6 Integral definida

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Obtén, con el método visto, el área del trapecio limitado por la recta $y = 2x + 1$, el eje X y las verticales $x = 0$ y $x = 4$. Calcula el área geométricamente y compara los resultados.

Se divide el intervalo $[0, 4]$ en $4n$ subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$. Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(2\frac{1}{n}+1\right)+\left(2\frac{2}{n}+1\right)+...+\left(2\frac{4n-1}{n}+1\right)+\left(2\frac{4n}{n}+1\right)\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{2+4+6+\cdots+2(4n-1)+8n}{n}+4n\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\frac{2+8n}{2}4n}{n}+4n\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{(1+4n)4n}{n}+4n\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{4n+16n^2+4n^2}{n}\right] = \frac{4n+20n^2}{n^2} = \frac{4+20n}{n} = \frac{4}{n}+20\,.$$

Se toma, como área del recinto, el número $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, es decir, $A = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}+20\right) = 20$ u^2. Geométricamente, el trapecio tiene altura 4 y bases 1 y 9. Su área es $A = \frac{9+1}{2}\cdot 4 = 20$ u^2, que coincide con la obtenida con el método anterior.

3. Obtén una fórmula para $1^3 + 2^3 + ... + n^3$, procediendo como el ejemplo y desarrollando las potencias cuartas de $(n+1)$.

$$1^4 = 1$$
$$2^4 = (1+1)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^4 = n^4 + 4\cdot n^3 + 6\cdot n^2 + 4\cdot n + 1$$

Sumando los primeros miembros y los segundos miembros, se obtiene:

$$1^4 + 2^4 + \cdots + (n+1)^4 = \left(1^4 + 2^4 + \cdots + n^4\right) + 4\left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 4(1+2+\cdots+n) + n + 1$$

Luego $(n+1)^4 = 4\left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 4(1+2+\cdots+n) + n + 1$

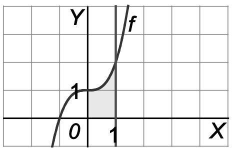
Se despeja la suma de los n primeros cubos y se aplican las fórmulas ya conocidas:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{(n+1)^4 - 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - 4(1+2+\cdots+n) - (n+1)}{4} = \frac{(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2(n+1)n - (n+1)}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)}{4} = \frac{(n+1)(n^3+n^2)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Así pues, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

4. Usa el resultado del ejercicio anterior para calcular el área limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Toma en cada subintervalo como c_i el extremo derecho.



Se divide el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$. Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + 1 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + 1 + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^3 + 1\right] = \frac{1}{n}\left[n + \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3}\right]$$

Aplicando la fórmula encontrada en el ejercicio anterior:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[n + \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3}\right] = \frac{1}{n}\left[n + \frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{4n^2 + n^2 + 2n + 1}{4n}\right] = \frac{5n^2 + 2n + 1}{4n^2} = \frac{5}{4} + \frac{2n+1}{4n^2}$$

El área del recinto es el número $A = \lim_{n\to+\infty} S_n$, es decir, $A = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4} + \frac{2n+1}{4n^2}\right) = \frac{5}{4}$ u^2.

5. Ejercicio resuelto.

6. Sea f continúa en $[-1, 4]$ y $g(x) = f(x) + 2$. Si $\int_{-1}^{4} f(x)dx = 5$, calcula $\int_{-1}^{4} g(t)dt$.

$$\int_{-1}^{4} g(t)dt = \int_{-1}^{4}(f(t)+2)dt = \int_{-1}^{4} f(t)dt + \int_{-1}^{4} 2dt = 5 + 2(4-(-1)) = 5 + 2\cdot 5 = 15$$

7. Si $\int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$, $\int_1^2 f(x)dx = \frac{8}{3}$ y $\int_0^3 f(x)dx = \frac{11}{3}$, halla:

a) $\int_0^2 f(x)dx$ **b)** $\int_1^3 f(x)dx$ **c)** $\int_2^3 f(x)dx$

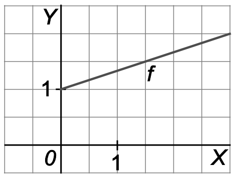
a) $\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$

b) $\int_1^3 f = \int_0^3 f - \int_0^1 f = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$

c) $\int_2^3 f = \int_1^3 f - \int_1^2 f = \frac{7}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. Para la función de la gráfica, halla su valor medio y el valor $c \in [0, 3]$ cuya existencia asegura el teorema del valor medio.



Se debe encontrar el valor $f(c)$, siendo c el número del intervalo $[0, 3]$, que cumpla $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx = f(c)(3-0)$.

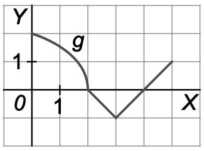
Como $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx$ es el área de un trapecio de altura 3 y bases 2 y 1, su valor es $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx = \frac{2+1}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2}$.

Entonces, $f(c)(3-0) = \frac{9}{2} \Rightarrow f(c) = \frac{3}{2}$, es el valor medio de la función en dicho intervalo.

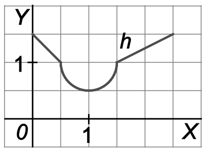
Por tanto, si $f(c) = \frac{c}{3}+1 = \frac{3}{2}$, despejamos y concluimos que $c = \frac{3}{2}$.

11. Halla el valor medio de las funciones *g* y *h*:

a)



b)



a) Se debe encontrar el valor $g(c)$, siendo c el número del intervalo $[0, 5]$ que cumpla $\int_0^5 g(x)dx = g(c)(5-0)$.

Se calcula esta integral hallando el área de las tres regiones (un cuarto de círculo que está por encima del eje *X*; un triángulo que está por debajo del eje *X*; un triángulo que está por encima del eje *X*).

El área del cuarto de círculo es $\frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$. El área del triángulo que está por debajo del eje *X* es $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$. Esto indica que $\int_2^4 f(x)dx = -1$, ya que al estar por debajo del eje *X*, la integral es el opuesto del área. El área del triángulo que está por encima del eje *X* es $\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Con todo esto: $\int_0^5 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 g(x)dx + \int_4^5 g(x)dx = \pi - 1 + \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2}$

Por tanto, $g(c)(5-0) = \pi - \frac{1}{2} \Rightarrow g(c) = \frac{2\pi - 1}{10}$ es el valor medio de la función en dicho intervalo. Como $g(c) = \frac{2\pi-1}{10} \simeq 0{,}53$, habrá dos valores de *c*: uno en la circunferencia $x^2 + (g(x))^2 = 2^2$, es decir, $c^2 + \left(\frac{2\pi-1}{10}\right)^2 = 4$, de donde sacamos que $c \simeq 1{,}93$. Y el otro en la recta $y = x-4$, es decir, $g(c) = c-4$, $0{,}53 = c-4$, $c \simeq 4{,}53$. Así pues, hay dos valores de *c*: $c \simeq 1{,}93$ y $c \simeq 4{,}53$.

b) El recinto limitado por la función *h* y el eje *X* en $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ se descompone en tres partes:

- Dos trapecios, uno de área $S_1 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ y otro de área $S_2 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2}\cdot 1 = \frac{5}{4}$.
- Un cuadrado menos un semicírculo: $S_3 = 1 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8-\pi}{8}$

Con todo esto $\int_0^{\frac{5}{2}} h(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} h(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} h(x)dx = \frac{5}{8} + \frac{8-\pi}{8} + \frac{5}{4} = \frac{23-\pi}{8}$

Por tanto, $h(c)\left(\frac{5}{2}-0\right) = \frac{23-\pi}{8} \Rightarrow h(c) = \frac{23-\pi}{20} \simeq 0{,}99$. Hay dos valores de *c* en la circunferencia que corresponden a $c_1 \simeq 0{,}5$ y $c_2 \simeq 1{,}5$.

12. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\, dt$

c) $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$

d) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2x-1)\,dx$

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx = \left[\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-1\right)^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$ (observa que la función $f(x) = x\left(x^2-1\right) = x^3 - x$ es una función impar y como el intervalo de definición está centrado en el origen, la integral ha de ser cero).

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\, dt = \left[\operatorname{sen} t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

c) $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$

d) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2x-1)\,dx = \left[-\frac{\cos(2x-1)}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(2\pi-1)}{2} + \frac{\cos(0-1)}{2} = 0$

13. Determina el valor de estas integrales.

a) $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+1}dx$

b) $\int_{-2}^{2} e^{-x}\, dx$

c) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx$

a) $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+1}dx = \left[3\operatorname{arctg} x\right]_{-1}^{1} = 3\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{2}$

b) $\int_{-2}^{2} e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{2} = -e^{-2} - \left(-e^{-(-2)}\right) = e^2 - \frac{1}{e^2}$

c) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_e^{e^2} = \frac{\left(\ln e^2\right)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = \left[-\ln\left(|\cos x|\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\sqrt{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$

14. Ejercicio resuelto.

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones con estos métodos:

1. Calculando la integral y derivando.

2. Aplicando el teorema fundamental del cálculo.

a) $g(x)=\int_x^0 2t\,dt$ **b)** $g(x)=\int_0^x \operatorname{tg} t\,dt$ **c)** $g(x)=\int_x^e ae^a\,da$

a) Integral y derivando: $g(x)=\int_x^0 2t\,dt=-\int_0^x 2t\,dt=-\left[t^2\right]_0^x=-x^2 \Rightarrow g'(x)=-2x$

Teorema fundamental del cálculo: $g(x)=\int_x^0 2t\,dt=-\int_0^x 2t\,dt \Rightarrow g'(x)=-2x$

b) Integral y derivando: $g(x)=\int_0^x \operatorname{tg} t\,dt=\left[-\ln(\cos t)\right]_0^x \Rightarrow g(x)=-\ln(\cos x) \Rightarrow g'(x)=-\dfrac{(-\operatorname{sen} x)}{\cos x}=\operatorname{tg} x$

