5 Primitiva de una función

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Utiliza la tabla de derivadas para calcular estas integrales:

a) $\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{R}\ ,\ r \neq -1)$

b) $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

c) $\int e^x dx = e^x + C$

d) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R} > 0\ ,\ a \neq 1)$

e) $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

f) $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$

h) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

4. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \left(\operatorname{sen} x - e^x + \sqrt{x}\right) dx = -\cos x - e^x + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\cos x - e^x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{x} + C$

c) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\, dx = \int \sqrt[6]{x^5} dx = \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + C = \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + C$

5. Calcula, en cada caso, la función $f(x)$ que verifica las condiciones dadas.

a) $f'(x) = \cos x + x\sqrt{x}$ y $f(\pi) = 0$

$f(x) = \int \left(\cos x + x\sqrt{x}\right) dx = \int \left(\cos x + x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

Para calcular C utilizamos, $f(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = \operatorname{sen}\pi + \frac{2}{5}\sqrt{\pi^5} + C \Rightarrow C = -\frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}$

$f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}$

b) $f'(x) = \frac{3}{1+x^2} - e^x$ y $f(0) = 1$

$f(x) = 3\int \frac{1}{1+x^2} dx - \int e^x dx = 3\operatorname{arctg} x - e^x + C$

Calculamos C, $f(0) = 3\operatorname{arctg} 0 - e^0 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

$f(x) = 3\operatorname{arctg} x - e^x + 2$

c) $f'(x) = x - 2\cos x$ y la gráfica de f corta a la bisectriz del II cuadrante en el punto de abscisa $x = \pi$.

$f(x) = \int (x - 2\cos x) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2\operatorname{sen} x + C$

Sabemos que $f(\pi) = -\pi \Rightarrow f(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2 - 2\operatorname{sen}\pi + C = -\pi \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\pi^2 - \pi$.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\pi^2 - \pi$

6. Prueba que $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y $G(x) = -\frac{\cos 2x}{2}$ son primitivas de $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. ¿En qué constante se diferencian? (Recuerda que $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$).

Bastará comprobar que las derivadas de F y de G coinciden con f.

En efecto, esto es así ya que:

$F'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$ y $G'(x) = \frac{2\operatorname{sen} 2x}{2} = \operatorname{sen} 2x$

Para encontrar la constante que las diferencias restamos ambas expresiones:

$F(x) - G(x) = \operatorname{sen}^2 x + \frac{\cos 2x}{2} = \operatorname{sen}^2 x + \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{1}{2}$

7. Ejercicio resuelto.

8. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \int \frac{6t+6}{6\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{6t+6}{2\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \frac{\sqrt{3t^2+6t-5}}{3}+C$

b) $\displaystyle\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \left(1+\sqrt{x}\right)dx = x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

c) $\displaystyle\int \left(x^3+1\right)^{12}\cdot 4x^2\,dx = \frac{4}{3}\int \left(x^3+1\right)^{12}\cdot 3x^2\,dx = \frac{4}{39}\left(x^3+1\right)^{13}+C$

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt = -\cos(\ln t)+C$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{3s}}{1+e^{6s}}\,ds = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3s}}{1+\left(e^{3s}\right)^2}\,ds = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(e^{3s}\right)+C$

f) $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt{1-9x^4}}dx = \int \frac{8x}{\sqrt{1-\left(3x^2\right)^2}}dx = \frac{8}{6}\int \frac{6x}{\sqrt{1-\left(3x^2\right)^2}}dx = \frac{4}{3}\operatorname{arcsen}\left(3x^2\right)+C$

9. Halla las primitivas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x(\operatorname{sen} x^2)(\cos^4 x^2)$ **b)** $g(x) = \operatorname{tg}(3x+2)$

a) $\displaystyle\int 2x(\operatorname{sen} x^2)(\cos^4 x^2)dx = -\frac{1}{5}\int 2x(-\operatorname{sen} x^2)(5\cos^4 x^2)dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x^2+C$

b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}\left(3x+2\right)dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\operatorname{sen}\left(3x+2\right)}{\cos(3x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

10. Calcula las derivadas de $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ y $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, simplifícalas al máximo y explica qué observas.

$$f'(x) = 2\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \text{ y } g'(x) = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$$

Sus derivadas son iguales, luego son dos primitivas de $h(x) = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$. Como $f(x) = g(x)+C$, mirando su valor en $x=0$ tenemos que $0 = f\left(0\right) = g\left(0\right)+C = 1+C$.

11. Ejercicio interactivo.

12. Ejercicio resuelto.

13. Obtén las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (x^2-5x+1)\cos x\,dx$

f	g'
x^2-5x+1	$\cos x$
$2x-5$	$\operatorname{sen} x$
2	$-\cos x$
0	$-\operatorname{sen} x$

$$\int (x^2-5x+1)\cos x\,dx = (x^2-5x+1)\operatorname{sen} x-(2x-5)(-\cos x)+2(-\operatorname{sen} x)+C=(x^2-5x-1)\operatorname{sen} x+(2x-5)\cos x+C$$

b) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

f	g'
$\operatorname{arctg} x$	**1**
$\frac{1}{1+x^2}$	x

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x-\int\frac{x}{1+x^2}dx = x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

c) $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

f	g'
$\operatorname{arc\,sen} x$	1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x

$$\int\sqrt{\frac{x+5}{x}}\,dx=\int\frac{-10t^2}{(t^2-1)^2}dt=-\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t-1)}dt+\frac{5}{2}\int\frac{-1}{(t-1)^2}dt+\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t+1)}dt+\frac{5}{2}\int\frac{-1}{(t+1)^2}dt=$$

$$=\frac{5}{2}\left(-\ln|t-1|+\frac{1}{t-1}+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+C=\frac{5}{2}\left(-\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}}-1\right|+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}}-1}+\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}}+1\right|+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}}+1}\right)+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}\right|+\sqrt{x(x+5)}+C$$

d) $\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx$

f	g'
x	$\operatorname{sen}(2x)$
1	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$
0	$-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$

$$\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+C$$

e) $\int (x^7 - 3x + 1)\operatorname{sen} x\, dx$

f	*g'*
$x^7 - 3x + 1$	sen$x$
$7x^6 - 3$	–cos$x$
$42x^5$	–sen$x$
$210x^4$	cos$x$
$840x^3$	sen$x$
$2520x^2$	–cos$x$
$5040x$	–sen$x$
5040	cos$x$
0	sen$x$

$$\int (x^7 - 3x + 1)\operatorname{sen} x\, dx = (x^7 - 3x + 1)(-\cos x) - (7x^6 - 3)(-\operatorname{sen} x) + 42x^5 \cos x - 210x^4 \operatorname{sen} x + 840x^3(-\cos x) -$$
$$-2520x^2(-\operatorname{sen} x) + 5040x \cos x - 5040 \operatorname{sen} x + C = (-x^7 + 42x^5 - 840x^3 + 5043x - 1)\cos x +$$
$$+(7x^6 - 210x^4 + 2520x^2 - 5043)\operatorname{sen} x + C$$

f) $\int e^{3x} \cos x dx$

f	*g'*
e^{3x}	cos$x$
$3e^{3x}$	sen$x$
$9e^{3x}$	–cos$x$

$$\int e^{3x} \cos x dx = e^{3x} \operatorname{sen} x + 3e^{3x} \cos x + \int 9e^{3x}(-\cos x) dx$$

Despejando, $\int e^{3x} \cos x dx = \dfrac{e^{3x}(\operatorname{sen} x + 3\cos x)}{10} + C$.

14. Halla la primitiva de $f(x) = (x+1)^2 \operatorname{sen} x$ que cumpla $F(0) = 1$.

$F(x) = \int (x^2 + 2x + 1)\operatorname{sen} x dx$

f	*g'*
$x^2 + 2x + 1$	sen$x$
$2x + 2$	–cos$x$
2	–sen$x$
0	cos$x$

$$\int (x^2 + 2x + 1)\operatorname{sen} x dx = (x^2 + 2x + 1)(-\cos x) - (2x + 2)(-\operatorname{sen} x) + 2\cos x + C =$$
$$= -(x^2 + 2x + 1)\cos x + (2x + 2)\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

$1 = -1 + 0 + 2 + C \Rightarrow C = 0$

Luego $F(x) = -(x^2 + 2x + 1)\cos x + (2x + 2)\operatorname{sen} x + 2\cos x$

15. Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \sqrt{x}\ln x dx$

f	g'
$\ln x$	$\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}\ln x\sqrt{x^3} - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3x}dx = \frac{2}{3}\ln x\sqrt{x^3} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

b) $\int x(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{1}{2}x^2$

f	g'
$\ln x$	x
$\frac{1}{x}$	x^2

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int \frac{1}{2}xdx + C = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$$

c) $\int x^2(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x^2
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

f	g'
$\ln x$	$\frac{2}{3}x^2$
$\frac{1}{x}$	$\frac{2}{9}x^3$

$$\int x^2(\ln x)^2 dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \int \frac{2}{3}x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \left[\frac{2}{9}x^3(\ln x) - \int \frac{2}{9}x^2 dx\right] = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3(\ln x) - \frac{2}{27}x^3 + C$$

d) $\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	$\sqrt{x}$
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx = \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \int \frac{4}{3}\ln x\sqrt{x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \frac{8}{9}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

e) $\int (1-x)e^{-x}dx$

f	g'
$1-x$	e^{-x}
-1	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$\int (1-x)e^{-x}dx = -(1-x)e^{-x} - (-1)e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

f) $\int x^4 e^{2x}dx$

f	g'
x^4	e^{2x}
$4x^3$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$12x^2$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
$24x$	$\frac{1}{8}e^{2x}$
24	$\frac{1}{16}e^{2x}$
0	$\frac{1}{32}e^{2x}$

$$\int x^4e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^4e^{2x} - x^3e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} - \frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x} + C = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) + C$$

16. **Calcula, utilizando la fórmula de la integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2 \ln x^2$ que cumpla $F(1) = 0$.**

f	g'
$\ln x^2$	x^2
$\frac{2}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x^2 - \int \frac{2}{3}x^2\, dx + C = \frac{1}{3}x^3 \ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C = \frac{1}{9}x^3\left(3\ln x^2 - 2\right) + C$$

$$0 = F(1) = \frac{1}{9}(-2) + C \Rightarrow C = \frac{2}{9} \text{ y } F(x) = \frac{1}{9}x^3\left(3\ln x^2 - 2\right) + \frac{2}{9}$$

17 a 19 **Ejercicios resueltos.**

20. Calcula las siguientes integrales indefinidas primitivas previa descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$

b) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$

c) $\int \frac{dx}{x^2-x} = \int \frac{dx}{x(x-1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x}dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C$

d) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$

e) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{1}{24}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{3}{8}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{5}{12}\int \frac{1}{x+5}dx = \frac{1}{24}\left(\ln|x-1| + 9\ln|x+3| - 10\ln|x+5|\right) + C$

f) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int (x^2+x+4)dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{-3}{x+2}dx =$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C$

21. Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \frac{-dx}{x-1} + \int \frac{-dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + C$

b) $\int \frac{1+8x}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{8xdx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + 4\ln|1+x^2| + C$

c) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx = -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx =$

$= -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

d) $\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx +$

$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$

e) $\int \frac{x^3}{x^3+x-2}dx = \int dx + \int \frac{-x+2}{x^3+x-2}dx = x + \frac{1}{4}\int \frac{(-x-6)}{x^2+x+2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx =$

$= x - \frac{1}{8}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx - \frac{11}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dx + \frac{1}{4}\ln|x-1| =$

$= x - \frac{1}{8}\ln|x^2+x+2| - \frac{11\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$

f) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx = \int \frac{x^3-6}{(x^2+2)(x^2+4)}dx = \int \frac{-x-3}{x^2+2}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4}dx =$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx - \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx + \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx =$

$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

22 y 23. Ejercicios resueltos.

24. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \qquad t = 1+\sqrt{x},\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2(t-1)dt = dx$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{-2(t-1)(t-2)}{t}dt = -\int (2t-6)dt - 4\int \frac{dt}{t} = -t^2 + 6t - 4\ln|t| + C =$$
$$= -\left(1+\sqrt{x}\right)^2 + 6\left(1+\sqrt{x}\right) - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx \qquad t = \sqrt[3]{x},\ dt = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}dx \Rightarrow 3t^2dt = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{3t^2}{t+1}dt = 3\int (t-1)dt + 3\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\ln|t+1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right| + C$$

c) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}dx \qquad t = e^x,\ dt = e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = dx$

$$\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1+t}{\left(t^2+1\right)t}dt = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{-t+1}{t^2+1}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{t^2+1}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + arctg(t) + C =$$
$$= x - \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + arctg\left(e^x\right) + C$$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}\cos x\, dx \qquad t = \operatorname{sen} x, dt = \cos x dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}\cos x dx = \int \frac{t-1}{t+1}dt = \int dt - \int \frac{2}{t+1}dt = t - 2\ln|t+1| + C = \operatorname{sen} x - 2\ln\left|\operatorname{sen} x + 1\right| + C$$

25. Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx \qquad t = \sqrt[6]{x};\ dt = \frac{dx}{6\left(\sqrt[6]{x}\right)^5} \Rightarrow 6t^5dt = dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{6t^5 \cdot t^3}{t^2+1}dt = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1\right)dt + 6\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6t + 6\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x}\right) + C$$

b) $\int \sqrt{\frac{x+5}{x}}dx \qquad \left(\text{toma } \frac{x+5}{x} = t^2\right)$

$$\frac{x+5}{x} = t^2 \Rightarrow\ t^2 = 1 + \frac{5}{x},\ 2tdt = \frac{-5}{x^2}dx = -\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}\right)^2 dx \Rightarrow dx = \frac{-10t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

$$\int \sqrt{\frac{x+5}{x}}dx = \int \frac{-10t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{(t-1)}dt + \frac{5}{2}\int \frac{-1}{(t-1)^2}dt + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(t+1)}dt + \frac{5}{2}\int \frac{-1}{(t+1)^2}dt =$$
$$= \frac{5}{2}\left(-\ln|t-1| + \frac{1}{t-1} + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right) + C = \frac{5}{2}\left(-\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}} - 1\right| + \frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}} - 1} + \ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}} + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}} + 1}\right) + C =$$
$$= \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x}}\right| + \sqrt{x(x+5)} + C$$

26. Ejercicio interactivo.

27. Transforma estas integrales en otras polinómicas o racionales.

a) $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$

$t = \cos x,\ dt = -\text{sen}\, x dx$

$\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x(-\text{sen}\, x\,)dx = -\int (1-t^2)^2 t^2 dt$

b) $\int \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx$

$t = \text{sen}\, x,\ dt = \cos x dx$

$\int \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^4 x} \cos x dx = \int \frac{\text{sen}^4 x}{(1-\text{sen}^2 x)^2} \cos x dx = \int \frac{t^4}{(1-t^2)^2} dt$

c) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

$t = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right),\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{2dt}{1-t^2}$

28. Transforma en polinómicas o racionales estas integrales:

a) $\int \frac{2\text{sen}\, x \cos x}{1+\text{sen}^2 x} dx$

$t = \text{sen}\, x\ ,\ dt = \cos x dx \Rightarrow \int \frac{2\,\text{sen}\, x \cos x}{1+\text{sen}^2 x} dx = \int \frac{2\,\text{sen}\, x}{1+\text{sen}^2 x} \cos x dx = \int \frac{2t}{1+t^2} dt$

b) $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$

$t = \text{tg}\, x\ ,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{t^4}{\left(1+t^2\right)^7} dt$

c) $\int \text{tg}^4 x\, dx$

$t = \text{tg}\, x\ ,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \text{tg}^4 x\, dx = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt$

29. Utiliza las propiedades de las derivadas y prueba el recíproco del teorema de Liouville, es decir:
“la derivada de $f(x)e^{g(x)}$ con f y g funciones racionales, es $R(x)e^{g(x)}$ con R función racional”.

$F(x) = f(x)e^{g(x)} \Rightarrow F'(x) = f'(x)e^{g(x)} + f(x)g'(x)e^{g(x)} = \left(f'(x) + f(x)g'(x)\right)e^{g(x)}$

Si *f(x)* y *g(x)* son funciones racionales, entonces, $R(x) = f'(x) + f(x)g'(x)$ pues la derivada de una función racional es racional y producto y suma de racionales es racional.

30. Utilizando la no elementalidad de $\int x^{2n}\cdot e^{ax^2}dx$, prueba que no son elementales las primitivas:

a) $\int\sqrt{\ln x}\,dx$ **b)** $\int\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$ **c)** $\int\frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}dx$

Indicación: pon $\ln x=t^2$ en *a* y *b* y $x=t^2$ en *c*.

a) $\int\sqrt{\ln x}\,dx$. Llamando $x=e^{t^2}, dx=2te^{t^2}dt \Rightarrow \int\sqrt{\ln x}\,dx=\int\sqrt{\ln\left(e^{t^2}\right)}2te^{t^2}dt=2\int t^2e^{t^2}dt$ que no es elemental.

b) $\int\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$. Llamando $x=e^{t^2}, dx=2te^{t^2}dt \Rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx=\int\frac{2te^{t^2}}{\sqrt{\ln\left(e^{t^2}\right)}}dt=2\int e^{t^2}dt$ que no es elemental.

c) $\int\frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}dx$. Llamando $x=t^2, dx=2tdt \Rightarrow \int\frac{e^{at^2}}{t}2tdt=2\int e^{at^2}dt$ que no es elemental.

31 a 36. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Primitivas e integral indefinida. Propiedades

37. Asocia a cada función *f*(*x*) una primitiva *F*(*x*).

f(*x*)
$6\,\text{sen}^2(2x+1)\cos(2x+1)$
$\cos(2x+1)$
$6(2x+1)^2\cos(2x+1)^3$
$6\cos(6x+3)$

F(*x*)
$\text{sen}(2x+1)^3$
$\frac{1}{2}\text{sen}(2x+1)$
$\text{sen}[3(2x+1)]$
$\text{sen}^3(2x+1)$

f(*x*)	*F*(*x*)
$6\,\text{sen}^2(2x+1)\cos(2x+1)$	$\text{sen}^3(2x+1)$
$\cos(2x+1)$	$\frac{1}{2}\text{sen}(2x+1)$
$6(2x+1)^2\cos(2x+1)^3$	$\text{sen}(2x+1)^3$
$6\cos(6x+3)$	$\text{sen}[3(2x+1)]$

38. Comprueba que $F(x)=\text{arcsen}\,x$ y $G(x)=-\arccos x$ son ambas primitivas de la misma función. ¿De qué función se trata? ¿En qué constante difieren?

$F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $G'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, luego son ambas primitivas de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Como $F(x)-G(x)$ es constante, para ver en qué se diferencian basta calcular $F(0)-G(0)=\text{arcsen}\,0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

39. Una primitiva de cierta función *f*(*x*) es $F(x)=x^2-3x+1$. Encuentra otra primitiva de *f*(*x*) cuya gráfica pase por el punto *A*(1, 5).

Las primitivas de *f*(*x*) son de la forma $G(x)=x^2-3x+1+C$ Haciendo $x=1$ tenemos:

$5=1-3+1+C \Rightarrow C=6$. La primitiva buscada es $G(x)=x^2-3x+1+6$.

40. Determina, razonando la respuesta, si las funciones $F(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x}$ y $G(x)=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x\operatorname{sen}x}$ son primitivas de una misma función.

Derivando ambas funciones obtenemos:

$$F'(x)=\frac{(\cos x-\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}x-(\operatorname{sen}x+\cos x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$G'(x)=\frac{-2\operatorname{sen}x\cos x\cdot\cos x\operatorname{sen}x-(1-\operatorname{sen}^2 x)(-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}x+\cos x\cos x)}{(\cos x\operatorname{sen}x)^2}=\frac{-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x-\cos^2 x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{-2\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Como sus derivadas son iguales, ambas son primitivas de la misma función. Dicha función es $f(x)=-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

41. Comprueba que:

a) $\int 6\operatorname{sen}(x+1)\cos(x+1)\,dx=3\operatorname{sen}^2(x+1)+C$

Comprobamos que, efectivamente, $\left(3\operatorname{sen}^2(x+1)+C\right)'=6\operatorname{sen}(x+1)\cos(x+1)$.

b) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}=4\sqrt[4]{x}+C$

Comprobamos que, efectivamente, $\left(4\sqrt[4]{x}+C\right)'=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

c) $\int \sqrt{ax+b}=\dfrac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}+C$

Comprobamos que, efectivamente, $\left(\dfrac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}+C\right)'=\left(\dfrac{2(ax+b)^{3/2}}{3a}+C\right)'=\sqrt{ax+b}$.

Primitivas inmediatas

42. Calcula las siguientes primitivas inmediatas indicando de qué tipo son.

a) $\int \sqrt[5]{x^3}dx$ Tipo: $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \Rightarrow \int \sqrt[5]{x^3}dx = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + C$

b) $\int \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{2^x}dx$ Tipo: $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow \int \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{2^x}dx = \int 2^x dx - 3\int dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 3x + C$

c) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 7}{x^2}dx$ Tipo: $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ y $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 7}{x^2}dx = \int x dx + 3\int dx - 5\int \frac{1}{x}dx + 7\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5\ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}dx$ Tipo: $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$ y $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$$

e) $\int \frac{2\sqrt{1-x^2} - 3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ Tipo: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$

$$\int \frac{2\sqrt{1-x^2} - 3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2x - 3\operatorname{arcsen} x + C$$

f) $\int e^{-x}dx$ Tipo: $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C \Rightarrow \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$

g) $\int \frac{2+t^2}{1+t^2}dt$ Tipo: $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C \Rightarrow \int \frac{2+t^2}{1+t^2}dt = \int dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt = t + \operatorname{arctg} t + C$

h) $\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt$ Tipo: $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt = \frac{1}{3}\int \frac{3t^2}{\sqrt{1-(t^3)^2}}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(t^3) + C$$

43. Halla una primitiva de $y = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C$$

Luego una primitiva sería: $f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x}$

44. Determina *f*(*x*) sabiendo que:

$f'''(x) = 24x$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 2$

$f'''(x) = 24x$ entonces $f''(x) = 12x^2 + C$, como $f''(0) = 2$, se deduce que $C = 2$.

$f''(x) = 12x^2 + 2$ entonces $f'(x) = 4x^3 + 2x + C$, como $f'(0) = 1$, se deduce que $C = 1$.

$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$ entonces $f(x) = x^4 + x^2 + x + C$, como $f(0) = 0$, se deduce que $C = 0$.

Por tanto, $f(x) = x^4 + x^2 + x$.

45. Calcula $\int x\ln(1+x^2)dx$.

Comenzamos llamando $t=1+x^2$, $dt=2xdx \Rightarrow \int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int \ln t dt$

Esta integral se realiza por partes tomando $f(t)=\ln t$ y $g'(t)=1$.

f	g'
$\ln t$	1
$\frac{1}{t}$	t

$$\frac{1}{2}\int \ln t dt=\frac{1}{2}\left(t\ln t-\int \frac{1}{t}tdt\right)=\frac{1}{2}t(\ln t-1)+C$$

Así pues, $\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2)-1\right)+C$

46. Halla la ecuación de una curva $y=f(x)$, sabiendo que pasa por el punto (1, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x es $3x+1$.

Sabemos $f'(x)=3x+1$, luego $f(x)=\frac{3}{2}x^2+x+C$ y como $f(1)=1$ entonces $C=-\frac{3}{2}$.

La curva tiene ecuación $y=f(x)=\frac{3}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.

47. De una función $y=f(x)$, $x>-1$, se sabe que tiene por derivada $y'=\frac{a}{1+x}$ donde a es una constante. Determina la función si, además, se cumple que $f(0)=1$ y $f(1)=-1$.

$$f(x)=\int \frac{a}{1+x}dx=a\ln(1+x)+C$$

Sustituyendo:

$$f(0)=a\cdot\ln 1+C=1 \Rightarrow C=1$$

$$f(1)=a\cdot\ln 2+1=-1 \Rightarrow a=-\frac{2}{\ln 2}$$

La función es $f(x)=-\frac{2\ln(1+x)}{\ln 2}+1=-2\log_2(1+x)+1$.

48. Halla una función $F(x)$ que verifique que $x^5F'(x)+x^3+2x=3$ para $x\neq 0$.

$$x^5F'(x)+x^3+2x=3 \Rightarrow F'(x)=\frac{3-2x-x^3}{x^5}$$

$$F(x)=\int \frac{3-2x-x^3}{x^5}dx=-\frac{3}{4x^4}+\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{x}+C$$

Como nos piden una función, tomando $C=0$ tenemos $F(x)=-\frac{3}{4x^4}+\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{x}$.

49. De la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ se sabe que $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2)=0$.

a) Determina *f*.

b) Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

a) $f(x)=\int\frac{3}{(x+1)^2}dx=-\frac{3}{x+1}+C$ como $f(2)=0$ entonces $f(2)=-\frac{3}{2+1}+C=0\Rightarrow C=1$

Luego $f(x)=-\frac{3}{x+1}+1$

b) $F(x)=\int\left(-\frac{3}{x+1}+1\right)dx=-3\ln|x+1|+x+C$

$1=-3\ln|0+1|+C\Rightarrow C=1$

$F(x)=-3\ln|x+1|+x+1$

50. Calcula estas integrales.

a) $\int\frac{\sqrt{5-3\,\mathrm{tg}\,x}}{\cos^2 x}\,dx=-\frac{2}{9}\sqrt{(5-3\,\mathrm{tg}\,x)^3}+C$

b) $\int\sqrt{x+3}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+C$

c) $\int\frac{\ln x^2}{x}\,dx=\frac{(\ln x^2)^2}{4}+C$

d) $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

e) $\int\frac{x+2}{x^2+4x}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x|+C$

f) $\int\mathrm{sen}\,x^6\cos x\,dx=\frac{\mathrm{sen}^7 x}{7}+C$

51. De todas las primitivas de la función $f(x)=2\mathrm{tg}\,x\sec^2 x$, halla la que pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{4},1\right)$.

$F(x)=\int 2\,\mathrm{tg}\,x\sec^2 x\,dx=\frac{1}{\cos^2 x}+C$

Como $P\left(\frac{\pi}{4},1\right)$, entonces $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}+C=1\Rightarrow C=-1.$

Luego, $F(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1.$

52. Calcula la primitiva de la función $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ que se anula en el punto de abscisa $x = 2$.

$$F(x) = \int x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + C$$

Como x = 2, tenemos que $0 = \frac{\sqrt{(2^2-1)^3}}{3} + C \Rightarrow 0 = \frac{3\sqrt{3}}{3} + C \Rightarrow C = -\sqrt{3}$.

