(0) > 0$, pero no $f''(0) = 0$.

## Señala el dato innecesario para contestar

**8. Para saber cuántos cortes con el eje *X* tiene una función *f*, se sabe:**

**1. Que $f(x)$ tiene un una única asíntota y es vertical.**

**2. Que $f(x)$ es par y cambia su crecimiento solo en $x = 0$.**

**3. Que $f(x)$ no tiene puntos de inflexión.**

**A.** Es innecesario el dato 1.

**B.** Es innecesario el dato 2.

**C.** Es innecesario el dato 3.

**D.** Hacen falta todos los datos.

La respuesta correcta es C porque para determinar los puntos de corte con el eje *X* de la función *f* no es necesario conocer ninguna condición sobre los puntos de inflexión.