Teorema fundamental del cálculo: $g(x)=\int_0^x \operatorname{tg} t\,dt \Rightarrow g'(x)=\operatorname{tg} x$

c) Integral y derivando:

$$g(x)=\int_x^e ae^a\,da=-\int_e^x ae^a da \Rightarrow g(x)=-\left[e^a(a-1)\right]_e^x=-e^x(x-1)+e^e(e-1) \Rightarrow g'(x)=-xe^x$$

Teorema fundamental del cálculo: $g(x)=\int_x^e ae^a\,da=-\int_e^x ae^a \Rightarrow g'(x)=-xe^x$

16. Halla las derivadas de las siguientes funciones.

a) $g(x)=\int_{-x^2}^{x^3} \operatorname{sen} 2t\,dt$ **b)** $g(x)=\int_{3x-2}^{x^2+x} e^{-t^2}\,dt$

a) $f(x)=\left[\dfrac{-\cos 2t}{2}\right]_{-x^2}^{x^3}=\dfrac{1}{2}\left(-\cos\left(2x^3\right)+\cos\left(-2x^2\right)\right)$, su derivada es: $f'(x)=3x^2\operatorname{sen}\left(2x^3\right)+2x\operatorname{sen}\left(-2x^2\right)$

También se puede calcular observando que $g(t)=\operatorname{sen} 2t$ es continua y por ello:

$$f(x)=\left[G(t)\right]_{-x^2}^{x^3}=G\left(x^3\right)-G\left(-x^2\right), \text{ donde } G'(t)=\operatorname{sen} 2t$$

Por tanto, $f'(x)=G'\left(x^3\right)3x^2-G'\left(-x^2\right)(-2x)=3x^2\operatorname{sen}\left(2x^3\right)+2x\operatorname{sen}\left(-2x^2\right)$

b) La función $h(t)=e^{-t^2}$ es continua $\Rightarrow g(x)=[H(t)]_{3x-2}^{x^2+x}=H\left(x^2+x\right)-H(3x-2)$, con $H'(x)=e^{-x^2}$, por tanto:

$$g'(x)=(2x+1)H'\left(x^2+x\right)-3H'(3x-2)=(2x+1)e^{-\left(x^2+x\right)^2}-3e^{-(3x-2)^2}$$

17. Ejercicio interactivo.

18 a 20. Ejercicios resueltos.

21. **Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.**

La función es positiva en $[1,2]$ $\Rightarrow A = \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$ u^2.

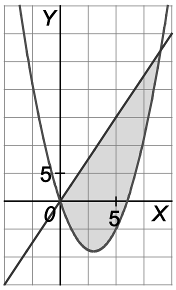
22. **Calcula el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.**

La función es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje X en los puntos de abscisas –1 y 3.

La región queda por debajo del eje X $\Rightarrow A = -\int_{-1}^3 \left(x^2 - 2x - 3\right)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^3 = -\left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{32}{3}$ u^2.

23. **Dibuja el recinto encerrado entre las gráficas de las funciones $y = x^2 - 6x$ e $y = 3x$ y calcula su área.**

La gráfica de $f(x) = x^2 - 6x = x(x-6)$ es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje X en los puntos $A(0,0)$ y $B(6,0)$. La gráfica de $y = 3x$ es una recta creciente que pasa por el origen. Los puntos de corte entre ambas gráficas se encuentran resolviendo la ecuación $x^2 - 6x = 3x$, es decir, son los puntos $A(0,0)$ y $C(9,27)$.



El recinto está limitado superiormente por la recta e inferiormente por la parábola y su área es:

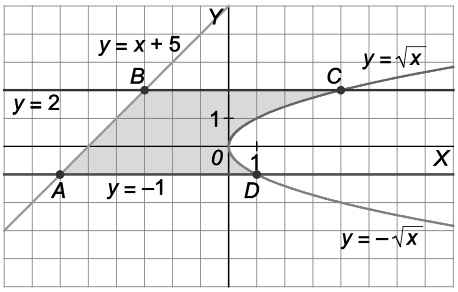
$$A = \int_0^9 \left[3x - \left(x^2 - 6x\right)\right]dx = \int_0^9 \left(-x^2 + 9x\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^9 = \frac{243}{2} = 121{,}50 \text{ u}^2$$

24. **Calcula el área de la región limitada por estas cuatro curvas: $y = x + 5$, $y = 2$, $y = -1$, $y^2 = x$**

La gráfica de la curva $y^2 = x$, que no es una función, se puede obtener dibujando estas dos gráficas:

$y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $y = -\sqrt{x}$

Por tanto, la región es la que se muestra.



Los vértices de la región son los puntos de intersección de las curvas que se cortan:

$A(-6,-1)$ $\qquad$ $B(-3,2)$

$C(4,2)$ $\qquad$ $D(1,-1)$

La región que está a la izquierda del eje Y es un trapecio de altura 3 y bases 6 y 3.

Su área es $A_1 = \frac{6+3}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2}$ u^2.

Otra región está limitada superiormente por $y = 2$ e inferiormente por $y = \sqrt{x}$, su área la da la integral:

$$A_2 = \int_0^4 (2 - \sqrt{x})dx = \left[2x - \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \text{ u}^2$$

La otra región está limitada superiormente por $y = -\sqrt{x}$ e inferiormente por $y = -1$, su área:

$$A_3 = \int_0^1 (-\sqrt{x} - (-1))dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})dx = \left[x - \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u}^2 \Rightarrow A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{27}{2} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{33}{2} \text{ u}^2$$

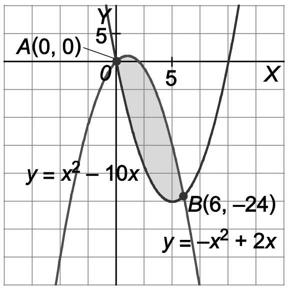
25. Se considera el recinto del plano limitado por la curva $y = -x^2 + 2x$ y por la curva $y = x^2 - 10x$.

a) Dibuja el recinto. **b)** Calcula el área del recinto.

a) La función $y = -x^2 + 2x$ es una parábola cóncava hacia abajo que corta al eje X en los puntos $A(0,0)$ y $C(2,0)$.

La función $y = x^2 - 10x$ es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje X en los puntos $A(0,0)$ y $D(10,0)$.

Los puntos de corte entre ambas se encuentran resolviendo el sistema formado por sus expresiones y son $A(0,0)$ y $B(6,-24)$.

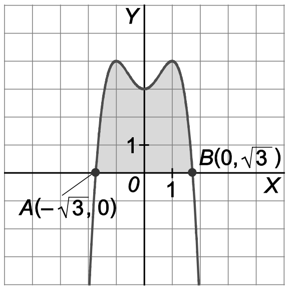


b) El área del recinto es:

$$A = \int_0^6 \left[-x^2 + 2x - \left(x^2 - 10x\right)\right]dx = \int_0^6 \left(-2x^2 + 12x\right)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 6x^2\right]_0^6 = 72 \text{ u}^2.$$

26. Dada la función $f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$, halla los puntos de corte con el eje X y calcula el área de la región del plano encerrada entre esa curva y el eje X.

Los puntos de corte con el eje X se encuentran resolviendo la ecuación bicuadrada $3 + 2x^2 - x^4 = 0$ y obtenemos únicamente dos puntos: $A\left(-\sqrt{3},0\right)$ y $B\left(\sqrt{3},0\right)$. Como la función es par y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ya podemos realizar un esbozo de la gráfica y la región de la que se habla.



Como la función es par el área pedida será:

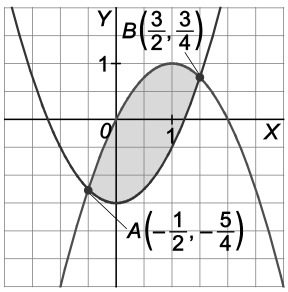
$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(3 + 2x^2 - x^4\right)dx = 2\left[3x + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{5} \simeq 11{,}09 \text{ u}^2.$$

27. Calcula el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$.

Primero hay que calcular los puntos de corte de ambas funciones:

$$x^2 - \frac{3}{2} = 2x - x^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$$

La región está limitada entre dos curvas: $f(x) = 2x - x^2$ por arriba y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$ por debajo; así pues, el área pedida es:



$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[2x - x^2 - \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)\right]dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-2x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + \frac{3x}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \text{ u}^2.$$

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Halla la longitud de la catenaria $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ entre $x = -1$ y $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow L_0^1 = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \text{ u.}$$

Por ser una función par $L_{-1}^1 = 2L_0^1 = e - \dfrac{1}{e}$.