Luego, $F(x) = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} - \sqrt{3}$.

53. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx$

a) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{2x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{2\sqrt{x}}{15}\left(3x^2-10x+15\right) + C$

b) $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx = -e^{2x^2-x+3} + C$

54. Halla la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$, y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

$$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1) + C$$

Como $F(0) = 2$, entonces $\ln 2 + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \ln 2$.

Luego, $F(x) = \ln(e^x+1) + 2 - \ln 2$.

55. Calcula la integral $\int\left[\sqrt{x^2+20x} + (x^2+20x)\right](x+10)dx$.

$$\int\left[\sqrt{x^2+20x} + \left(x^2+20x\right)\right](x+10)dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+20x}\cdot 2(x+10)dx + \frac{1}{2}\int\left(x^2+20x\right)\cdot 2(x+10)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+20x)^3}}{3} + \frac{1}{4}\left(x^2+20x\right)^2 + C$$

Integración por partes

56. Calcula:

a) $\int \ln(x+1)\,dx$

f	g'
$\ln(x+1)$	1
$\frac{1}{x+1}$	$x+1$

$$\int \ln(x+1)\,dx = (x+1)\ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C$$

b) $\int x\,\text{arctg}(x+1)dx$

$$\int x\,\text{arctg}(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{arctg}(x+1) - \left(\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{x^2+2x+2}dx\right) =$$

$$= \frac{x^2\,\text{arctg}(x+1)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\ln(x^2+2x+2)}{2} + C$$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$$

d) $\int x \ln x\,dx$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

e) $\int x(\ln x)^2dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x
$2(\ln x)\frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{2}$

$$\int x(\ln x)^2dx = \frac{x^2}{2}(\ln|x|)^2 - \int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}(\ln|x|)^2 - \left[\frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4}\right] + C$$

f) $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx$

$$\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx = \int x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \int dx - \int \frac{1}{x^2-1}dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x + C$$

57. Determina la integral indefinida $\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx$.

f	g'
x^2	sen$2x$
$2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
2	$-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$
0	$\frac{1}{8}\cos 2x$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

58. Calcula con la tabla auxiliar de integrales sucesivas:

a) $\int x^6 \cos x\,dx$

f	g'
x^6	cos$x$
$6x^5$	sen$x$
$30x^4$	–cos$x$
$120x^3$	–sen$x$
$360x^2$	cos$x$
$720x$	sen$x$
720	–cos$x$
0	–sen$x$

$$\int x^6 \cos x\,dx = 6\cos x(x^5 - 20x^3 + 120x) + \operatorname{sen}x(x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) + C$$

b) $\int x^7 e^{7x} dx$

f	g'
x^7	e^{7x}
$7x^6$	$\frac{1}{7}e^{7x}$
$42x^5$	$\frac{1}{7^2}e^{7x}$
$210x^4$	$\frac{1}{7^3}e^{7x}$
$840x^3$	$\frac{1}{7^4}e^{7x}$
$2520x^2$	$\frac{1}{7^5}e^{7x}$
$5040x$	$\frac{1}{7^6}e^{7x}$
5040	$\frac{1}{7^7}e^{7x}$
0	$\frac{1}{7^8}e^{7x}$

$$\int x^7 e^{7x} dx = e^{7x}\left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{7} + \frac{6x^5}{7^2} - \frac{30x^4}{7^3} + \frac{120x^3}{7^4} - \frac{360x^2}{7^5} + \frac{720x}{7^6} - \frac{720}{7^7}\right) + C$$

c) $\int e^{ax} \cos bx \, dx$

f	g'
$\cos bx$	e^{ax}
$-b \operatorname{sen} xb$	$\frac{e^{ax}}{a}$
$-b^2 \cos bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2}$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b \operatorname{sen} bx) + \int \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b^2 \cos bx) = \frac{e^{ax}\left(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx\right)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a^2}e^{ax}(-b \operatorname{sen} bx) \Rightarrow \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}\left(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx\right)}{a^2 + b^2} + C$$

d) $\int \left(x^3 + x^2 + 1\right) e^x dx$

f	g'
$x^3 + x^2 + 1$	e^x
$3x^2 + 2x$	e^x
$6x + 2$	e^x
6	e^x
0	e^x

$$\int \left(x^3 + x^2 + 1\right) e^x dx = e^x\left(x^3 - 2x^2 + 4x - 3\right) + C$$

59. Determina las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen la condición de que la pendiente de la recta tangente en un punto genérico (x, y) de su gráfica viene dada por la expresión xe^x .

$$f(x)=\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1)+C$$

60. Sea $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(1-x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

$$F(x)=\int \ln\left(1-x^2\right)dx = x\ln(1-x^2)-\int -\frac{2x^2}{1-x^2}dx = x\ln(1-x^2)-2\int dx+2\int\frac{1}{(1-x)(1+x)}dx$$
$$x\ln(1-x^2)-2x+\int\frac{1}{1-x}dx+\int\frac{1}{(1+x)}dx = x\ln(1-x^2)-2x-\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$$

Como pasa por (0,1) se tiene que $-\ln 1+C=1\Rightarrow C=1$ y la función es $F(x)=x\ln(1-x^2)-2x-\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+1.$

61. Calcula la siguiente integral indefinida $\int e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)dx$ en función de los parámetros a, b y c.

$$\int e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)dx=\frac{1}{a}e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)-\frac{1}{a}\int e^{ax}\left(2x+b\right)dx = e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)-\frac{1}{a^2}e^{ax}\left(2x+b\right)+\frac{1}{a^2}\int 2e^{ax}\,dx=$$
$$=e^{ax}\left(\frac{x^2+bx+c}{a}-\frac{2x+b}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)+C$$

62. Hallar la primitiva de $f(x)=x^2\ln x$ cuya gráfica pasa por el punto $A(1, 2)$.

f	g'
$\ln x$	x^2
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

$$\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C=\frac{1}{9}x^3\left(3\ln x-1\right)+C$$

$$F(1)=\frac{1}{9}(-1)+C=2\Rightarrow C=\frac{19}{9}$$

Luego una primitiva sería $F(x)=\frac{1}{9}x^3\left(3\ln x-1\right)+\frac{19}{9}$.

63. Utiliza la integración por partes para calcular la función $f(x)$ que cumple $f(0)=1$ y $f'(x)=e^x\cos x$.

$$f(x)=\int e^x\cos x dx=e^x\cos x+\int e^x\operatorname{sen}x dx=e^x\cos x+e^x\operatorname{sen}x-\int e^x\cos x dx .$$

Despejando tenemos $f(x)=\int e^x\cos x dx=\frac{e^x\cos x+e^x\operatorname{sen}x}{2}+C$.

$$f(0)=\frac{1}{2}+C=1\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

Luego, $f(x)=\frac{e^x}{2}(\cos x+\operatorname{sen}x+1)$.

Integración de funciones racionales

64. Encuentra dos números reales *A* y *B* tales que: $\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$ y calcula $\int\frac{4x-5}{x^2-1}dx$.

$$\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow A(x-1)+B(x+1)=4x-5$$

En particular, si hacemos $x=1$ obtenemos $2B=-1\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$.

Y si hacemos $x=-1$, $-2A=-9\Rightarrow A=\frac{9}{2}$.

Luego, $\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{\frac{9}{2}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}$.

$$\int\frac{4x-5}{x^2-1}dx=\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=\frac{9}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

65. Se consideran las funciones reales $f(x)=12x^3-8x^2+9x-5$ y $g(x)=6x^2-7x+2$. Calcula la función $H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple que *H*(1) = 1.

$$H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx=\int(2x+1)dx+\int\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}dx=x^2+x+\ln\left(6x^2-7x+2\right)+C$$

Como $H(1)=1\Rightarrow 1+1+\ln 1+C=1\Rightarrow C=-1$

La función es $H(x)=x^2+x+\ln\left(6x^2-7x+2\right)-1$.

66. Resuelve las siguientes integrales que dan lugar a funciones tipo arco tangente. Para ello, primero debes transformar las fracciones en otras de la forma: $\frac{a}{1+(ax+b)^2}$, cuya integral es inmediata $\int\frac{a}{1+(ax+b)^2}dx=\operatorname{arctg}(ax+b)+C$.

a) $\int\frac{2}{1+x^2}dx=2\operatorname{arctg}x+C$

b) $\int\frac{1}{1+2x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x\right)+C$

c) $\int\frac{1}{9+x^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

d) $\int\frac{1}{4+(x-3)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$

e) $\int\frac{1}{x^2-4x+5}dx=\int\frac{1}{(x-2)^2+1}dx=\operatorname{arctg}(x-2)+C$

f) $\int\frac{2}{x^2+10x+41}dx=\int\frac{2}{(x+5)^2+16}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+5}{4}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+5}{4}\right)+C$

67. Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx$ **.**

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx = \int -dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx = -x + \int \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}dx = -x + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{x+2}dx =$$
$$= -x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\ln|x+2| + C$$

68. Halla la integral racional $\int \frac{3x}{x^2+x-2}dx$ **.**

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}dx = \int \frac{3x}{(x-1)(x+2)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = \ln|x-1| + 2\ln|x+2| + C$$

69. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x-1}{x^3+x^2}dx$ **.**

$$\int \frac{x-1}{x^3+x^2}dx = \int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-1}{x^2}dx + \int \frac{-2}{x+1}dx = 2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x+1| + C$$

70. Determina estas integrales correspondientes a los diferentes casos de funciones racionales.

a) $\int \frac{dx}{2x-7}$

Esta integral es inmediata.

$$\int \frac{dx}{2x-7} = \frac{1}{2}\ln|2x-7| + C$$

b) $\int \frac{1}{x^2+4}dx$

Caso C. Polinomio de 2.º grado sin raíces reales.

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}dx}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

c) $\int \frac{x}{x^2-4x-5}dx$

Caso A. Raíces reales distintas.

$$\int \frac{x}{x^2-4x-5}dx = \int \frac{x}{(x+1)(x-5)}dx = \int \frac{\frac{1}{6}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{5}{6}}{x-5}dx = \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{5}{6}\ln|x-5| + C$$

d) $\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}dx$

Caso D. Raíces complejas de multiplicidad 1.

$$\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx + \int \frac{-1}{x^2+2}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx =$$
$$= \operatorname{arctg} x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

e) $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

Caso B. Solo tiene raíces reales, algunas de ellas iguales.

$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \frac{x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

f) $\int \frac{x}{x^2+4x+7}dx$

Caso C. Polinomio de 2.º grado sin raíces reales.

$$\int \frac{x}{x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{2}{x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \int \frac{2}{(x+2)^2+3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

g) $\int \frac{dx}{x^4+4}$

Caso D. Raíces complejas de multiplicidad 1.

$$\int \frac{1}{x^4+4}dx = \int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx + \frac{1}{16}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln\left(x^2-2x+2\right) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1) + \frac{1}{16}\ln\left(x^2+2x+2\right) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + C$$

h) $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$

Caso A. Raíces reales distintas.

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}dx = \int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{-3}{x-1}dx = 5\ln|x-2| - 3\ln|x-1| + C$$

Integración por cambio de variables

71. Calcula las siguientes primitivas realizando el cambio de variable que se indica.

a) $\int \frac{x}{x^4+1}dx$, $x^2 = t$

$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + C$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2}$, $2x-1=t^2$

$2x-1=t^2 \Rightarrow 2dx = 2tdt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{2x-1}+2(2x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\ln|1+2t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+2\sqrt{2x-1}\right) + C$$

72. Calcula la primitiva $\int \text{sen}(\ln x)dx$.

Hacemos el cambio de variable $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

$$\int \text{sen}(\ln x)dx = \int e^t \text{sen}\,t dt = e^t \text{sen}\,t - \int e^t \cos t dt = e^t \text{sen}\,t - e^t \cos t - \int e^t \text{sen}\,t dt = x\,\text{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \text{sen}(\ln x)dx$$

$$\int \text{sen}(\ln x)dx = \frac{x(\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + C$$

73. Sea la integral $\int e^{2x}\text{sen}(e^x)dx$:

a) Resuélvela mediante el cambio $t = e^x$.

b) Calcula la constante de integración para determinar la primitiva que pasa por el origen de coordenadas.

a) $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int e^{2x}\,\text{sen}\left(e^x\right)dx = \int t\,\text{sen}\,t dt = -t\cos t - \int -\cos t dt = -t\cos t + \text{sen}\,t + C = -e^x\cos(e^x) + \text{sen}(e^x) + C$$

b) $0 = -e^0\cos(e^0) + \text{sen}(e^0) + C \Rightarrow C = \cos 1 - \text{sen}\,1$

74. Calcula las siguientes primitivas.

a) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}dx$ $\qquad \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{4t}{1+t}dt = \int \frac{4(t+1)}{1+t}dt - 4\int \frac{1}{1+t}dt = 4t - 4\ln|1+t| + C = 4\sqrt{x} - 4\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$$

b) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$ $\qquad e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{t}\right)t}dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \text{arctg}(t) + C = \text{arctg}(e^x) + C$$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}dx$ $\qquad x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = \int \frac{6t^3}{t+1}dt = \int \left(6t^2 - 6t + 6\right)dt + \int \frac{-6dt}{t+1} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C$$

d) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx$ $\qquad 1 + x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2 dx = 2t dt$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{((1+x^3)-1)3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(t^2-1)2t}{t}dt = \frac{2}{3}\int (t^2-1)dt = \frac{2}{9}t^3 - \frac{2}{3}t + C = \frac{2\sqrt{1+x^3}\left(x^3-2\right)}{9} + C$$

e) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$ $\qquad 2^x = t \Rightarrow 2^x \ln 2 dx = dt$