31. Calcula la longitud de la llamada parábola semicúbica (aunque no lo es su gráfica se parece a una parábola) $y = x^{\frac{3}{2}}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

La derivada de la función $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ es $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

La longitud pedida es:

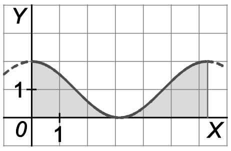
$$L_0^4 = \int_0^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^4 \frac{9}{4}\sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 \simeq 9{,}07 \text{ u.}$$

32. Sobre una partícula a x metros del origen, actúa una fuerza $F(x) = 3x^2 + 2x$ (N). ¿Qué trabajo realiza F al moverla desde $x = 1$ hasta $x = 5$ m? (El trabajo se calcula como $W = \int_1^5 F\,dx$).

$$W = \int_1^5 F(x)dx = \int_1^5 (3x^2 + 2x)dx = \left[x^3 + x^2\right]_1^5 = 148 \text{ J}$$

33. * Halla el volumen del sólido que se forma al girar la región bajo la gráfica de $y = 1 + \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

$$V = \int_0^{2\pi} \pi(1 + \cos x)^2\,dx = \pi\int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^2\,dx$$



$$\int (1 + \cos x)^2\,dx = \int 1 + 2\cos x + \cos^2 x\,dx = x + 2\operatorname{sen} x + \int \cos^2 x\,dx$$

y, por partes:

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x\,dx$$

$$g'(x) = \cos x\,dx \qquad g(x) = \operatorname{sen} x$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx = \operatorname{sen} x \cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$$

Despejando se obtiene: $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C$

Por tanto, $\displaystyle V = \pi\int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^2\,dx = \pi\left[x + 2\operatorname{sen} x + \frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi^2 \text{ u}^3$

34. La población de Circulandia, una típica ciudad, decrece conforme nos alejamos de su centro. En efecto, su densidad de población es $10\,000(3-r)$ habitantes/km^2 siendo r la distancia al centro en km.

a) ¿Cuál es el radio de la zona habitada de la ciudad?

b) ¿Cuál es la población de la ciudad?

a) Como la densidad en los confines de la ciudad es 0, entonces $10\,000(3-r)=0$, es decir, $r=3$ km.

b) $P \simeq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i \Delta r f(c_i) = \int_0^3 2\pi r 10\,000(3-r)\,dr$. Se calcula esta integral:

$$\int_0^3 2\pi r 10\,000(3-r)\,dr = 20\,000\pi \int_0^3 (3r-r^2)\,dr = 20\,000\pi \left[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^3 = 90\,000\pi \simeq 282\,743 \text{ habitantes.}$$

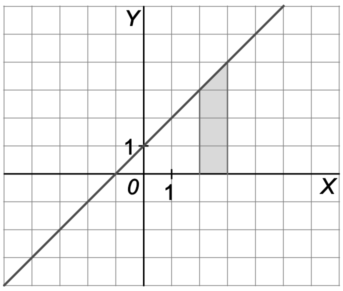
35. Ejercicio interactivo.

36 a 44. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Área bajo una curva

45. Halla el área de la región sombreada utilizando los diferentes métodos propuestos en los distintos apartados. Comprueba que siempre obtienes el mismo resultado.



a) Dividiendo el intervalo $[2,3]$ en n subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$, tomando como altura de cada rectángulo la ordenada de su extremo derecho y calculando, finalmente, el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuando $n \to +\infty$.

b) Procediendo como en a, pero tomando como altura de cada rectángulo la ordenada de su extremo izquierdo.

c) Hallando una primitiva F de la función cuya gráfica es la recta oblicua que limita la región y hallando $F(3) - F(2)$.

d) Utilizando la fórmula que nos da el área de un trapecio.

a) La ecuación de la recta que limita superiormente el trapecio es $y = x + 1$.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[2 + \frac{1}{n} + 1 + 2 + \frac{2}{n} + 1 + ... + 2 + \frac{n}{n} + 1\right] = \frac{1}{n}\left[3n + \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\left[3n^2 + \frac{1+n}{2}n\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{6n^2 + n + n^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{7n^2 + n}{2}\right] = \frac{7n+1}{2n} = \frac{7}{2} + \frac{1}{n}.$$

El área del recinto es: $A = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{7}{2}$ u^2.

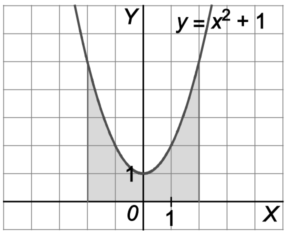
b) $S_n = \frac{1}{n}\left[2 + 1 + 2 + \frac{1}{n} + 1 + ... + 2 + \frac{n-1}{n} + 1\right] = \frac{1}{n}\left[3n + \frac{1 + 2 + \cdots + n - 1}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\left[3n^2 + \frac{1 + n - 1}{2}(n-1)\right] =$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{6n^2 + n^2 - n}{2}\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{7n^2 - n}{2}\right] = \frac{7n-1}{2n} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2n} \Rightarrow A = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{7}{2} \text{ u}^2$$

c) Una primitiva de $y = x + 1$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} + x \Rightarrow A = F(3) - F(2) = \frac{3^2}{2} + 3 - \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$ u^2

d) La región sombreada es un trapecio de altura 1 y bases 4 y 3. Su área es $A = \frac{4+3}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2}$ u^2.

46. Calcula el área limitada por la curva $y = x^2 + 1$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$.



Se divide el intervalo $[-2,2]$ en $4n$ subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$.

Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(-2+\frac{1}{n}\right)^2 + 1 + \left(-2+\frac{2}{n}\right)^2 + 1 + \ldots + \left(-2+\frac{4n}{n}\right)^2 + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[4 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{4}{n} + 1 + 4 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 - \frac{8}{n} + 1 + \cdots + 4 + \left(\frac{4n}{n}\right)^2 - \frac{16n}{n} + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[20n + \frac{1^2 + 2^2 + \cdots (4n)^2}{n^2} - \frac{4 + 8 + \cdots + 16n}{n}\right]$$

Aplicando las fórmulas ya conocidas:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[20n + \frac{4n(4n+1)(8n+1)}{6n^2} - \frac{2n(4+16n)}{n}\right] = \frac{1}{n}\left[20n + \frac{2(4n+1)(8n+1)}{3n} - 8(1+4n)\right] =$$

$$= \frac{1}{3n^2}\left[60n^2 + 2(4n+1)(8n+1) - 24n(1+4n)\right] = \frac{28n^2+2}{3n^2} = \frac{28}{3} + \frac{2}{3n^2}$$

El área del recinto es: $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{28}{3} + \frac{2}{3n^2}\right) = \frac{28}{3}\ \text{u}^2$

(Como la función $y = x^2 + 1$ es simétrica respecto del eje Y y el intervalo $[-2,2]$ está centrado en el cero, podríamos haber calculado el área entre 0 y 2 y luego hallar su doble).

47. Determina el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3$, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

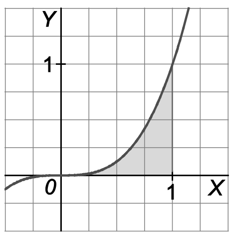
Para ello, usa la expresión $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Se divide el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$.

Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^3\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^3}\right] = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4n} + \frac{1}{4n^2}$$

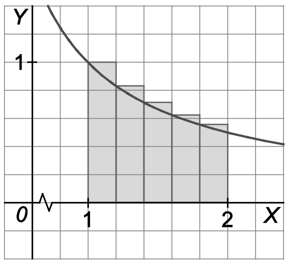
El área del recinto es: $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4n} + \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}\ \text{u}^2$



Integral definida. Propiedades

48. Esboza la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $[1,2]$ y divide este intervalo en 5 subintervalos para probar que:

$$0,2\left(\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}+\frac{1}{2}\right)<\int_1^2\frac{1}{x}dx<0,2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}\right)$$



Observando el dibujo se aprecia que el área bajo la curva es mayor que la suma de las áreas de los rectángulos inferiores y menor que la suma de las áreas de los rectángulos superiores.

Teorema del valor medio. Regla de Barrow

49. Comprueba si se cumplen las condiciones para aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x)=(x-2)^2$ en el intervalo $[0,2]$. Si es así calcula el valor medio de *f* en dicho intervalo y la abscisa del punto en el que se alcanza dicho valor.

Como *f* es una función polinómica, entonces es continua en $\mathbb{R}$, en particular, en $[0,2]$. Aplicando el teorema del valor medio, se busca $c\in[0,2]$ tal que $\int_0^2(x-2)^2\,dx=f(c)(2-0)$.

$$\int_0^2(x-2)^2\,dx=\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}\text{, por tanto, }\frac{8}{3}=f(c)2\Rightarrow f(c)=\frac{4}{3}\Rightarrow(c-2)^2=\frac{4}{3}\Rightarrow c=2+\frac{2\sqrt{3}}{3},\ c=2-\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

pero solo la segunda pertenece al intervalo $[0,2]$.

50. Calcula una aproximación por exceso y otra por defecto de ln 2 utilizando una partición en cinco subintervalos para calcular la integral definida $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x}$.

Por defecto: Se toman 5 rectángulos de base 0,2 y altura el extremo derecho.

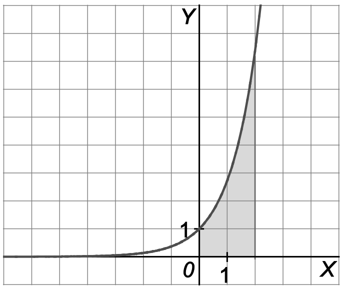
Por exceso: Se toman 5 rectángulos de base 0,2 y altura el extremo izquierdo.

$$0,2\left(\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}+\frac{1}{2}\right)<\int_1^2\frac{1}{x}dx<0,2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}\right)$$

Operando: $0,6456<\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2-\ln 1=\ln 2<0,7456$.

Por tanto, $0,645\,6<\ln 2<0,745\,6$.

51. La siguiente región está limitada superiormente por la gráfica de la función $y = e^x$.



Halla la altura que debe tener un rectángulo de base 2 para que su área sea igual a la de la región sombreada.

El área de la región sombreada es $\int_0^2 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^2 = e^2 - 1$.

El teorema del valor medio nos asegura que existe un número c del intervalo $[0,2]$ que cumple $\int_0^2 e^x\,dx = f(c)(2-0)$.

Así pues, $e^2 - 1 = f(c)2 \Rightarrow f(c) = \frac{e^2-1}{2}$.

Por tanto, el rectángulo de base 2 y altura $\frac{e^2-1}{2}$ tiene igual área que el de la región.

52. Determina el valor de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-3}^{1}\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)dx$ **d)** $\int_{-2}^{0} 2^x\,dx$ **g)** $\int_{-1}^{1}\frac{5}{1+x^2}dx$

b) $\int_{-\pi}^{2\pi}\cos(3x-2)\,dx$ **e)** $\int_0^3\frac{x}{3x^2+1}dx$ **h)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}dx$

c) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(2x-1)\,dx$ **f)** $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **i)** $\int_{-2}^{2} xe^{-x^2}dx$

a) $\int_{-3}^{1}\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 5x\right]_{-3}^{1} = -\frac{56}{3}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3x-2)\,dx = \left[\frac{\operatorname{sen}(3x-2)}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

c) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(2x-1)\,dx = \left[\frac{-\cos(2x-1)}{2}\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \simeq 0{,}54$

d) $\int_{-2}^{0} 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} = \frac{3}{\ln 16} \simeq 1{,}08$

e) $\int_0^3\frac{x}{3x^2+1}dx = \left[\frac{\ln\left(3x^2+1\right)}{6}\right]_0^3 = \frac{\ln 28}{6} \simeq 0{,}56$

f) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{arcsen}x\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

g) $\int_{-1}^{1}\frac{5}{1+x^2}dx = \left[5\operatorname{arctg}x\right]_{-1}^{1} = 5\frac{\pi}{2} \simeq 7{,}85$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

i) $\int_{-2}^{2} xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_{-2}^{2} = 0$

53. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_0^1 x\text{arctg}\,x\,dx$ **d)** $\int_{-1}^1 xe^x dx$ **g)** $\int_0^2 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$ **j)** $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\text{sen}\,x\,dx$ **e)** $\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x+1}{x^2-2x}dx$ **h)** $\int_0^3 \frac{1}{1+2e^x}dx$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$ **f)** $\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx$ **i)** $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$

a) $\int x\text{arctg}\,x\,dx$. Integración por partes: $f(x)=\text{arctg}\,x$, $dg(x)=x$, $df(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{2}$. Por tanto,

$$\int x\text{arctg}\,x\,dx=\text{arctg}\,x\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{1+x^2}\frac{x^2}{2}dx=\text{arctg}\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left[x-\int\frac{1}{1+x^2}dx\right]=\text{arctg}\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\text{arctg}\;x+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1 x\text{arctg}\,xdx=\left[\frac{x^2}{2}\text{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\text{arctg}\,x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

b) $\int x^2\text{sen}x\,dx$. Integración por partes: $f(x)=x^2$, $dg(x)=\text{sen}\,x$, $df(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$, por lo que $\int x^2\text{sen}\,x\,dx=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$. Para obtener ahora $\int 2x\cos x\,dx$, se procede de la misma forma: $f(x)=2x$, $dg(x)=\cos x$, $df(x)=2$ $g(x)=\text{sen}\,x$, Por tanto:

$$\int x^2\text{sen}x\,dx=-x^2\cos x+\left[2x\,\text{sen}x-\int 2\,\text{sen}\,x\,dx\right]=-x^2\cos x+2x\text{sen}\,x+2\cos x+C.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\text{sen}\;xdx=\left[-x^2\cos x+2x\text{sen}\;x+2\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

c) $$\int\frac{dx}{x^2+2x}=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}(\ln x-\ln(x+2))+C\Rightarrow\int_1^2\frac{dx}{x^2+2x}=\frac{1}{2}\left[\ln x-\ln(x+2)\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

d) $\int xe^x dx$. Integración por partes: $f(x)=x$, $dg(x)=e^x$, $df(x)=1$, $g(x)=e^x$, luego $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C$. Por tanto, $\int_{-1}^1 xe^x\,dx=\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^1=\frac{2}{e}$

e) $$\int\left(\frac{-1/2}{x}+\frac{3/2}{x-2}\right)dx=-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C\Rightarrow\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}}\frac{x+1}{x^2-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-2|\right]_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}}\simeq 1{,}49$$

f) $$\int\frac{4x^2+1-4x}{4x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=x-\frac{1}{2}\ln\left(4x^2+1\right)+C\Rightarrow\int_0^1\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx=\left[x-\frac{1}{2}\ln\left(4x^2+1\right)\right]_0^1=1-\frac{\ln 5}{2}$$

g) $$\int_0^2\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx=\left[-\frac{1}{x^2+x+1}\right]_0^2=-\frac{1}{7}+1=\frac{6}{7}$$

h) $$\int_0^3\frac{1}{1+2e^x}dx=\int_0^3\left(1-\frac{2e^x}{1+2e^x}\right)dx=\left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^3\simeq 0{,}38$$

i) $$\int\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\text{arctg}\left(x^2\right)+C\Rightarrow\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\left[\text{arctg}\left(x^2\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{8}$$

j) $$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}}dx=-\frac{1}{2}\ln\left(\left|\sqrt{x^4+1}-x^2\right|\right)+C\Rightarrow\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx=\left[-\frac{1}{2}\ln\left(\left|\sqrt{x^4+1}-x^2\right|\right)\right]_{-1}^1=0.$$

54. Un profesor apresurado pidió a sus alumnos que calcularan la integral definida $\int_{-3}^{2}\frac{dx}{x^2}$. Laila trabajó así:

$$\int_{-3}^{2}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{2}=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{-3}\right)=-\frac{5}{6}$$

Y después razonó: "estoy segura de que hay algo mal porque sé que la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es positiva en todo su dominio y por tanto, la integral pedida, $\int_{-3}^{2}\frac{dx}{x^2}$, no puede ser negativa". ¿Dónde está el error?

La función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ no está definida para $x=0$, por lo que no es continua en el intervalo $(-3,2)$, así, que no existe la integral definida $\int_{-3}^{2}\frac{1}{x^2}dx$.

55. Sabiendo que $\sqrt[5]{2}\simeq 1{,}1487$; puedes encontrar otra aproximación de ln 2 haciendo una partición en cinco subintervalos para calcular $\int_0^1 2^x dx$.

Utiliza la integral anterior y la regla de Barrow para demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\right]=\ln 2$.

Se divide el intervalo $[0,1]$ en 5 subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{5}$.

$$S_5=\frac{1}{5}\left[2^{\frac{1}{5}}+2^{\frac{2}{5}}+2^{\frac{3}{5}}+2^{\frac{4}{5}}+2^{\frac{5}{5}}\right]=\frac{1}{5}\left[1{,}1487+1{,}1487^2+1{,}1487^3+1{,}1487^4+1{,}1487^5\right]\simeq 1{,}545$$

Por otra parte, $\int_0^1 2^x dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow\frac{1}{\ln 2}\simeq 1{,}545\Rightarrow \ln 2\simeq 0{,}64724$

Análogamente, se divide el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos, cada uno de longitud: $\frac{1}{n}$

$$S_n=\frac{1}{n}\left[2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right]=\frac{1}{n}\left[2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2\right]=\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 2^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right)=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right)=\frac{\sqrt[n]{2}}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}}{\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{2}-1)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)}=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=\ln 2$$

Teorema fundamental del cálculo

56. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$

b) $f(x)=\int_x^{x^2} \frac{dt}{2t}$

c) $f(x)=\int_1^{\cos x} \frac{dt}{t}$

d) $f(x)=\int_x^{x^2+1} e^{-t^2}\,dt$

a) La integral $\int \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ no es elemental, así que no se puede calcular dicha integral para después derivarla, pero $g(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ es continua para $t > 0$ y el teorema fundamental del cálculo nos asegura que la derivada de $f(x)=\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ es $f'(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

b) $f(x)=\int_x^{x^2} \frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\left[\ln t\right]_x^{x^2}=\frac{1}{2}\left(\ln x^2-\ln x\right)=\frac{1}{2}\left(2\ln x-\ln x\right)=\frac{\ln x}{2}$, su derivada es $f'(x)=\frac{1}{2x}$.

c) $f(x)=\int_1^{\cos x} \frac{dt}{t}=\left[\ln t\right]_1^{\cos x}=\ln(\cos x)$, su derivada $f'(x)=\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$.

d) La integral $\int e^{-t^2}dt$ no es elemental, así que no se puede emplear el método de los dos apartados anteriores. La función $g(t)=e^{-t^2}$ es continua, así pues, $f(x)=\left[G(t)\right]_x^{x^2+1}=G\left(x^2+1\right)-G(x)$, siendo $G'(x)=e^{-x^2}$, por tanto: $f'(x)=G'\left(x^2+1\right)2x-G'(x)=2xe^{-\left(x^2+1\right)^2}-e^{-x^2}$

57. Calcula $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\int_1^{1+h}\sqrt{x^2+8}\,dx}{h}$.

Si se llama $f(x)=\sqrt{x^2+8}$ y $F(x)$ a una primitiva suya, $F'(x)=f(x)$, entonces, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\int_1^{1+h}\sqrt{x^2+8}\,dx}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(h)}{h}=F'(1)=f(1)=\sqrt{1^2+8}=3$.

58. Halla los puntos de inflexión de la función $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que la derivada de $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ es $g'(x)=e^{-x^2}$ y la segunda derivada es $g''(x)=-2xe^{-x^2}$, que se anula si $x = 0$.

Además, la segunda derivada es positiva a la izquierda de $x = 0$ (g es cóncava hacia arriba) y es negativa a la derecha de $x = 0$ (g es cóncava hacia abajo).

Así pues en $x = 0$ se produce un cambio de curvatura, por tanto, el punto $A(0, g(0)) = A(0, 0)$ es un punto de inflexión de $g(x)$.

59. Calcula la derivada de la función $f(x)=\int_0^x \cos t^2\,dt$.

Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x)=\cos x^2$.

60. Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x)=\int_3^x t^2\,dt$

b) $f(x)=\int_3^{\operatorname{sen} x} t^2\,dt$

c) $f(x)=\int_x^3 t^2\,dt$

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} t^2\,dt$

a) Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x)=x^2$.

b) $f(x)=\int_3^{\operatorname{sen} x} t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_3^{\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-9$. Su derivada es $f'(x)=\operatorname{sen}^2 x$.

c) Por las propiedades de la integral definida se sabe que $f(x)=\int_x^3 t^2\,dt=-\int_3^x t^2\,dt$. Por tanto, $f'(x)=-x^2$.