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{\ln 2}\text{arcsen}(t) + C = \frac{1}{\ln 2}\text{arcsen}(2^x) + C$$

f) $\int \frac{x\,\text{arcsen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad t = \text{arcsen}\,x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int \frac{x\,\text{arcsen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int t\,\text{sen}\,t dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \text{sen}\,t + C = -\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}\,x + x + C$$

75. Utiliza el cambio de variable $t^2 = 1 + x^2$ para calcular la integral indefinida $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

$t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow 2tdt = 2xdx \Rightarrow tdt = xdx$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}xdx = \int \frac{t^2-1}{t}tdt = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} - \sqrt{1+x^2} + C$$

76. Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx \qquad t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx = \int \frac{dt}{(t^2-1)(t+1)} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)^2} = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{(t-1)} + \int \frac{-\frac{1}{4}dt}{(t+1)} + \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{(t+1)^2} =$$
$$\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{4}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln|e^x+1| + \frac{1}{2(e^x+1)} + C$$

b) $\int \frac{e^x}{1-e^{-x}}dx \qquad t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{1-e^{-x}}dx = \int \frac{dt}{1-\frac{1}{t}} = \int \frac{t}{t-1}dt = \int 1 + \frac{1}{t-1}dt = t + \ln|t-1| + C = e^x + \ln|e^x-1| + C$$

c) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

Llamando $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| = \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C = \ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C$$

77. Calcula $\int x\left(\ln(1+x^2) + e^{-x}\right)dx$.

$$\int x\left(\ln(1+x^2)+e^{-x}\right)dx = \int x\ln(1+x^2)dx + \int xe^{-x}dx$$

Para resolver la primera integral hacemos el cambio $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ y después la hacemos por partes. La segunda la hacemos por partes directamente:

$$\int x\ln(1+x^2)dx + \int xe^{-x}dx = \frac{1}{2}\int \ln t dt - xe^{-x} + \int e^{-x}dx = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}\int dt - xe^{-x} - e^{-x} = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}t - xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos:

$$\int x\left(\ln(1+x^2)+e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2)-1\right) - e^{-x}(x+1) + C$$

78. Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int e^{x+e^x}dx$.

$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int e^{x+e^x}dx = \int e^x e^{e^x}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{e^x} + C$$

79. Calcula $\int \sec^3 x dx$ (el cambio $\text{sen} x = t$ lleva a una función racional).

$\text{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int \sec^3 x dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{\frac{1}{4}}{t+1} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2} dt + \int \frac{-\frac{1}{4}}{t-1} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} + C = \frac{1}{4}\ln|\text{sen} x+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\text{sen} x+1} - \frac{1}{4}\ln|\text{sen} x-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\text{sen} x-1} + C$$

80. Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$ (realiza el cambio $\sqrt{x^2-2} - x = t$).

$$\sqrt{x^2-2} - x = t \Rightarrow dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} - 1\right)dx = \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}}dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{1}{-t} dt = -\ln|t| + C = -\ln\left|\sqrt{x^2-2} - x\right| + C$$

Integración de funciones trigonométricas

81. Dada la función $f(x) = \cos x - \cos^3 x$:

a) Halla su integral indefinida.

b) ¿Cuál es la primitiva de $f(x)$ que pasa por $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

a) Hacemos el cambio $\text{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int (\cos x - \cos^3 x) dx = \int \cos x (1 - \cos^2 x) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C$$

b) $\frac{\text{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{\text{sen}^3 x - 1}{3}$.

82. Calcula estas dos integrales.

a) $\int \text{sen}^3 x \, dx$

b) $\int \cos^3 x \, dx$

a) Haciendo el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\text{sen} x dx = dt$:

$$\int \text{sen}^3 x \, dx = \int \text{sen}^2 x \, \text{sen} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \, \text{sen} x dx = -\int (1 - t^2) dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

b) Haciendo el cambio $\text{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \text{sen}^2 x) \cos x \, dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \text{sen} x - \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + C$$

83. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (2\,\text{sen}^2 x - 3\cos x)\,dx = 2\int \text{sen}^2 x\,dx - 3\int \cos x\,dx$

Para calcular $\int sen^2 x\,dx$ lo hacemos por partes:

$$\int \text{sen}^2 x\,dx = -\text{sen}\,x\cos x + \int \cos^2 x dx = -\text{sen}\,x\cos x + \int (1-\text{sen}^2 x)\,dx = -\text{sen}\,x\cos x + x - \int \text{sen}^2 x\,dx$$

Despejando, obtenemos $\int \text{sen}^2 x\,dx = \frac{x - \text{sen}\,x\cos x}{2} + C$.

Y por tanto: $\int (2\,\text{sen}^2 x - 3\cos x)\,dx = 2\int \text{sen}^2 x\,dx - 3\int \cos x\,dx = x - \text{sen}\,x\cos x - 3\,\text{sen}\,x + C$

b) $\int \cos^5 x\,\text{sen}^2 x\,dx$

Hacemos el cambio $\text{sen}x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \cos^5 x\,\text{sen}^2 x\,dx = \int \cos^4 x\,\text{sen}^2 x\,\cos x dx = \int \left(1-\text{sen}^2 x\right)^2 \text{sen}^2 x\,\cos x dx = \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2)dt =$$

$$= \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{7}\text{sen}^7 x - \frac{2}{5}\text{sen}^5 x + \frac{1}{3}\text{sen}^3 x + C$$

c) $\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^2 x}\,dx$

Hacemos el cambio $\text{sen}\,x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\text{sen}^2 x)}{\text{sen}^2 x}\cos x\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \int \frac{1}{t^2}dt - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\text{sen}\,x} - \text{sen}\,x + C$$

d) $\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^3 x}\,dx$

Hacemos el cambio $\text{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \text{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^3 x}\,dx = \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int t dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^3}dt = \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{8t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{8}\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{\cot g^2\left(\frac{x}{2}\right)}{8} + C$$

84. Halla estas integrales haciendo el cambio $\text{tg}\frac{x}{2} = t$.

Como $\left(1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}dx = dt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ y $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\text{sen}\,x = \frac{2t}{1+t^2}$

a) $$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{t^2+3}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

b) $$\int \frac{1}{2+\text{sen}x}\,dx = \int \frac{1}{2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dt}{\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

85. Busca en tu libro de 1.º las fórmulas de las sumas y restas de senos y cosenos y empléalas para calcular estas integrales:

a) $\int \cos(5x-3)\,\text{sen}(3x-1)\,dx$

Usamos $2\,\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = \text{sen}\,a - \text{sen}\,b \Rightarrow \begin{cases} a = (5x-3)+(3x-1) = 8x-4 \\ b = (5x-3)-(3x-1) = 2x-2 \end{cases}$.

$$\int \cos(5x-3)\,\text{sen}(3x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int \text{sen}(8x-4)dx - \frac{1}{2}\int \text{sen}(2x-2)dx = -\frac{\cos(8x-4)}{16} + \frac{\cos(2x-2)}{4} + C$$

b) $\int \cos(2x+6)\cos(4x-2)\,dx$

Usamos $2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = \cos a + \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = 6x+4 \\ b = 2x-8 \end{cases}$.

$$\int \cos(2x+6)\cos(4x-2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(6x+4)dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x-8)dx = \frac{\text{sen}(6x+4)}{12} + \frac{\text{sen}(2x-8)}{4} + C$$

c) $\int \text{sen}(2x+1)\,\text{sen}(3x+5)\,dx$

Usamos $2\,\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \cos b - \cos a \Rightarrow \begin{cases} a = 5x+6 \\ b = x+4 \end{cases}$.

$$\int \text{sen}(2x+1)\,\text{sen}(3x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(x+4)dx - \frac{1}{2}\int \cos(5x+6)dx = \frac{\text{sen}(x+4)}{2} - \frac{\text{sen}(5x+6)}{10} + C$$

d) $\int \text{sen}(2x+1)\cos(3x+5)\,dx$

Usamos $2\,\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = \text{sen}\,a - \text{sen}\,b \Rightarrow \begin{cases} a = 5x+6 \\ b = x+4 \end{cases}$.

$$\int \text{sen}(2x+1)\cos(3x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \text{sen}(5x+6)dx - \frac{1}{2}\int \text{sen}(x+4)dx = \frac{-\cos(5x+6)}{10} + \frac{\cos(x+4)}{2} + C$$

Integrales no elementales

86. Partiendo de que $\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ no es elemental, demuestra que las siguientes integrales tampoco lo son.

a) $\int \frac{dx}{\ln x}$ **b)** $\int e^{e^x}dx$ **c)** $\int \ln(\ln x)dx$

a) Hacemos el cambio $e^t = x \Rightarrow e^t dt = dx$ $\int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^t}{t}dt$.

b) Hacemos el cambio $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ $\int e^{e^x}dx = \int \frac{e^{e^x}}{e^x}e^x dx = \int \frac{e^t}{t}dt$.

c) Hacemos el cambio $e^t = x \Rightarrow e^t dt = dx$ $\int \ln(\ln x)dx = \int \ln t \cdot e^t dt$.

Ahora, integrando por partes, tenemos $\int \ln(\ln x)dx = \int \ln t \cdot e^t dt = \ln t \cdot e^t - \int \frac{e^t}{t}dt$.

87. Utilizando la tabla de integración por partes demuestra que $\int \frac{e^x}{x}dx$, no es elemental.

Si tomamos $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g'(x)=e^x$:

f	***g'***
$\frac{1}{x}$	e^x
$-\frac{1}{x^2}$	e^x
$\frac{2}{x^3}$	e^x
...	...

Si tomamos $f(x)=e^x$ y $g'(x)=\frac{1}{x}$:

f	*g'*
e^x	$\frac{1}{x}$
e^x	$\ln x$
e^x	$x(\ln x-1)$
...	...

Se observa que tanto de una forma como de la otra se llega a sumas de infinitos sumandos y, por tanto, la integral es no elemental.

Actividades de síntesis

88. Resuelve las siguientes integrales por el método que creas más conveniente.

a) $\int \frac{x^2+2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+3}{2x}dx=\frac{1}{2}\int x\,dx+\int x^{\frac{-2}{3}}dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{-1}{2}}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}x^2+3\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+\frac{3}{2}\ln|x|+C$

b) $\int \text{sen}^5 x\,dx$

Como $\text{sen}^5 x=\text{sen}^4 x\,\text{sen}\,x$, se pone $\cos x=t$ y $-\text{sen}\,x dx=dt$, quedándonos:

$$\int \text{sen}^5 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\,\text{sen}\,x\,dx=-\int(1-t^2)^2\,dt=-\frac{1}{5}t^5-t+\frac{2}{3}t^3=-\frac{1}{5}\cos^5 x-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x+C$$

c) $\int \sqrt{x}(1-x^2)dx$

Poniendo $x=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene: $2\int t(1-t^4)t\,dt=2\frac{t^3}{3}-2\frac{t^7}{7}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+C$

d) $\int\frac{1}{x^2-x}dx=\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\frac{-dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+\ln|x-1|+C$

e) $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

Haciendo $1+x=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene:

$$\int(t^2-1)^2 t\cdot 2t\,dt=2\left(\frac{t^7}{7}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)=2\sqrt{(1+x)^3}\left(\frac{(1+x)^2}{7}-\frac{2}{5}(1+x)+\frac{1}{3}\right)+C=\frac{2}{105}\sqrt{(1+x)^3}(15x^2-12x+8)+C$$

f) $\int\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=x-4\sqrt{x}-\frac{6}{x}-\ln|x|+C$

g) $\int \text{tg}(ax)\sec^2(ax)dx$

Haciendo $\text{tg}(ax)=t$ y $a\sec^2(ax)dx=dt$, se llega a $\frac{1}{a}\int t\,dt=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2a}\text{tg}^2(ax)+C$.

h) $\int x\ln(x+a)dx=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+a}dx=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{2}\int(x-a)dx-\frac{1}{2}\int\frac{a^2}{x+a}dx=$

$=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{4}(x-a)^2-\frac{a^2}{2}\ln(x+a)+C=\frac{1}{2}\ln(x+a)\left(x^2-a^2\right)-\frac{1}{4}(x-a)^2+C$

i) $\int\frac{x}{(x-2)(x^2-9)}dx=\int\frac{x}{(x-2)(x-3)(x+3)}dx=-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x+3}=$

$=-\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{10}\ln|x+3|+C$

j) $\int x\,\text{sen}(2x)\,dx$

f	g'
x	$\text{sen}(2x)$
1	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$
0	$-\frac{1}{4}\text{sen}(2x)$

$\int x\,\text{sen}(2x)\,dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\text{sen}2x+C$

89. Resuelve estas integrales por el método más adecuado.

a) $\int x^a\ln x\,dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x-\frac{1}{a+1}\int x^{a+1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{x^{a+1}}{a+1}=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln x-\frac{1}{a+1}\right)+C$

Si $a=-1$, $\int x^a\ln x\,dx=\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

b) $\int e^{-x}\cos(5x)dx=-e^{-x}\cos(5x)+5e^{-x}sen(5x)-25\int e^{-x}\cos(5x)dx\Rightarrow\int e^{-x}\cos(5x)dx=$

$=\frac{-e^{-x}\cos(5x)+5e^{-x}sen(5x)}{26}+C$

c) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$

Haciendo $x-3=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene:

$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(t^2+3)t\cdot 2t\,dt=2\left(\frac{t^5}{5}+t^3\right)=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C$

d) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$

Se denomina $f(x)=\ln x$ y $g'(x)=\frac{1}{x^3}$.