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{x^2}^{1+x^3}=\frac{\left(1+x^3\right)^3}{3}-\frac{x^6}{3}\Rightarrow f'(x)=\frac{3\left(1+x^3\right)^2 3x^2}{3}-\frac{6x^5}{3}=3x^2\left(1+x^3\right)^2-2x^5$.

61. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x)=\int_3^x \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}dt$

b) $f(x)=\int_x^3 \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}dt$

c) $f(x)=\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}dt$

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}dt$

La integral $\int\frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}dt$ no es elemental pero sí se sabe que la función $g(t)=\frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}$ es continua.

a) Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x)=\frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}$.

b) $f(x)=\int_x^3 \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}dt=-\int_3^x \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}dt$, así pues, $f'(x)=-\frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}$.

c) $f(x)=\left[G(t)\right]_3^{\operatorname{sen} x}=G(\operatorname{sen} x)-G(3)$, siendo $G'(t)=\frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}$.

Por tanto: $f'(x)=G'(\operatorname{sen} x)\cos x=\frac{\cos x}{\ln\left(\operatorname{sen}^2 x+1\right)}$

d) $f(x)=\left[G(t)\right]_{x^2}^{1+x^3}=G\left(1+x^3\right)-G\left(x^2\right)$, siendo

$$G'(t)=\frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}\Rightarrow f'(x)=G'\left(1+x^3\right)3x^2-G'\left(x^2\right)2x=\frac{3x^2}{\ln\left(\left(1+x^3\right)^2+1\right)}-\frac{2x}{\ln\left(x^4+1\right)}$$

62. Sea $F(x)=\int_1^{x^2}\ln t\,dt$ con $x\geq 1$.

a) Calcula $F'(e)$.

b) ¿Es $F''(x)$ una función constante? Justifica tu respuesta.

a) $F(x)=\int_1^{x^2}\ln t\,dt=\left[t\ln t-t\right]_1^{x^2}=x^2\ln x^2-x^2+1\Rightarrow F'(x)=2x\ln x^2+x^2\dfrac{2x}{x^2}-2x=2x\ln x^2=4x\ln x$.

Por tanto, $F'(e)=4e\ln e=4e$.

b) $F''(x)=4\ln x+4x\dfrac{1}{x}=4\ln x+4$. No es una función constante porque su derivada no es nula.

63. Sea la función $F(x)=\int_1^{x}\dfrac{\text{sen}\,t}{t}dt$ definida para $x\geq 1$. Halla los valores de x en los que alcanza sus máximos y mínimos relativos.

$F'(x)=\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$. Esta derivada se anula si $\text{sen}\,x=0$, es decir, si $x=\pi+k\pi$ con $k=0, 1, 2,\ldots$ Máximo si $k=0, 2, 4,\ldots$, y mínimo si $k=1, 3, 5,\ldots$

64. La función $F(x)$ está definida por $F(x)=\int_1^{e^x-x-1}e^{-t^2}dt$. Halla los puntos en los que se anula $F'(x)$.

La integral $\int e^{-t^2}dt$ no es elemental, así que no se puede calcular dicha integral para después derivarla. La función $g(t)=e^{-t^2}$ es continua, así pues, $F(x)=\left[G(t)\right]_1^{e^x-x-1}=G\left(e^x-x-1\right)-G(1)$, siendo $G'(x)=e^{-x^2}$, por tanto: $F'(x)=G'\left(e^x-x-1\right)\left(e^x-1\right)-0=\left(e^x-1\right)e^{-\left(e^x-x-1\right)^2}$. Dicha derivada se anula si $e^x-1=0\Rightarrow x=0$.

65. Sea $F(x)=\int_0^{2x}e^{t^2}dt$. Calcula $F'(0)$.

La función $g(t)=e^{t^2}$ es continua, así pues, $F(x)=\left[G(t)\right]_0^{2x}=G(2x)-G(0)$, siendo $G'(x)=e^{x^2}$, por tanto: $F'(x)=G'(2x)2-0=2e^{(2x)^2}\Rightarrow F'(0)=2$.

66. **a)** Calcula los extremos relativos y absolutos de la función $f:[-7,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3+6x^2+49$.

b) Sea β el punto en el que *f* alcanza su máximo absoluto. Calcula $\int_{-7}^{\beta} f(x)dx$.

a) $f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$ se anula si $x=0$ o si $x=-4$. Aplicando el criterio de la segunda derivada se ve que $A(-4,209)$ es un máximo relativo y $B(0,49)$ es un mínimo relativo. Se comparan los valores:

$f(-4)=209$ $\quad f(0)=49$ $\quad f(-7)=0$ $\quad f(1)=56$

Así pues, $A(-4,209)$ es el máximo absoluto y $C(-7,0)$ es el mínimo absoluto.

b) Ya se ha calculado $\beta=-4 \Rightarrow \int_{-7}^{-4}(x^3+6x^2+49)dx=\left[\frac{x^4}{4}+2x^3+49x\right]_{-7}^{-4}=\frac{675}{4}$

67. **Si $\int_c^x f(t)dt=5x^3+40$, ¿qué función es $f(x)$? ¿Cuánto vale c?**

Sea $g(x)=\int_c^x f(t)dt=5x^3+40$; entonces $g'(x)=f(x)=15x^2$.

Por otra parte, tomando $x=c$, $g(c)=0=5c^3+40$, de donde $c=-2$.

68. **Halla el punto del intervalo $[0,2]$ en el que la función $f(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}dt$ alcanza su mínimo.**

Como la función $g(t)=\frac{t-1}{1+t^2}$ es continua, se sabe que la derivada de $f(x)$ es $f'(x)=\frac{x-1}{1+x^2}$.

Esta derivada se anula si $x=1$ y como a la izquierda de 1 es negativa y a su derecha es positiva, en el punto de abscisa $x=1$ se encuentra el mínimo de la función $f(x)$.

69. **a)** Si *f* es una función continua, obtén $F'(x)$ siendo: $F(x)=\int_0^x\left(f(t)+t^2+t^3\right)dt$.

b) Si $f(1)=1$ y además $\int_0^1 f(t)dt=1$, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1,F(1))$.

a) Como la función $g(t)=f(t)+t^2+t^3$ es continua, el teorema fundamental del cálculo asegura que la derivada de $F(x)$ es $F'(x)=f(x)+x^2+x^3$.

b) La ecuación de la recta tangente buscada es $y-F(1)=F'(1)(x-1)$. Se calcula entonces $F(1)$ y $F'(1)$:

$$F(1)=\int_0^1\left(f(t)+t^2+t^3\right)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 t^2dt+\int_0^1 t^3dt=1+\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{19}{12}$$

$F'(1)=f(1)+1^2+1^3=1+1+1=3$

La recta tangente es $y-\frac{19}{12}=3(x-1)$, es decir, $y=3x-\frac{17}{12}$.

70. Dada $f(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$, determina el valor del parámetro $a > 0$ para el que $\int_0^a f(x)dx = -1$.

$\int_0^a \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}dx = \left[\dfrac{2}{1+x^2}\right]_0^a = \dfrac{2}{1+a^2} - 2 = -1 \Rightarrow \dfrac{2}{1+a^2} = 1 \Rightarrow 1+a^2 = 2 \Rightarrow a = 1, a = -1$, y como solo vale la solución positiva, concluimos que $a = 1$.

71. Sean las funciones $F(x) = \int_1^x \sqrt{5+e^{t^2}}dt$ y $g(x) = x^2$, calcula $[F(g(x))]'$.

Como la función $f(t) = \sqrt{5+e^{t^2}}$ es continua, por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $F'(x) = \sqrt{5+e^{x^2}}$. Aplicando la regla de la cadena, $[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = F'(x^2)2x = 2x\sqrt{5+e^{x^4}}$.

72. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^{x^3} e^{t^2}dt}{x\int_0^{x^2} e^{t^2}dt}$.

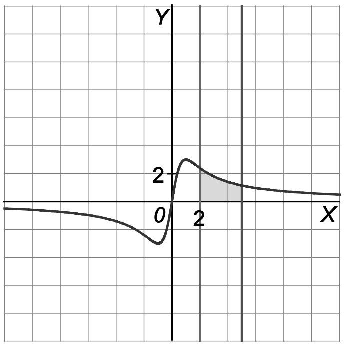
Al presentarse una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ y estar en las hipótesis del teorema de L´Hôpital, se aplica la toma de derivadas en el límite y el teorema fundamental del cálculo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^2}dt}{x\int_0^{x^2} e^{t^2}dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^6}3x^2}{\int_0^{x^2} e^{t^2}dt + xe^{x^4}2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^5e^{x^6}3x^2 + 6xe^{x^6}}{2xe^{x^4} + 4xe^{x^4} + 2x^2e^{x^4}4x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6xe^{x^6}[3x^6+1]}{2xe^{x^4}[3+4x^4]} = +\infty$$

Áreas de recintos

73. Calcula el área encerrada entre $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ y el eje de abscisas para $x \in [2,5]$.

$A = \int_2^5 \left(\dfrac{6x}{x^2+1}\right)dx = \left[3\ln(x^2+1)\right]_2^5 = 3(\ln 26 - \ln 5)$ u^2.



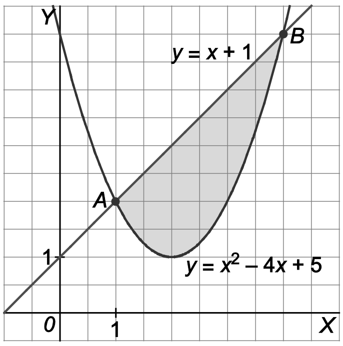
74. Dibuja la superficie limitada por la recta $y = x + 1$ y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$. Halla su área.

Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen resolviendo la ecuación:

$$x^2 - 4x + 5 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$$

Los puntos de corte son $A(1,2)$ y $B(4,5)$.

La región está comprendida entre dos gráficas: la recta $y = x + 1$ por encima y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ por debajo.

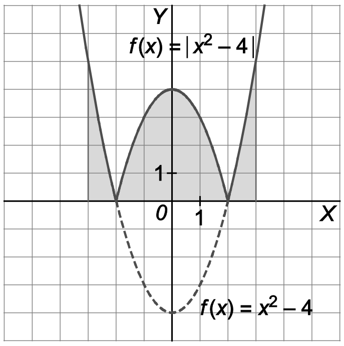


El área de la región es: $A = \int_1^4 \left(x + 1 - \left(x^2 - 4x + 5\right)\right) dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right) dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \frac{9}{2}$ u^2

75. Dibuja la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-3,3]$ y calcula su integral.

La gráfica de $f(x)$ se dibuja muy fácilmente a partir de la de la función $g(x) = x^2 - 4$, sin más que reflejar su parte negativa respecto al eje X.

Como la función es positiva y simétrica respecto al eje Y, y el intervalo está centrado en el origen, se calcula la integral de esta forma:



$$\int_{-3}^{3} |x^2 - 4| dx = 2\int_0^2 \left(-x^2 + 4\right) dx + 2\int_2^3 \left(x^2 - 4\right) dx =$$

$$= 2\left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_0^2 + 2\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = \frac{46}{3} \text{ u}^2.$$

76. Halla el valor de $a > 0$, tal que $\int_0^{a-1} (x + 1) dx = \frac{9}{2}$.

$$\int_0^{a-1} (x + 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{a-1} = \frac{(a - 1)^2}{2} + a - 1 = \frac{9}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 = 9 \Rightarrow a^2 = 10.$$

Descartando la solución que no es positiva, concluimos que $a = \sqrt{10}$.

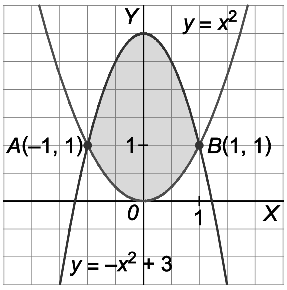
77. Halla el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.

$x^2 = -2x^2 + 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$.

Los puntos de corte son $A(-1,1)$ y $B(1,1)$ .La región está comprendida entre dos gráficas,

$y = -2x^2 + 3$ está por arriba e $y = x^2$ está por debajo. Como ambas funciones son simétricas respecto del eje Y, el área de la región es:

$$A = 2\int_0^1 \left(-2x^2 + 3 - x^2\right)dx = 2\int_0^1 \left(-3x^2 + 3\right)dx = 2\left[-x^3 + 3x\right]_0^1 = 4 \text{ u}^2.$$

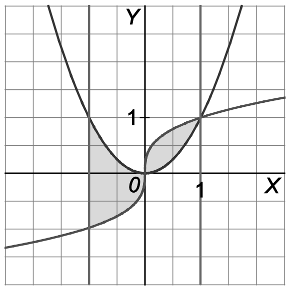


78. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Las gráficas de las funciones se cortan en los puntos $O(0,0)$ y $A(1,1)$.

La región está formada por dos trozos:

$$A = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - x^{\frac{1}{3}}\right)dx + \int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}} - x^2\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \text{ u}^2$$



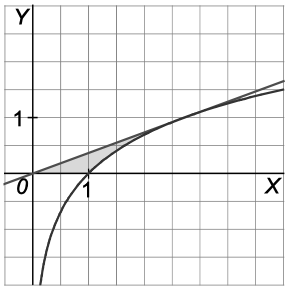
79. Calcula el área limitada por la gráfica de la función $y = \ln x$, el eje X y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x = e$.

La recta tangente tiene por ecuación $y - f(e) = f'(e)(x - e)$, es decir $y = \frac{1}{e}x$.

El recinto está formado por dos regiones. Una, limitada por la recta tangente y el eje X entre 0 y 1, es un triángulo de base 1 y altura $\frac{1}{e}$, su área es $A_1 = \frac{1}{2e}$.

El área de la otra es: $A_2 = \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln x\right)dx = \left[\frac{x^2}{2e} - x\ln x + x\right]_1^e = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1$

El área del recinto es $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1 = \frac{e}{2} - 1 \text{ u}^2$.



80. ***a)** Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

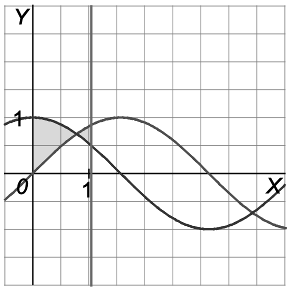
b) Calcula el área del recinto del apartado anterior.

a) El punto de corte de ambas funciones se encuentra resolviendo la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$, cuya única solución en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ es $x = \frac{\pi}{4}$.

b) $A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

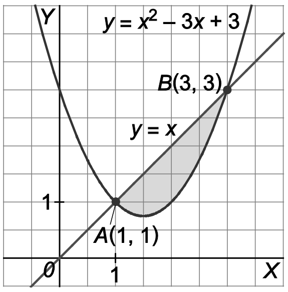
$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} x - \cos x)dx = [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}$

$A = A_1 + A_2 = \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 3 - \sqrt{3}}{2} \text{ u}^2.$



81. **a)** Representa las curvas de ecuaciones $y = x^2 - 3x + 3$ e $y = x$.

b) Halla el área del recinto limitado por dichas curvas.



a) Los puntos de corte se encuentran resolviendo la ecuación

$$x^2 - 3x + 3 = x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

Los puntos de corte son $A(1,1)$ y $B(3,3)$.

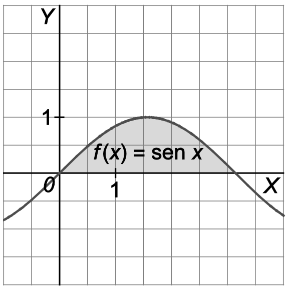
b) El recinto está limitado superiormente por la recta e inferiormente por la parábola.

Su área viene dada por el valor de la integral:

$$A = \int_1^3 \left(x - \left(x^2 - 3x + 3\right)\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3}\ \text{u}^2.$$

82. **Halla el área que encierra una loma de $f(x) = \operatorname{sen} x$.**

Elegimos la una loma que quede por encima del eje X, por ejemplo, la que nos encontramos entre 0 y π.



$$A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2\ \text{u}^2.$$

83. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si} |x|<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} |x|\geq 2 \end{cases}$.

a) Calcula a y b para que f sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, determina el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

a) Como intervienen valores absolutos, debemos expresar la función desglosando dichos valores absolutos:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\leq -2 \\ ax^2+b & \text{si } -2<x<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

Está claro que la función es continua en el interior de los tres intervalos de definición. Se impone la condición de que sea continua en los extremos de estos intervalos.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\left(ax^2+b\right)=4a+b\ ,f(-2)=\frac{1}{4}\Rightarrow 4a+b=\frac{1}{4}\Rightarrow 16a+4b=1$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax^2+b\right)=4a+b$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{4}$, $f(2)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow 4a+b=\dfrac{1}{4}$, que es la misma ecuación que la anterior.

Así pues, si $4a+b=\dfrac{1}{4}$, es decir, si $16a+4b=1$ la función será continua en todo $\mathbb{R}$.

Se impone ahora la condición de que también sea derivable.

La función derivada para valores de x distintos de –2 y 2 es: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{x^3} & \text{si } x<-2 \\ 2ax & \text{si } -2<x<2 \\ \dfrac{-2}{x^3} & \text{si } x>2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x)=\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to -2^+} f'(x)=\lim_{x\to -2^+} 2ax=-4a\Rightarrow \frac{1}{4}=-4a\Rightarrow a=-\frac{1}{16}$$

(Muy importante: ahora hay que comprobar que este valor de a es el mismo que hace que exista $f'(2)$. Si no fuese el mismo, concluiríamos que f no es derivable en todo $\mathbb{R}$).

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-} 2ax=4a\ ,\ \lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-2}{x^3}\right)=-\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{4}=4a\Rightarrow a=-\frac{1}{16}.$$

Para este valor de a, $b=\dfrac{1}{4}-4a=\dfrac{1}{2}$.

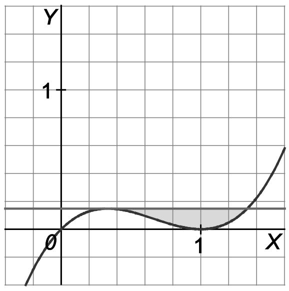
Así pues, si $a=-\dfrac{1}{16}$ y $b=\dfrac{1}{2}$, la función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\leq -2 \\ \dfrac{-x^2}{16}+\dfrac{1}{2} & \text{si } -2<x<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

b) Como la función $f(x)$ es positiva en todo $\mathbb{R}$, el área pedida coincide con esta integral definida:

$$A=\int_1^2\left(\frac{-x^2}{16}+\frac{1}{2}\right)dx+\int_2^3\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{-x^3}{48}+\frac{x}{2}\right]_1^2+\left[\frac{-2}{x^3}\right]_2^3=\frac{17}{48}+\frac{1}{6}=\frac{25}{48}\ \text{u}^2.$$

84. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, y la recta tangente a dicha gráfica en el máximo relativo.

Representa gráficamente la función hallando los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos.



La función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$ corta al eje Y en el punto $O(0,0)$ y al eje X en los puntos $O(0,0)$ y $A(1,0)$.

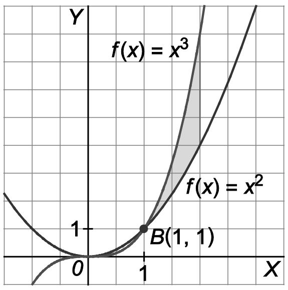
La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ y se anula si $x = 1$ o si $x = \frac{1}{3}$.

$B\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ es un máximo y $A(1,0)$ es un mínimo.