$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\ln x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln x\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$

e) $\int \frac{4}{x^4-1}dx$

$$\frac{4}{x^4-1}=\frac{4}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)(x+1)}{x^4-1}$$

De la igualdad $4=(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)(x+1)$, haciendo:

$x=1 \Rightarrow 4=4D \Rightarrow D=1$

$x=-1 \Rightarrow 4=-4C \Rightarrow C=-1$

$x=0 \Rightarrow 4=-B-C+D \Rightarrow B=-2$

$x=2 \Rightarrow 4=6A+3B+5C+15D \Rightarrow A=0$

Luego la integral pedida es:

$$\int \frac{4}{x^4-1}dx=-2\,arctgx-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

f) $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx$

Como $x\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2) \Rightarrow \int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int x\ln(1+x^2)dx$. La integral se puede resolver haciendo $1+x^2=t$ y $2xdx=dt$ y se transforma en $\frac{1}{2}\int \ln t dt=\frac{1}{2}(t\ln t-t)=\frac{1}{2}t(\ln t-1)$.

Así que la integral pedida es $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{4}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2)-1\right)+C$.

g) $\int x\left(ax^2+b\right)^n dx$

Si $n=-1$, $\int \frac{x}{ax^2+b}dx=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|+C$

Si $n\neq 1$, haciendo $ax^2+b=t$ y $2axdx=dt$, se tiene que:

$$\int x(ax^2+b)^n dx=\frac{1}{2a}\int t^n dt=\frac{1}{2a(n+1)}\left(ax^2+b\right)^{n+1}+C$$

h) $\int \frac{\pi}{\cos^2(\pi x-1)}dx=tg(\pi x-1)+C$

i) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

Haciendo $x=t^6$ y $dx=6t^5dt$, se tiene que resolver $6\int \frac{t^3-1}{t^2+1}\cdot t^5dt$

Como $t^8-t^5=(t^2+1)(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1)+(1-t)$ la integral pedida es:

$$6\int (t^6-t^4-t^3+t^2+t-1)dt+6\int \frac{1-t}{t^2+1}dt=$$

$$=6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[6]{x^4}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}\right)+6arctg\sqrt[6]{x}-3\ln\left(\sqrt[6]{x^2}+1\right)+C$$

j) $\int \frac{\mathrm{sen}x}{1+\mathrm{tg}^2x}dx=\int \mathrm{sen}x\cos^2x dx=-\frac{1}{3}\cos^3x+C$

k) $\int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 dx$

Como $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}-2)$

Así pues $\int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x\right)+C$

l) $\int \frac{x^2}{x^3+x^2-2x}dx$

$$\frac{x^2}{x^3+x^2-2x}=\frac{x}{x^2+x-2}=\frac{x}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

Como $x=A(x-1)+B(x+2)\Rightarrow A=\frac{2}{3}, B=\frac{1}{3}$ por lo que $\int\frac{x^2}{x^3+x^2-2x}dx=\frac{2}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C$

m) $\int\frac{x-3}{x^2+9}dx=\int\frac{x}{x^2+9}dx-\int\frac{3}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\int\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

n) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$ Haciendo $x^2-9=t$ y $2xdx=dt$:

$$\int x\sqrt{x^2-9}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-9)^3}+C$$

o) $\int(e^{\text{sen}3x})^3\cos(3x)dx$

Haciendo $e^{sen3x}=t$ y $e^{\text{sen}3x}\cdot 3\cos 3x dx=dt$, se tiene que:

$$\int\left(e^{\text{sen}3x}\right)^3\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int t^2dt=\frac{1}{9}t^3=\frac{1}{9}\left(e^{sen3x}\right)^3+C$$

p) $\int\cos\frac{x}{2}\cos x\,dx$

Usamos $2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\cos a+\cos b\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}x\\ b=\frac{1}{2}x\end{cases}$

$$\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos\left(\frac{3x}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{3}sen\left(\frac{3x}{2}\right)+sen\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

q) $\int\frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx=-3\ln|x|+\int\frac{3x+4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ y esta última integral se resuelve como:

$$\int\frac{3x+4}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+1+\frac{5}{3}}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{5}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$ y, finalmente,

$$\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Así pues, $\int\frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx=-3\ln|x|+\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

r) $\int\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx$

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}=\frac{A(x+1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+1)^2(x+2)+D(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$x^2+3x-2=A\,(x+1)(x+2)^2+B\,(x+2)^2+C\,(x+1)^2\,(x+2)+D\,(x+1)^2$

Si $x=-1\Rightarrow -4=B$

Si $x=-2\Rightarrow -4=D$

Si $x=0\Rightarrow -2=4A+4B+2C+D$

Si $x=1$ es $2=18A+9B+12C+4D$

Por tanto, $B=-4$, $D=-4$, $4A+2C=18$; $18A+12C=54$, por lo que $A=9$, $C=-9$ y la integral pedida es:

$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx=9\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}-9\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}+C$$

s) $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx$

$\frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$, así que $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$

t) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$

Poniendo $\sqrt{x+1} = t$ y $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = dt$, se tiene que:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \ln t^2 dt = 4(t\ln t - t) = 4\sqrt{x+1}\left(\ln\sqrt{x+1} - 1\right) + C$$

u) $\int \frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}}dx$

Operando: $\frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}} = 15\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

Así pues $\int \frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}}dx = 15\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx + 3x = \frac{15}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3x + C$

v) $\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx$

Como $\frac{2x+5}{x^2+x+1} = \frac{2x+1+4}{x^2+x+1}$, se tiene que:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + 4\int\frac{1}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + 4\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

w) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx - \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

Llamando $t = e^x; dt = e^x dx$ y $s = e^{-x}; ds = -e^{-x}dx$

$$\int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{s}{1+s^2}ds = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(s^2+1\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(e^{-2x}+1\right) + C$$

x) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

y) $\int \frac{x^2}{1-x^6}dx$ Llamando $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$:

$$\int \frac{x^2}{1-x^6}dx = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{6}\int\frac{dt}{1-t} + \frac{1}{6}\int\frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{6}\ln|1-t| + \frac{1}{6}\ln|1+t| + C = -\frac{1}{6}\ln|1-x^3| + \frac{1}{6}\ln|1+x^3| + C$$

z) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+1}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} - \int \frac{dx}{x+1} = 2\sqrt{x+1} - \ln|x+1| + C$

90. Sea la función definida $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $A(-1, 0)$.

$u=1-x^2$	$v'=e^{-x}$
$-2x$	$-e^{-x}$
-2	e^{-x}
0	$-e^{-x}$

$$F(x)=\int\left(1-x^2\right)e^{-x}dx=-\left(1-x^2\right)e^{-x}+2x\,e^{-x}+2\,e^{-x}+C=\left(x+1\right)^2e^{-x}+C$$

Como $F(-1)=0\Rightarrow 0=\left(-1+1\right)^2e^1+C\Rightarrow C=0$ la función buscada es $F(x)=\left(x+1\right)^2e^{-x}$.

91. A partir de los datos, halla en cada caso la función $f(x)$.

a) $f'(x)=(x-1)^3(x-3),\ f(0)=1$

$$f(x)=\int(x-1)^3(x-3)dx=\int(x^3-3x^2+3x-1)(x-3)dx=\int(x^4-6x^3+12x^2-10x+3)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+4x^3-5x^2+3x+C$$

Como $f(0)=1\Rightarrow C=1$, la función buscada es $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+4x^3-5x^2+3x+1$.

b) $f'(x)=\left(3x-2\right)^2\left(x-2\right),\ f(2)=0$

$$f(x)=\int\left(3x-2\right)^2\left(x-2\right)dx=\int\left(9x^3-30x^2+28x-8\right)dx=\frac{9}{4}x^4-10x^3+14x^2-8x+C$$

Como $f(2)=0\Rightarrow 0=\frac{9}{4}\cdot16-10\cdot8+14\cdot4-8\cdot2+C\Rightarrow C=4,$ la función buscada es:

$$f(x)=\frac{9}{4}x^4-10x^3+14x^2-8x+4.$$

92. Dada la función $f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}$, halla $\int f(x)\,dx$.

$$\int\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx=\int\frac{x}{x^2-4}dx+\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|+\frac{1}{2}\ln^2(x+1)+C$$

93. Halla la integral indefinida $\int\frac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x-3\right)}dx$.

$$\int\frac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x-3\right)}dx=\int\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)\left(x-3\right)}dx$$

Debemos integrar una función ración racional por lo que la escribimos como: $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}=\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)\left(x-3\right)}$

Resolviendo $\begin{cases}A+B+C=0\\-5A-4B-3C=3\\6A+3B+2C=7\end{cases}$ obtenemos $A=5$, $B=-13$, $C=8$ y podemos escribir la integral como:

$$\int\frac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x-3\right)}dx=\int\frac{5}{(x-1)}dx+\int\frac{-13}{(x-2)}dx+\int\frac{8}{(x-3)}dx=5\ln\left|x-1\right|-13\ln\left|x-2\right|+8\ln\left|x-3\right|+C$$

94. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$ **c)** $\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$

b) $\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx$ **d)** $\int \sqrt{3-x^2+2x}\,dx$

(Pista: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ se calcula con el cambio $x = \operatorname{sen} t$).

a) $\int \sqrt{1-4x^2}dx = \int \sqrt{1-(2x)^2}dx$

Haciendo $2x = t$ y $2dx = dt$, se tiene que $\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-t^2}dt$.

Poniendo ahora $t = \operatorname{sen} u$ y $dt = \cos u\,du$ se tiene:

$$\frac{1}{2}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2u}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} 2x + 2x\sqrt{1-4x^2}\right)+C$$

b) $\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx$

Como $6x-x^2-8 = 1-(x-3)^2$, se tiene que $\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx = \int \sqrt{1-(x-3)^2}dx$.

Haciendo $x-3 = t$ y $dx = dt$ se tiene:

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x-3)+(x-3)\sqrt{1-(x-3)^2}\right)+C$$

c) $\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$

Haciendo $2x-1 = t$ y $2dx = dt$, se tiene que:

$$\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsen}(2x-1)+(2x-1)\sqrt{1-(2x-1)^2}\right)+C$$

d) $\int \sqrt{3-x^2+2x}\,dx$

Como $3-x^2+2x = 4-(x-1)^2$, se tiene que $\int \sqrt{3-x^2+2x}\,dx = \int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$.

Haciendo $x-1 = 2t$ y $dx = 2dt$, se tiene:

$$2\int \sqrt{4-4t^2}\,dt = 4\int \sqrt{1-t^2}\,dt = 2\left(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}\right) = 2\left(\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\right)+C$$

95. Escribe como integral de un cociente de polinomios $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ y resuélvela (haz el cambio $x=\dfrac{1}{\text{sen}\,t}$).

Poniendo $x=\dfrac{1}{\text{sen}\,t}$ y $dx=\dfrac{-\cos t}{\text{sen}^2 t}dt$, la integral dada se transforma en $-\int \dfrac{\cos^2 t}{\text{sen}^3 t}dt$.

Haciendo en esta última integral $\cos t = u$ y $-\text{sen}\,t\,dt = du$, se tiene que $\int \dfrac{u^2}{(1-u^2)^2}du$, cociente de polinomios.

$$\frac{u^2}{(1-u^2)^2}=\frac{A}{1+u}+\frac{B}{(1+u)^2}+\frac{C}{1-u}+\frac{D}{(1-u)^2}=\frac{A(1+u)(1-u)^2+B(1-u)^2+C(1-u)(1+u)^2+D(1+u)^2}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

En la igualdad $u^2=A\,(1+u)(1-u)^2+B\,(1-u)^2+C\,(1-u)(1+u)^2+D\,(1+u)^2$, haciendo:

$$u=1\Rightarrow 1=4D\Rightarrow D=\frac{1}{4}$$

$$u=-1\Rightarrow 1=4B\Rightarrow B=\frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=0\Rightarrow 0=A+B+C+D \\ u=2\Rightarrow 4=3A+B-9C+9D \end{array}\right\}\Rightarrow A=C=-\frac{1}{4}$$

La integral será:

$$\int\frac{u^2}{(1-u^2)^2}du=-\frac{1}{4}\ln|1+u|-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+u}+\frac{1}{4}\ln|1-u|+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-u}=\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{1-u^2}-\frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$$\frac{u}{1-u^2}=\frac{\cos t}{\text{sen}^2 t}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=x\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{1+u}{1-u}=\frac{1+\cos t}{1-\cos t}=\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2$$

Luego $\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\int\dfrac{u^2}{(1-u^2)^2}du=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u}{1-u^2}-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+u}{1-u}=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C$

96. a) ¿Cuándo una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$?

b) Con el cambio de variable $t=\sqrt{x-1}$, halla la primitiva de la función $f(x)=x\sqrt{x-1}$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

a) Cuando $F'(x)=f(x)$.

b) Llamando $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=t^2+1$ y $dx=2tdt$

$$F(x)=\int x\sqrt{x-1}dx=\int(t^2+1)t\cdot 2tdt=\int\left(2t^4+2t^2\right)dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+C$$

Como $F(1)=0\Rightarrow\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{1-1}\right)^5+\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{1-1}\right)^3+C=0\Rightarrow C=0$ y la función es $F(x)=\dfrac{2}{5}\sqrt{x-1}(x-1)^2+\dfrac{2}{3}\sqrt{x-1}(x-1)$.