La recta tangente en el máximo es $y = \frac{4}{27}$. Para hallar los puntos de corte de dicha tangente con la gráfica de la función, se resuelve la ecuación $x^3 - 2x^2 + x = \frac{4}{27}$, cuyas soluciones son $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{4}{3}$. El recinto está limitado superiormente por la recta e inferiormente por la cúbica.

$$A = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{27} - \left(x^3 - 2x^2 + x\right)\right)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(-x^3 + 2x^2 - x + \frac{4}{27}\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{27}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{12} \text{ u}^2.$$

85. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, halla el área encerrada por las gráficas de *f*, de *g* y de la recta $x = 2$.



Las dos funciones se cortan en los puntos $A(0,0)$ y $B(1,1)$.

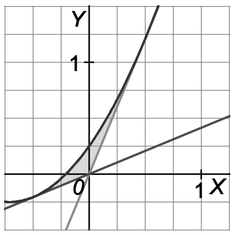
Debemos hallar el área del recinto limitado superiormente por $g(x) = x^3$ e inferiormente por $f(x) = x^2$, entre $x = 1$ y $x = 2$.

El área la da la integral: $A = \int_1^2 \left(x^3 - x^2\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{12}$ u^2

86. Sea la función definida por $f(x) = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4}$.

a) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de *f* y sus tangentes en los puntos de abscisa $x_0 = \frac{1}{2}$ y $x_1 = -\frac{1}{2}$.

b) Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos que tienen igual área.



a) La ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x_0 = \frac{1}{2}$ es $y = \left(1 + \sqrt{2}\right)x$ y la de la tangente en el punto de abscisa $x_1 = -\frac{1}{2}$ es $y = \left(-1 + \sqrt{2}\right)x$.

b) Si $x < 0$, el área es:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(x^2 + \sqrt{2}\,x + \frac{1}{4} - (-1 + \sqrt{2})x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{24} \text{ u}^2$$

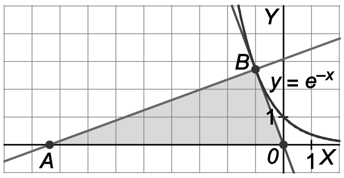
Si $x > 0$, el área es: $A = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \sqrt{2}\,x + \frac{1}{4} - (1 + \sqrt{2})x\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$ u^2

87. **a)** Halla el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Halla el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y el eje X para los valores $-1 \le x \le 0$.

a) La derivada de $f(x) = e^{-x}$ es $f'(x) = -e^{-x}$. La recta tangente a $f(x) = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$, es decir: $y = -ex$.

La recta normal es $y - f(-1) = \dfrac{-1}{f'(-1)}(x+1)$, es decir: $y = \dfrac{1}{e}x + \dfrac{1}{e} + e$.



Así pues, estas rectas cortan al eje de abscisas en los puntos de abscisas $x = 0$, $x = -e^2 - 1$, respectivamente, con lo que la base del triángulo en cuestión es $e^2 + 1$ y su altura e.

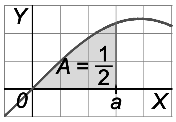
Su área es $\dfrac{e^3 + e}{2}$ u^2.

b) La región está situada por encima del eje X.

Su área es el valor de la integral: $A = \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = -1 + e = e - 1$ u^2

88. **Calcular $a > 0$ para que el área encerrada por la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.**

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^a = -\cos a + \cos 0 = -\cos a + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

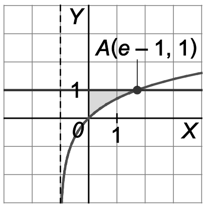


89. **Sea $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x+1)$.**

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje Y y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

b) Halla el área del recinto anterior.

a) La gráfica de $f(x) = \ln(x+1)$ es la gráfica del $g(x) = \ln x$ desplazada hacia su izquierda una unidad. Su dominio es $D(f) = (-1, +\infty)$, es siempre creciente y tiene una asíntota vertical en $x = -1$.



Los puntos de corte con $y = 1$, se calculan resolviendo la ecuación $\ln(x+1) = 1$, es decir. $x + 1 = e$, $x = e - 1$. El único punto de corte es $A(e-1, 1)$.

b) El área del recinto pedido nos lo da el valor de la integral $A = \int_0^{e-1} \left[1 - \ln(x+1)\right]dx$. Calculemos primero $\int \ln(x+1)\,dx$ por partes: $f(x) = \ln(x+1)$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

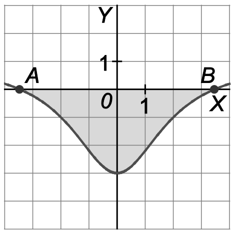
$$\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\,dx = x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) =$$

$= (x+1)\ln(x+1) - x + C$ Por tanto, el área es:

$$A = \int_0^{e-1} \left[1 - \ln(x+1)\right]dx = \left[x - \left((x+1)\ln(x+1) - x\right)\right]_0^{e-1} = \left[2x - (x+1)\ln(x+1)\right]_0^{e-1} = e - 2 \text{ u}^2$$

90. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$, calcula el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje *X*.

La función corta al eje *X* en los puntos $A\left(-\sqrt{12},0\right)=A\left(-2\sqrt{3},0\right)$ y $B(2\sqrt{3},0)$.



El recinto está por debajo del eje *X*; además la función es simétrica respecto del eje *Y*, así pues, el área de la región viene dada por: $A=2\left(-\int_0^{2\sqrt{3}}\dfrac{x^2-12}{x^2+4}dx\right)$

Se calcula esa integral:

$$\int\frac{x^2-12}{x^2+4}dx=\int\left(1-\frac{16}{x^2+4}\right)dx=\int dx-8\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=x-8\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$A=2\left(-\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{x^2+4}dx\right)=-2\left[x-8\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2\sqrt{3}}=-2\left(2\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}\right)=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

91. a) Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y=x^3-3x$ en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Dibuja el recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada y calcula el área.

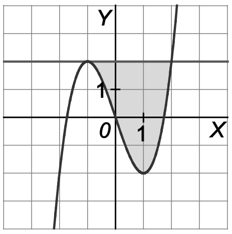
a) La derivada de ecuación $y=x^3-3x$ es $f'(x)=3x^2-3$.

La ecuación de la recta tangente es $y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$, es decir, $y=2$.

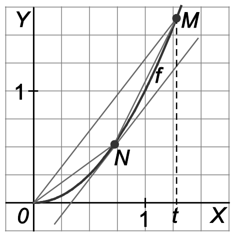
b) Los puntos de corte de la curva $y=x^3-3x$ y la recta $y=2$ se obtienen resolviendo la ecuación $x^3-3x=2\Rightarrow x^3-3x-2=0\Rightarrow(x+1)^2(x-2)=0$:

$A(-1,2)$ y $B(2,2)$ son los puntos de corte.

$$A=\int_{-1}^{2}\left(2-\left(x^3-3x\right)\right)dx=\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}\ \text{u}^2$$



92. **Sea $f(x)=x^2$, calcula en función de t el área limitada por la parábola y la cuerda OM. Sean N el punto de la parábola en el que la tangente es paralela a dicha cuerda. Demuestra que sea cual sea el valor de t, el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo OMN.**



El punto M tiene por coordenadas $M\left(t,t^2\right)$, así pues, la pendiente de OM es $\frac{t^2}{t}=t$.

La recta tangente en el punto $N\left(n,n^2\right)$ tiene, pues, pendiente t, así pues, $f'(n)=t$, es decir, $2n = t$ y, por tanto, $n=\frac{t}{2}$. El punto N es $N\left(\frac{t}{2},\frac{t^2}{4}\right)$. La recta que contiene a OM tiene por ecuación $y = tx$, así pues, el segmento parabólico tiene un área de:

$$A_1=\int_0^t\left(tx-x^2\right)dx=\left[\frac{tx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^t=\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{3}=\frac{t^3}{6}\ \text{u}^2$$

Hallemos ahora el área del triángulo OMN.

Tomamos como base el segmento OM, cuya longitud es $\sqrt{\left(t^2\right)^2+t^2}=t\sqrt{t^2+1}$.

La altura, h, del triángulo OMN mide $h=d(N,OM)=d\left(\left(\frac{t}{2},\frac{t^2}{4}\right),tx-y=0\right)=\frac{\left|\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{4}\right|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{t^2}{4\sqrt{t^2+1}}$.

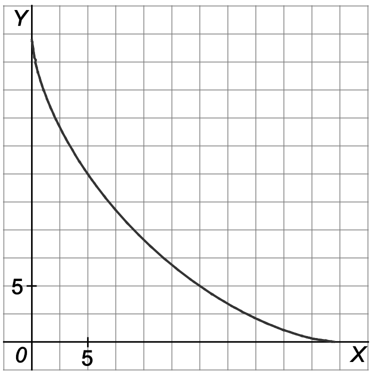
El área del triángulo es: $A_2=\frac{t\sqrt{t^2+1}\,\frac{t^2}{4\sqrt{t^2+1}}}{2}=\frac{t^3}{8}$ u^2. Así pues, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{4}{3}$, de donde $A_1=\frac{4}{3}A_2$, como se quería probar.

Aplicaciones de la integral

93. **Un móvil se desplaza con la ecuación de movimiento $y=\sqrt{(t+1)^3}$, donde t representa el tiempo. Calcula el espacio recorrido en el intervalo de tiempo $[0,3]$.**

$$S=\int_0^3\sqrt{(x+1)^3}\,dx=\left[\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}\right]_0^3=\frac{2}{5}\sqrt{4^5}-\frac{2}{5}\sqrt{1^5}=\frac{64}{5}-\frac{2}{5}=\frac{62}{5}\ \text{u}$$

94. Esboza la gráfica de la función $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9$ y halla la longitud de dicha curva entre $x = 1$ y $x = 27$.



Se expresa la función de la curva de manera explícita, es decir, despejando y: $y^{\frac{2}{3}} = 9 - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = \left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Su derivada es $y' = \frac{3}{2}\left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$.