CUESTIONES

97. Observando que si $F(x)=f(x)g(x)$ entonces $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, encuentra $f(x)$ y $g(x)$ en los casos siguientes y decide quién es $F(x)$:

a) $F'(x)=2xe^x+x^2e^x$

$f(x)=x^2$ y $g(x)=e^x$ y $F(x)=x^2e^x$

b) $F'(x)=2x\cos x-x^2\operatorname{sen}x$

$f(x)=x^2$ y $g(x)=\cos x$ y $F(x)=x^2\cos x$

c) $F'(x)=\frac{1}{x}\operatorname{sen}x+\ln x\cos x$

$f(x)=\ln x$ y $g(x)=\operatorname{sen}x$ y $F(x)=\ln x\operatorname{sen}x$

d) $F'(x)=e^x\operatorname{sen}x+e^x\cos x$

$f(x)=e^x$ y $g(x)=\operatorname{sen}x$ y $F(x)=e^x\operatorname{sen}x$

e) $F'(x)=e^x\operatorname{sen}x-e^x\cos x=-e^x\cos x+e^x\operatorname{sen}x$

$f(x)=-e^x$ y $g(x)=\cos x$ y $F(x)=-e^x\cos x$

f) $F'(x)=1+\ln x=\frac{1}{x}\cdot x+\ln x\cdot 1$

$f(x)=\ln x$ y $g(x)=x$ y $F(x)=x\ln x$

98. Un estudiante no maneja el método de integración por partes y tiene que calcular $\int xe^x dx$. Como le han explicado que todas las primitivas de $f(x)=xe^x$ son de la forma $F(x)=Axe^x+Be^x$ con A y B números reales, se ha basado en ello para resolver el problema. ¿Cómo lo hizo?

Como $F'(x)$ debe ser igual a xe^x, derivó $F(x)$ y obtuvo:

$F'(x)=Ae^x+Axe^x+Be^x=xe^x$ para todo x.

Si $x=0$ obtenemos $A+B=0$ y si $x=1$ obtenemos $2Ae+Be=e$ por lo que $A=1$ y $B=-1$ y la primitiva buscada es $F(x)=xe^x-e^x$.

99. ¿Qué curva pasa por (0, 8) y en cada punto (x, y) de su gráfica la pendiente de la tangente es $3x^2y$?

La pendiente de la tangente en el punto (x, $f(x)$) es $f'(x)$ por lo que $f'(x)=3x^2f(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=3x^2$

Así pues $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 3x^2dx$ .Luego $\ln|f(x)|=x^3+C\Rightarrow f(x)=e^{x^3+C}=e^{x^3}\cdot D$

Como $f(0)=1\cdot D=8\Rightarrow D=8$

La función buscada es $f(x)=8e^{x^3}$.

100. Justifica que si $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{(x+p)^2+q^2}\,dx$ **, entonces** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{q}\,arctg\left(\frac{x+p}{q}\right)+C$ **.**

Como $\displaystyle\int \frac{1}{(x+p)^2+q^2}dx = \int \frac{1}{q^2\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx = \frac{1}{q}\int \frac{\frac{1}{q}}{\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx$

Llamando $t = \dfrac{x+p}{q} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{q}dx$ se tiene que:

$$\frac{1}{q}\int \frac{\frac{1}{q}}{\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx = \frac{1}{q}\int \frac{dt}{t^2+1}dx = \frac{1}{q}\text{arctg}\,t + C = \frac{1}{q}\text{arctg}\left(\frac{x+p}{q}\right)+C\ .$$

101. Justifica que $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx$ **y calcula** $\int \ln^3 x dx$ **.**

Llamando $f(x)=\ln^n x$ y $g'(x)=1$ se tiene que $f'(x)=\dfrac{n\ln^{n-1}x}{x}$ y $g(x)=x$.

Integrando por partes $\displaystyle\int \ln^n x dx = x\ln^n x - \int x\cdot\frac{n\ln^{n-1}x}{x}dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx$.

$\int \ln^3 x dx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 x dx = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\int \ln x dx\right) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6\left(x\ln x - \int dx\right) =$
$x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C$

102. Sea *f* una función derivable. Al calcular $\int f(x)\cos 2x\, dx$ **se obtiene:**

$\displaystyle\int f(x)\cos 2x dx = \frac{1}{2}f(x)\text{sen}\,2x - \int e^{2x}\,\text{sen}\,2x dx$

Si $f(0)=\dfrac{1}{2}e^2$, calcula $f(x)$.

Hemos integrado por partes llamando $f(x) = f(x)$ y $g'(x) = \cos 2x$.

Como $g(x) =$ $g(x)=\dfrac{1}{2}\text{sen } 2x$ la integral quedaría:

$\displaystyle\int f(x)\cos 2x dx = \frac{1}{2}f(x)\text{sen}\,2x - \int \frac{1}{2}f'(x)\text{sen}\,2x dx$. Así pues, $\displaystyle\int \frac{1}{2}f'(x)\text{sen}\,2x dx = \int e^{2x}\,\text{sen}\,2x dx$ y, por tanto $f'(x)=2e^{2x}$ por lo que $f(x)=e^{2x}+C$.

Como queremos que $f(0)=e^{2\cdot 0}+C=1+C=\dfrac{1}{2}e^2 \Rightarrow C=\dfrac{1}{2}e^2-1$ y la función buscada es $f(x)=e^{2x}+\dfrac{1}{2}e^2-1$.

103. Al calcular $\int \frac{1}{1+x^2}dx$, un estudiante observa que $\frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ y como $-\frac{1}{x^2}$ es la derivada de $\frac{1}{x}$, se dice que $\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\text{arctg}\frac{1}{x}+C$. ¿Pero $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ no era $\text{arctg}x+C$? ¿Hay algún error en el razonamiento del estudiante?

No, no hay ningún error en el razonamiento, lo que ocurre es que esas dos funciones solo difieren en la constante $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y, por tanto, ambas son primitivas de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

PROBLEMAS

104. La integral $\int \frac{\text{sen}x+\cos x}{3+\text{sen}2x}dx$ es una integral racional en sen$x$ y cos$x$ por lo que el cambio $t = \text{tg}\frac{x}{2}$ la resolvería. Pero el cálculo es mucho más cómodo si se busca una función $g(x)$ tal que $g'(x) = \text{sen}x+\cos x$ y se hace $g(x) = t$ y $g'(x)dx = dt$. Hazlo así.

Si $g'(x) = \text{sen}\,x+\cos x$, entonces $g(x) = -\cos x+\text{sen}\,x$, por lo que $g^2(x) = 1-\text{sen}\;2x$.

Así pues la integral $\int \frac{\text{sen}\,x+\cos x}{3+\text{sen}\,2x}dx$, se puede escribir como $\int \frac{g'(x)\,dx}{4-g^2(x)}$ que, con $g(x) = t$ y $g'(x)dx = dt$, se transforma en $\int \frac{dt}{4-t^2}$. Descomponiendo en fracciones simples:

$\frac{1}{4-t^2} = \frac{A}{2+t}+\frac{B}{2-t} = \frac{A(2-t)+B(2+t)}{4-t^2}$ se tiene que $1 = A\,(2-t)+B\,(2+t)$ y haciendo $t = 2 \Rightarrow 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$ y $t = -2 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

Luego $\int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln|2+t|-\frac{1}{4}\ln|2-t| = \frac{1}{4}\ln\frac{|2+t|}{|2-t|}$

Así pues $\int \frac{\text{sen}\,x+\cos x}{3+\text{sen}\,2x}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{2+\text{sen}\,x-\cos x}{2+\cos x-\text{sen}\,x}+C$.

105. Halla $\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx$ con un cambio de variable.

Si $e^x-1 = t^2$ y $e^x dx = 2tdt$, se tiene que:

$$\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+4)t} = \int \frac{2dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \text{arctg}\frac{t}{2} = \text{arctg}\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}+C$$

106. Calcula una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ de modo que $F(2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$.

$$F(x)=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}dx=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|1+x|+C$$

Como $F(2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+1}=0$, queremos que:

$F(2)=-\frac{1}{2}\ln|1-2|+\frac{1}{2}\ln|1+2|+C=\frac{1}{2}\ln 3+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}\ln 3$.

Luego $F(x)=\frac{1}{2}\ln|1-x|-\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln 3$

107. Si para calcular $\int f(x)\operatorname{sen} x dx$, donde *f* es una cierta función derivable, se aplica integración por partes, se obtiene:

$$\int f(x)\operatorname{sen} x dx=-f(x)\cos x+\int 3x^2\cos x dx$$

Sabiendo que f(1) = 2, encuentra la expresión de *f*.

Si $\int f(x)\operatorname{sen} x dx=-f(x)\cos x+\int 3x^2\cos x\, dx$ se tiene que $f'(x)=3x^2$, por lo que $f(x)=x^3+C$.

Como $f(1)=2\Rightarrow 2=1^3+C\Rightarrow C=1$, luego $f(x)=x^3+1$.

108. En un examen se ha pedido a los estudiantes que resuelvan la integral $\int 2\operatorname{sen} x\cos x dx$.

I. Gema la resolvió con el cambio de variable $u=\operatorname{sen} x$.

II. Fernando utilizó el cambio de variable $u=\cos x$.

III. Iván lo hizo usando la fórmula $2\operatorname{sen} x\cos x=\operatorname{sen} 2x$.

Aunque los tres alumnos dieron respuestas distintas, sin embargo, el profesor les dijo que los tres la habían hecho bien.

Encuentra las tres respuestas dadas y explica por qué todas eran correctas sin ser iguales.

Gema: $u=\operatorname{sen} x\Rightarrow du=\cos x\, dx\Rightarrow\int 2\operatorname{sen} x\cos x\, dx=\int 2u\, du=u^2+C=\operatorname{sen}^2 x+C$

Fernando: $u=\cos x\Rightarrow du=-\operatorname{sen} x\, dx\Rightarrow\int 2\operatorname{sen} x\cos x\, dx=-\int 2u\, du=-u^2+C=-\cos^2 x+C$

Iván: $2\operatorname{sen} x\cos x=\operatorname{sen} 2x\Rightarrow\int 2\operatorname{sen} x\cos x\, dx=\int\operatorname{sen} 2x\, dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

Las tres respuestas son correctas, pues difieren solo en una constante.

En efecto, $\operatorname{sen}^2 x=-\cos^2 x+1$, $-\frac{1}{2}\cos 2x=-\cos^2 x+\frac{1}{2}$.

109. Un punto se mueve en línea recta con una velocidad dada por la fórmula $v(t) = 12t - 5(m/s)$.

Calcula el espacio recorrido, $e(t)$, en cada instante t, sabiendo que $e(0) = 10$ m. ¿Cuál es la velocidad media entre $t = 0$ s y $t = 2$ s? (Recuerda que la velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo).

Se sabe que $e(t) = \int v(t)dt = \int (12t - 5)dt = 6t^2 - 5t + C$.

Como $e(0) = 10 \Rightarrow C = 10$ entonces $e(t) = 6t^2 - 5t + 10$.

La velocidad media es $v_m(0, 2) = \dfrac{e(2) - e(0)}{2 - 0} = 7$ m/s.

110. Se trasplanta un árbol y se observa que su tasa de crecimiento a los x años es de $1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ metros por año. Si a los 5 años medía 5 m, ¿cuánto medía al ser trasplantado?

La tasa de crecimiento es la derivada de la función que mide la altura, luego $C(x) = \int 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} dx = x + \dfrac{1}{x+1} + C$.

Como $5 = C(5) = 5 + \dfrac{1}{6} + C \Rightarrow C = -\dfrac{1}{6}$.

Luego $C(x) = x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{6} \Rightarrow C(0) = \dfrac{5}{6}$. Por tanto, al ser trasplantado medía $\dfrac{5}{6}$ m.

111. Calcula $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$.

a) Por fracciones simples.

b) Mediante el cambio $t = x - 1$.

a) $\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ y descomponiendo la fracción se tiene que $\dfrac{3x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Luego $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int (x+2)\, dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{3}{x-1} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x-1| + C$.

b) Si se hace el cambio $t = x - 1$ y $dt = dx$ se tiene:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Observa que $\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) = \dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2} + 3x - 3 = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

112. Encuentra en cada caso la función $y = f(x)$ tal que:

a) $f'(x) = -3xf(x)$ y corta al eje Y en el punto de ordenada 1.

b) $f'(x) = \dfrac{x}{f(x) + x^2 f(x)}$ y $f(0) = -1$.

c) Su gráfica pasa por (0, 0) y $f'(x) = x^2 f^2(x) + x^2 - f^2(x) - 1$.

a) Como $f'(x) = -3xf(x)$, entonces $-3x = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$. Así pues, $\int -3x dx = \int (\ln f(x))' dx$ y por tanto $-\dfrac{3}{2}x^2 + C = \ln f(x)$. Se tiene entonces que $f(x) = e^{\left(-\frac{3}{2}x^2 + C\right)} = e^{-\frac{3}{2}x^2} \cdot C'$ y como se sabe que $f(0) = 1$ se tiene que $C' = 1$. Luego la función buscada es $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{x}{f(x) + x^2 f(x)} = \dfrac{x}{f(x)(1 + x^2)}$ y por tanto $\dfrac{x}{(1 + x^2)} = f'(x) \cdot f(x) = \dfrac{1}{2}\left((f(x))^2\right)'$

Así pues, $\int \dfrac{x}{(1 + x^2)} dx = \dfrac{1}{2}\int \left((f(x))^2\right)' dx \Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C = \dfrac{1}{2}(f(x))^2$

Luego puede ser $f(x) = \pm\sqrt{\ln(1 + x^2) + C}$ y como $f(0) = -1$, entonces debe ser $f(x) = -\sqrt{\ln(1 + x^2) + 1}$.

c) $f'(x) = f^2(x)(x^2 - 1) + x^2 - 1 = (f^2(x) + 1)(x^2 - 1)$, luego $(x^2 - 1) = \dfrac{f'(x)}{(f^2(x) + 1)} = (\operatorname{arctg}(f(x)))'$

Así pues, $\int (x^2 - 1)\, dx = \int (\operatorname{arctg}(f(x)))' dx$ y por tanto $\dfrac{1}{3}x^3 - x + C = \operatorname{arctg}(f(x)) \Rightarrow f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x + C\right)$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Luego la función buscada es $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x\right)$.

113. Halla el polinomio de grado dos $P(x)$ tal que $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ y $\int \dfrac{P(x)}{x^3(x-1)^2}dx$ sea una función racional.

Se pide encontrar el polinomio $P(x) = ax^2 + 1$, y tal que $\int \dfrac{ax^2 + 1}{x^3(x-1)^2} dx$ sea una función racional.

Si se descompone el integrando en fracciones simples, se obtiene:

$\dfrac{ax^2 + 1}{x^3(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x-1} + \dfrac{E}{(x-1)^2}$ y para que $\int \dfrac{ax^2 + 1}{x^3(x-1)^2} dx$ sea una función racional, debería ocurrir que $A = 0$ y $D = 0$ por lo que la descomposición tomaría la forma:

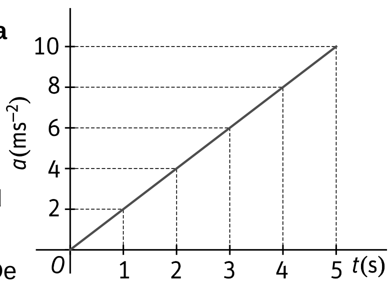
$$\frac{ax^2 + 1}{x^3(x-1)^2} = \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{E}{(x-1)^2} = \frac{B(x-1)^2 x + C(x-1)^2 + Ex^3}{x^3(x-1)^2}$$

Así pues $ax^2 + 1 = (B + E)x^3 + x^2(-2B + C) + x(B - 2C) + C$, con lo que, identificando coeficientes, se tiene que:

$C = 1$, $B - 2C = 0$, $-2B + C = a$ y $B + E = 0$, es decir, $C = 1$, $B = 2$, $a = -3$, $E = -2$.

Por tanto, el polinomio pedido es $P(x) = -3x^2 + 1$.

114. La aceleración de un móvil con trayectoria rectilínea viene dada por la gráfica siguiente:



Si se sabe que para $t = 0$, su posición era $x(0) = 0$ y su velocidad inicial también era $v(0) = 0$, determina las ecuaciones que dan la aceleración, la velocidad y la posición de dicho móvil para cualquier instante de tiempo. Recuerda que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

A la vista de la gráfica, se deduce la ecuación de la aceleración es $a(t) = 2t$. De este modo:

$v(t) = \int a(t)\, dt = \int 2t\, dt = t^2 + C$ Como $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = t^2$

$x(t) = \int v(t)\, dt = \int t^2\, dt = \dfrac{t^3}{3} + C$ Como $x(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = \dfrac{t^3}{3}$

PARA PROFUNDIZAR

115. Demuestra las siguientes fórmulas de reducción.

a) $\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$ con n par mayor que 2.

$\int \text{sen}^n x\,dx = \int \text{sen}^{n-1} x\ \text{sen}\,x dx$, que llamando $f(x) = \text{sen}^{n-1} x$ y $g'(x) = \text{sen}\,x$, resulta ser:

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\text{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\cos^2 x dx = -\text{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x(1-\text{sen}^2 x)dx =$$
$$= -\text{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int (\text{sen}^{n-2} x - \text{sen}^n x)\,dx$$

Así pues, $\int \text{sen}^n x\,dx = -sen^{n-1}xcosx - (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx + (n-1)\int \text{sen}^n x\,dx$, es decir:

$$n\int \text{sen}^n x\,dx = -\text{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\,dx \Rightarrow \int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\,dx .$$

b) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\ \text{sen}\,x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$ con n par mayor que 2.

De forma análoga resultaría la fórmula pedida, pero podría ser más cómodo si se escribe:

$\int \cos^n x\,dx = \int \text{sen}^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$ y, llamando $\frac{\pi}{2} - x = t$ y $-dx = dt$, quedaría $-\int \text{sen}^n t\,dt$. Luego volviendo al apartado a:

$$-\left(-\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx\right) = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\ \text{sen}\,x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

Obsérvese que estas fórmulas son válidas aunque n no fuera par. La observación de n par tiene sentido pues si n fuera impar sería mucho más cómodo hacer la integral directamente sin acudir a ninguna fórmula de reducción.

c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$

Se tiene que $\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$,

por lo que $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$.

Para resolver $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$, sea $f(x) = x$, $g'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{1-n}\frac{1}{1-n}$.

De este modo: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \left(\frac{1}{2(1-n)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx\right)$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \frac{1}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx =$$
$$= \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right)\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx = \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx$$

116. Utilizando las fórmulas deducidas en los apartados a) y b) del ejercicio anterior, obtén:

a) $\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \,\text{sen}\, x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx$

Finalmente, como $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ sustituyendo en la última integral, se tiene que:

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x\,\text{sen}\, x + \frac{3}{8}\left(x + \frac{\text{sen}\,2x}{2}\right) + C$$

b) $\int \text{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\text{sen}^5 x \cos x + \frac{5}{6}\int \text{sen}^4 x\,dx$.

Ahora $\int \text{sen}^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\text{sen}^3 x\,\cos x + \frac{3}{4}\int \text{sen}^2 x\,dx$

Finalmente, como $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos\ 2x)$, sustituyendo en la última integral, se tiene que:

$$\int \text{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\text{sen}^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\text{sen}^3 x\cos x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(x - \frac{\text{sen}\,2x}{2}\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{6}\text{sen}^5 x\cos x - \frac{5}{24}\text{sen}^3 x\cos x + \frac{5}{16}\left(x - \frac{\text{sen}\,2x}{2}\right) + C$$

117. Obtén $\int e^{-x}x^5\,dx$ de dos formas diferentes:

a) Por partes, utilizando el método de la tabla.

b) Utilizando que $\int e^{-x}x^5\,dx = e^{-x}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5) = I(x)$ y obteniendo los coeficientes a_i por derivación.

a)

f	g'
x^5	e^{-x}
$5x^4$	$-e^{-x}$
$20x^3$	e^{-x}
$60x^2$	$-e^{-x}$
$120x$	e^{-x}
120	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$\int e^{-x}x^5\,dx = -x^5e^{-x} - 5x^4e^{-x} - 20x^3e^{-x} - 60x^2e^{-x} - 120xe^{-x} - 120e^{-x} + C = -e^{-x}(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) + C$$

b) $\int e^{-x}x^5\,dx = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5)e^{-x}$

Derivando:

$$e^{-x}x^5 = (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4)e^{-x} - e^{-x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-x}x^5dx = -e^{-x}\left(a_5x^5 + (a_4 - 5a_5)x^4 + (a_3 - 4a_4)x^3 + (a_2 - 3a_3)x^2 + (a_1 - 2a_2)x + a_0 - a_1\right)$$

Así pues, identificando coeficientes, se tiene que:

$a_5 = -1,\ a_4 = -5,\ a_3 = -20,\ a_2 = -60,\ a_1 = -120,\ a_0 = -120$

$$\int e^{-x}x^5dx == -e^{-x}(x^5 + 5x^4 + +20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) + C$$

118. Expresa como integrales de cocientes de polinomios las siguientes integrales.

a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx$ **b)** $\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx$

a) Si $x=t^{12}$ y $dx=12t^{11}dt$, se tiene $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx=12\int \frac{t^4+2}{t^{12}+t^3}t^{11}dt=12\int \frac{t^{12}+2t^8}{1+t^9}dt$.

b) b) Si $\frac{x-1}{x-2}=t^6$, es decir, $x-1= t^6x-2t^6 \Rightarrow 2t^6-1=x(t^6-1) \Rightarrow x=\frac{2t^6-1}{t^6-1}$ y, de este modo, se tiene entonces: $dx=\frac{12t^5(t^6-1)-6t^5(2t^6-1)}{(t^6-1)^2}dt=\frac{-6t^5}{(t^6-1)^2}dt$

c) Por tanto, $\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx=-6\int \frac{\frac{2t^6-1}{t^6-1}+t^2}{\left(\frac{2t^6-1}{t^6-1}\right)^2-2t^3}\cdot\frac{t^5}{(t^6-1)^2}dt$, que es una integral cociente de polinomios.

119. Demuestra que las siguientes integrales se pueden reducir a integrales de cocientes de polinomios.

a) $\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}dx$ **b)** $\int \sqrt[4]{x}(1-x)^2dx$ **c)** $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}dx$

a) Si $1-x=t^3$ y $-dx=3t^2dt$, se tiene $\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}\,dx=-\int \frac{1}{(1-t^3)^2}3t^3\,dt$.

b) Haciendo $x=t^4$ y $dx=4t^3dt$, se tiene $\int \sqrt[4]{x}(1-x)^2dx=\int t(1-t^4)^2 4t^3dt$.

c) $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}dx=\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{5}{3}}x^2dx$ pues $2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$

Así $\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}\,dx=\int x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^5}\,dx$ y haciendo $\frac{1-x}{x}=t^3$, es decir, $1-x=xt^3 \Rightarrow 1=x(t^3+1) \Rightarrow x=\frac{1}{t^3+1}$ y $dx=\frac{-3t^2}{(t^3+1)^2}dt$, se transformaría en $-3\int \frac{1}{(t^3+1)^2}t^5\frac{t^2}{(t^3+1)^2}dt$, que es un cociente de polinomios.

120. Sean p y q números racionales. Demuestra que $\int x^p(1-x)^q\,dx$ se puede poner como integral de un cociente de polinomios si se cumple alguna de estas condiciones:

I. p es entero.

II. q es entero.

III. p y q son no enteros pero $p+q$ sí.

En el ejercicio anterior, se ha visto que $\int x^p(1-x)^q\,dx$ con p y q racionales se podría poner como cociente de polinomios, al menos en estos tres casos: $p=-2$, $q=2$, $p+q=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2$

En general, procediendo exactamente igual que antes, si $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}$ o $p+q\in\mathbb{Z}$, la integral dada se convierte en cociente de polinomios:

En *a*, si $q=\frac{m}{n}$, se toma $1-x=t^n$.

En *c*, si $p=\frac{m}{n}$, se toma $x=t^n$ en b se escribe $x^p(1-x)^q$ como $\left(\frac{1-x}{x}\right)^q x^{p+q}$, y si $q=\frac{m}{n}$, se toma $\frac{1-x}{x}=t^n$.

121. El matemático ruso Tchebycheff (1821–1894) probó que las integrales $\int x^p(1-x)^q\,dx$ solo son elementales en los tres casos citados en el ejercicio anterior. Utiliza este resultado para demostrar estas afirmaciones:

a) $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$ no es elemental.

b) $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}\,dx$ con n y m enteros positivos es elemental si y solo si m o n = 1 o $m = n = 2$.

c) $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ no es elemental.

d) $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx$ siendo p y q números racionales, solo es elemental cuando alguno de los dos es un entero impar o cuando $p+q$ es un entero par.

e) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^n}}\,dx$ con n entero positivo, es elemental solo si n = 1, 2 o 4. Calcula la integral en los tres casos.

f) $\int \operatorname{sen}^q x\,dx$ con q racional es elemental solo si q es entero.

a) Bastaría ver que $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$ no responde a ninguno de los casos anteriores.

En efecto, haciendo $x^3 = t$ y $3x^2dx = dt$, se tiene $\int \sqrt{1-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{1-t}\,\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}$, es decir, $\frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$ en la que $p = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $q = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ y $p+q = -\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z}$.

b) Haciendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}dx = dt$, se tiene $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}dx = \frac{1}{n}\int (1-t)^{\frac{1}{m}}t^{\frac{1-n}{n}}dt$.

Así pues, si m o $n = 1$, se está en uno de los dos casos: a o b.

Si $m = n = 2$, $\frac{1}{m}+\frac{1-n}{n} = 0$ y se está en el caso c.

Si $m \neq 1$, $n \neq 1$ ni $\frac{1}{m}$ ni $\frac{1-n}{n}$ son enteros y su suma $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1$ tampoco, si m y n no son ambos igual a 2.

c) Haciendo $\operatorname{sen} x = \sqrt{t}$ y $\cos x\,dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, la integral dada se transforma en:

$\int \sqrt[4]{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$ y ni p ni q son enteros ($p = -\frac{1}{4}$, $q = -\frac{1}{2}$), ni $p+q = -\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$.

d) Escribiendo $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx = \int \operatorname{sen}^p x \cos^{q-1}\cos x\,dx$ y haciendo $senx = \sqrt{t}$ y $cosxdx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

Como $\cos^{q-1} x = \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{q-1}{2}}$ se tiene $\int t^{\frac{p}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}dt$

Si p o q es un entero impar, $\frac{p-1}{2}$ o $\frac{q-1}{2}$ es entero.

Si $p+q$ es un entero par, resulta que $\frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2} = \frac{p+q}{2} - 1$ sería entero.

Pero si ni p ni q es un entero impar, $\frac{p-1}{2}$ ni $\frac{q-1}{2}$ es entero y si $p+q$ no es un entero par $\frac{p+q}{2}-1 \notin \mathbb{Z}$.

e) Haciendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}dx = dt$, se tiene $\frac{1}{n}\int t^{\frac{1}{n}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1-n}{n}}dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{2}{n}-1}(1+t)^{-\frac{1}{2}}dt$

$q = -\frac{1}{2}$ no es entero.

Si $n = 1$ o 2, $\frac{2}{n}-1$ es entero. Si $n = 4$, $\frac{2}{n}-1-\frac{1}{2}$ es entero.

Si $n \neq 1$, 2 o 4, $\frac{2}{n}-1 \notin \mathbb{Z}$ y $\frac{2}{n}-1-\frac{1}{2} = \frac{2}{n}-\frac{3}{2}$ que es entero solamente si $n = 4$.

Si $n = 1$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ y haciendo $1+x = t^2$ y $dx = 2tdt$, se transforma en: $\int \frac{t^2-1}{t}2t\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \sqrt{1+x}\right)+C$

Si $n = 2$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ y haciendo $1+x^2 = t$ y $2xdx = dt$, se transforma en: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} = \sqrt{1+x^2}+C$

Si $n = 4$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$ y haciendo $x^2 = t$ y $2xdx = dt$, se transforma en: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$

Poniendo ahora $t = \operatorname{tg} u$ y $dt = \frac{1}{\cos^2 u}du$, resulta $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos u}du = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{1-\operatorname{sen}^2 u}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y^2}dy$ con $y = \operatorname{sen} u$ y $dy = \cos u\,du$.

Finalmente como, $\frac{1}{1-y^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A(1-y)+B(1+y)}{1-y^2}$, de la igualdad $1 = A(1-y)+B(1+y)$, se obtiene $A = B = \frac{1}{2}$ por lo que $\int \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{sen} u}{1-\operatorname{sen} u}$.

Si $t = \operatorname{tg} u$ se tiene que $1+t^2 = \frac{1}{\cos^2 u}$, $\cos^2 u = \frac{1}{1-t^2}$, $\operatorname{sen} u = \sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\frac{1+\operatorname{sen} u}{1-\operatorname{sen} u} = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t} = \left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2$, por lo que $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{sen} u}{1-\operatorname{sen} u} = \ln\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)$

Así pues, $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)+C$.

f) $\int \operatorname{sen}^q x\,dx$

Poniendo $\int \operatorname{sen}^q x\,dx = \int \operatorname{sen}^{q-1}\operatorname{sen} x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{q-1}{2}}\operatorname{sen} x dx$.

Haciendo $\cos x = \sqrt{t}$ y $-\operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, se tiene $\int \operatorname{sen}^q x\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-t)^{\frac{q-1}{2}}\cdot t^{-\frac{1}{2}}dt$.

Así pues, como $\int t^p(1-t)^q\,dt$ es elemental solo cuando p, q o $p+q$ son enteros, se tiene que esta integral sería elemental solo si $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{Z}$ o $\frac{q-1}{2}-\frac{1}{2}$ sea entero, es decir, $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{Z}$ o $\frac{q}{2} \in \mathbb{Z}$, es decir $q \in \mathbb{Z}$.

Nota: Obsérvese que, en cualquier caso, esta integral se reduce al apartado d, $\int \operatorname{sen}^q x \cos^p x\,dx$ con $p = 0$ y allí se vio que era elemental cuando alguno era entero impar, en este caso q, o cuando la suma era entero par, en este caso q, es decir, $\int \operatorname{sen}^q x\,dx$ es elemental solo si $q \in \mathbb{Z}$.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcular las primitivas de $f(x)=\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}$ podría no ser muy cómodo si lo intentas hacer directamente, pero si racionalizas previamente te resultará muy fácil. Hazlo así.

Racionalizando se tiene $f(x)=\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-\sqrt{x^2-1}}=x^2+x\sqrt{x^2-1}$.

$$\int\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx=\int x^2\,dx+\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\int\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}2x\ dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+C=$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^3+\sqrt{(x^2-1)^3}\right)+C$$

2. Si $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ es la función $f(x)=x(1-lnx)$, encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $A(1,\ 1)$.

Calculamos $\int f(x)\,dx=\dfrac{x^2}{2}-\int x\ln x\,dx$.

Llamando $u(x)=lnx$ y $v'(x)=x$, se tiene que $\int x\ln x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2$

Así que $\int x(1-\ln x)\,dx=\dfrac{x^2}{2}-\left(\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{x^2}{4}\right)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{1}{2}x^2\ln x=\dfrac{1}{2}x^2\left(\dfrac{3}{2}-\ln x\right)+C$.

Como la curva pedida pasa por (1, 1) resulta que $1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}+C\Rightarrow C=\dfrac{1}{4}$ y la primitiva buscada es $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left(\dfrac{3}{2}-\ln x\right)+\dfrac{1}{4}$.

3. Determina $f(x)$ sabiendo que $f'(x)=e^{2x}\operatorname{sen}x$ y que $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Para calcular $\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx$, se construye la tabla:

f	***g'***
e^{2x}	$\operatorname{sen}x$
$2e^{2x}$	$-\cos x$
$4e^{2x}$	$-\operatorname{sen}x$

$\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx=-e^{2x}\cos x+\ 2e^{2x}\operatorname{sen}x-4\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx$, por lo que $5\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx=e^{2x}(-\cos x+\ 2\ \operatorname{sen}x)$ de donde

$f(x)=\int e^{2x}\operatorname{sen}x\,dx=\dfrac{1}{5}e^{2x}(-\cos x+2\ \operatorname{sen}x)+C$

Como $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{5}e^{\pi}\cdot\ 2+C=1\Rightarrow C=1-\dfrac{2}{5}e^{\pi}$

Luego $f(x)=\dfrac{1}{5}e^{2x}(-\cos x+2\ \operatorname{sen}x)+1-\dfrac{2}{5}e^{\pi}$

4. Obtén $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$.

Poniendo $x+1=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene que $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{2t\,dt}{1+t}=\int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt=2t-2\ln(1+t)$.

Deshaciendo el cambio, nos lleva a $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)+C$.

5. Calcula $\int (x^2\ln x - x\ln x^2)\,dx$.

$x^2\ln x - x\ln x^2 = x^2\ln x - 2x\ln x = \ln x(x^2-2x)$

Escribiendo la tabla, se tiene que:

f	g'
$\ln x$	x^2-2x
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}-x^2$

$$\int \ln x(x^2-2x)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\ln x-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+C$$

6. Determina la función $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ que verifica que $f(2)=\ln 4$ y cuya derivada sea la función $f'(x)=\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}$.

Efectuando la división dada, tenemos que $f'(x)=x-\frac{x+1}{x^3-x^2}$ así que $f(x)=\frac{x^2}{2}-\int\frac{x+1}{x^2(x-1)}dx$.

Por el teorema de descomposición en fracciones simples, $\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$ así que $Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2=x+1$ y haciendo:

$x=0\Rightarrow B=-1$

$x=1\Rightarrow C=2$

$x=-1\Rightarrow 2A-2B+C=0\Rightarrow A=-2$

$$\int\frac{x+1}{x^2(x+1)}dx=\int\frac{-2}{x}dx+\int\frac{-1}{x^2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx=-2\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|$$

Luego $f(x)=\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$

Como $f(2)=\ln 4$, tenemos que $\ln 4=2-\frac{1}{2}+2\ln 2+C\Rightarrow C=-\frac{3}{2}$ y $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{3}{2}$

7. Calcula todas las primitivas de $f(x)=\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}$.

$\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int\frac{(1\text{-}\cos^2 x)\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}dx$. Poniendo $\cos x=t$ y $-\operatorname{sen} x\,dx=dt$, se tiene que:

$$-\int\frac{(1-t^2)}{\sqrt{t}}dt=\int t^{\frac{3}{2}}\,dt-\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}$$

Deshaciendo el cambio nos lleva a $\int\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx=\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}+C$.

8. Observa estas dos integrales:

a) $\int \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \ln|x^2-5| + C$ **b)** $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \ln(x^2+5) + C$

¿Por qué en la primera integral es preciso tomar el valor absoluto y en la segunda no?

Porque x^2-5 puede tomar valores negativos (por ejemplo si $x=0$) mientras que x^2+5 es siempre positivo.

9. Calcula $\int x^2e^{2x}dx$.

Escribiendo la tabla:

f	*g'*
x^2	e^{2x}
$2x$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	$\frac{1}{8}e^{2x}$

$$\int x^2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$ que pasa por el origen, entonces:

A. $F(x) = \frac{1}{3}\text{arcsen}\frac{3x}{2}$

B. $F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

C. $F(x) = \text{arcsen}\frac{2x}{3}$

D. $F(1) = \frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{2}{3}$

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(2x)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{2x}{3} + C$$

Como pasa por el origen, $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$F(1) = \frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{2}{3}$

La respuesta correcta es la D.

2. **Sea f una función derivable, definida en $[1,+\infty)$ que cumple la condición $f(x)f'(x)=1$, siendo $f(8)=4$. Entonces:**

A. $(f(x))^2+f(x)=2x$

B. $f(2)=2$

C. $\lim_{x\to\infty}\frac{f^2(x)}{x}=0$

D. $f(x)=\sqrt{x}$

Integrando por ambas partes $\int f(x)f'(x)dx=\int 1dx$ se tiene que $\frac{1}{2}(f(x))^2=x+C$

Como $f(8)=4\Rightarrow C=0$ y $f(x)=\sqrt{2x}$

La respuesta correcta es la B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

3. **Sea $f(x)=\frac{5(x+1)}{2x^2+x-3}$ e I el intervalo $(1,+\infty)$:**

A. Para todo $x\in I$, $f(x)=\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{1}{x-1}$.

B. La función $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+2\ln|x-1|$ es primitiva de f en I.

C. Existe una primitiva F de f en I tal que $F(2)=5$.

D. Existe una primitiva F de f en I tal que $F(2)=\pi$.

$$\int\frac{5(x+1)}{2x^2+x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{5x+5}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx$$

Aplicando el teorema de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{5x+5}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{A\left(x+\frac{3}{2}\right)+B(x-1)}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$ e igualando se tiene:

$5x+5=A\left(x+\frac{3}{2}\right)+B(x-1)$ y haciendo:

$x=1\Rightarrow 10=\frac{5}{2}A\Rightarrow A=4$

$x=-\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}B\Rightarrow B=1$

$$F(x)=\int\frac{5(x+1)}{2x^2+x-3}dx=2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$$

La respuesta correcta es la B.

4. Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por la fórmula $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y F la primitiva de f tal que $F(0)=0$:

A. $F(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

B. Si $G:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ con $G(x)=F(\operatorname{tg}x)$, entonces $G(x)G'(x)=x$.

C. Sea $H:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ con $H(x)=F\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+F\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$. Entonces $H(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

D. Para todo x positivo, $H'(x)=0$.

$F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x+C$. Como $F(0) = 0 \Rightarrow F(x) = \operatorname{arctg} x$.

Si $F(1)=\dfrac{\pi}{4}$ entonces $F(1)=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}$

$\begin{cases} G(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) \\ G'(x)=1 \end{cases}\Rightarrow G(x)G'(x)=x$

Las respuestas correctas son la A y B.

5. Las funciones primitivas de $f(x)=6\operatorname{sen}x\cos x$ son:

A. $F(x)=3\operatorname{sen}^2x+C$

B. $F(x)=3\cos^2x+C$

C. $F(x)=-\dfrac{3}{2}\cos 2x+C$

D. $F(x)=3\cos 2x+C$

$F(x)=\displaystyle\int 6\operatorname{sen}x\cos x dx=6\int\operatorname{sen}x\cos x dx=3\operatorname{sen}^2 x dx+C$

Aplicando la fórmula del ángulo mitad $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ se llega a $F(x)=-\dfrac{3}{2}\cos 2x+C$.

Las respuestas correctas son la A y la C.

Señala el dato innecesario para contestar

6. La aceleración de cierta partícula viene dada por la expresión $\dfrac{dv}{dt}=a+bt+c\cos(2\pi t)$. Se pide la velocidad, v, en t = 2 y se dispone de los siguientes datos:

1. $v(0)$ **2.** $v\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ **3.** $v\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **4.** $v(-1)$

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

$v(t)=at+\dfrac{1}{2}bt^2+\dfrac{c}{2\pi}\operatorname{sen}2\pi t+C\Rightarrow v(0)=C$

Con $v\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ y $v(-1)$ se pueden hallar a y b. Por tanto el dato innecesario es 2.