$(y')^2 = \frac{9 - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$, $1 + (y')^2 = \frac{9}{x^{\frac{2}{3}}}$, $\int\sqrt{1+(y')^2}dx = \int\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}$.

La longitud del tramo de curva pedido es:

$$L = \int_1^{27}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \left[\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_1^{27} = \frac{9}{2}(9-1) = 36 \text{ u}$$

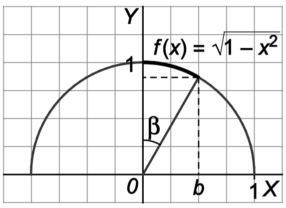
95. Dada $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ calcula la longitud del arco de curva entre $x = 0$ y $x = b$ donde $b < 1$.

Representa gráficamente dicha función, calcula geométricamente la longitud de dicho arco y observa la igualdad de los resultados obtenidos.

La derivada de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

La longitud pedida es:

$$L_0^b = \int_0^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = \int_0^b\sqrt{1+\left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right]^2}\,dx = \int_0^b\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^b\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = \left[\operatorname{arcsen} x\right]_0^b = \operatorname{arcsen} b \text{ u}$$



La gráfica de la función es una semicircunferencia y la longitud del arco pedido es justamente el arco que corresponde al ángulo β que es precisamente el ángulo cuyo seno es b, es decir, el arco seno de b.

96. Calcula la longitud de los siguientes arcos de curva:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}(4x-3)}{6}$ en $[1,9]$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{1}{4x^2}$ en $[1,3]$

a) La derivada de la función $f(x)=\dfrac{1}{6}\sqrt{x}(4x-3)$ es $f'(x)=\dfrac{4x-1}{4\sqrt{x}}$.

La longitud pedida es $L_1^9=\displaystyle\int_1^9\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\int_1^9\sqrt{1+\left[\frac{4x-1}{4\sqrt{x}}\right]^2}\,dx=\int_1^9\sqrt{\frac{(4x+1)^2}{16x}}\,dx=\int_1^9\frac{4x+1}{4\sqrt{x}}dx$

Esa última integral la calcularemos mediante un cambio de variable:

$$g(x)=\sqrt{x}=t\ ,\ g'(x)dx=\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt\Rightarrow dx=2\sqrt{x}dt=2tdt$$

$$\int\frac{4x+1}{4\sqrt{x}}dx=\int\frac{4t^2+1}{4t}2t\,dt=\int\frac{4t^2+1}{2}dt=\int\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)dt=\frac{2t^3}{3}+\frac{t}{2}=\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}+\frac{\sqrt{x}}{2}+C$$

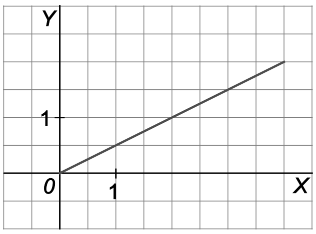
Por tanto, $L_1^9=\displaystyle\int_1^9\frac{4x+1}{4\sqrt{x}}dx=\left[\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right]_1^9=\frac{55}{3}$ u

b) La derivada de la función $f(x)=\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{1}{4x^2}$ es $f'(x)=\dfrac{4x^3}{8}+\dfrac{-8x}{16x^4}=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{1}{2x^3}=\dfrac{x^6-1}{2x^3}$.

La longitud pedida es $L_1^3=\displaystyle\int_1^3\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+\left[\frac{x^6-1}{2x^3}\right]^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{\frac{\left(x^6+1\right)^2}{4x^6}}\,dx=\int_1^3\frac{x^6+1}{2x^3}dx=$

$$=\int_1^3\left(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^3}\right)dx=\left[\frac{x^4}{8}-\frac{1}{4x^2}\right]_1^3=\frac{92}{9}\text{ u.}$$

97. Halla el volumen del cono que se obtiene al girar alrededor del eje *X* la región comprendida entre dicho eje y el segmento de la figura. Comprueba el resultado.



Se trata de hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $y=\dfrac{x}{2}$ alrededor del eje *X*.

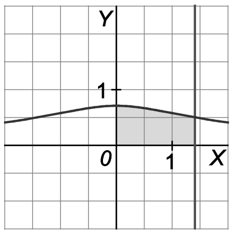
Se sabe que dicho volumen es igual a: $V=\displaystyle\int_0^4\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2dx=\pi\int_0^4\frac{x^2}{4}dx=\pi\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\pi\frac{4^3}{12}=\frac{16\pi}{3}$ u^3

El sólido que se forma es un cono de radio 2 y altura 4. Su volumen es: $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 4=\dfrac{16\pi}{3}$ u^3

98. Calcula el volumen del cuerpo que se obtiene al girar la región entre el eje *X* y la gráfica de $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$, en torno al eje *X* y entre las rectas $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.

Se trata de hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ alrededor del eje *X*.

Se sabe que dicho volumen es igual a: $V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2+x^2}dx$



Se calcula esta integral que va a dar lugar a una arco tangente.

$$\int \frac{1}{2+x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

El volumen es: $V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2+x^2}dx = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\text{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot(\text{arctg}1 - \text{arctg}0) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{8}$ u^3

99. Halla el volumen engendrado por la región plana definida por el eje *X*, la curva de ecuación $y = e^{-x}$, el eje *Y* y la recta $x = 3$ al girar alrededor del eje *X*.

$$V = \int_0^3 \pi\left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi\int_0^3 e^{-2x}dx = \pi\left[\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^3 = \pi\left(\frac{-e^{-6}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^6}\right) \text{ u}^3.$$

100. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje *X* el recinto limitado por la gráfica de $f(x) = \ln(x)$, y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.

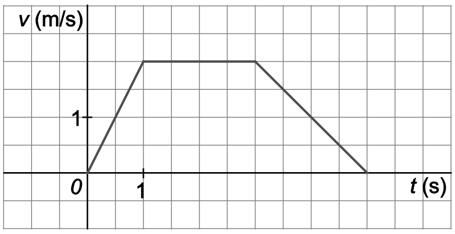
El volumen nos lo da la integral $\int_1^e \pi(\ln x)^2 dx = \pi\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

La integral $\int (\ln x)^2 dx$ la calculamos por partes: $f(x) = (\ln x)^2$, $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int \frac{2\ln x}{x}x\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) = x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)$$

$$V = \int_1^e \pi(\ln x)^2 dx = \pi\int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi\left[x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)\right]_1^e = (e-2)\pi \simeq 2{,}26 \text{ u}^3.$$

101. La velocidad de un móvil que parte del origen viene en m/s por la gráfica:



a) Calcula la función que da el espacio recorrido en función del tiempo y esboza su gráfica.

b) Prueba que el área bajo la curva que da la velocidad coincide con el espacio total recorrido.

a) La función espacio recorrido es una primitiva de la velocidad, puesto que la velocidad es la derivada del espacio. Observando la gráfica, la función velocidad es continua y está definida a trozos por la siguiente expresión: $v(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le t \le 3 \\ -t+5 & \text{si } 3 < t \le 5 \end{cases}$

Por tanto, el espacio recorrido será: $s(t) = \begin{cases} t^2 + A & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2t + B & \text{si } 1 \le t \le 3 \\ \dfrac{-t^2}{2} + 5t + C & \text{si } 3 < t \le 5 \end{cases}$

Falta calcular los valores de los parámetros A, B y C:

Como $s(0) = 0$, entonces, $A = 0$. Además, por continuidad:

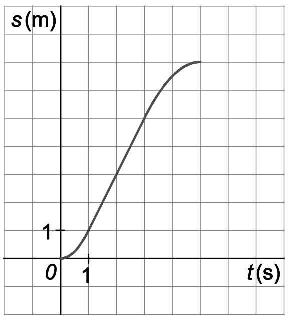
$\lim\limits_{x \to 1^-} s(t) = \lim\limits_{x \to 1^-} t^2 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} s(t) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2t + B) = 2 + B$, $f(1) = 2 + B$.

Así pues, $2 + B = 1$, es decir, $B = -1$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} s(t) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2t + B) = 6 - 1 = 5$, $\lim\limits_{x \to 3^+} s(t) = \lim\limits_{x \to 3^+} \left(\dfrac{-t^2}{2} + 5t + C \right) = \dfrac{21}{2} + C$, $f(3) = 5$.

Así pues, $\dfrac{21}{2} + C = 5 \Rightarrow C = -\dfrac{11}{2}$. La función espacio recorrido es: $s(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 2t - 1 & \text{si } 1 \le t \le 3 \\ \dfrac{-t^2}{2} + 5t - \dfrac{11}{2} & \text{si } 3 < t \le 5 \end{cases}$

cuya gráfica es:



b) El espacio total recorrido es $s(5) = 7$ m.

El área bajo la curva de la velocidad es la de un trapecio de altura 2 y bases 5 y 2, es decir, $A = \dfrac{5+2}{2} \cdot 2 = 7$ u^2.

102. La densidad de población en miles de habitantes por km² en una ciudad depende de la distancia r en kilómetros a su centro de acuerdo a $f(r)=3e^{-\frac{r}{3}}$.

a) ¿Cuántas personas viven a menos de 5 km del centro?

b) ¿Cuántas viven entre 5 y 10 km del centro?

Primero calculamos la integral $\int 2\pi r 3e^{-\frac{r}{3}}dr = 6\pi\int re^{-\frac{r}{3}}dr$ por partes:

$f(r)=r$ $\quad f'(r)=1$ $\quad g'(r)=e^{-\frac{r}{3}}$ $\quad g(r)=-3e^{-\frac{r}{3}}$

$$6\pi\int re^{-\frac{r}{3}}dr = 6\pi\left(-3re^{-\frac{r}{3}} - \int -3e^{-\frac{r}{3}}dr\right) = 6\pi\left(-3re^{-\frac{r}{3}} - 9e^{-\frac{r}{3}}\right) + C = -18\pi\left(e^{-\frac{r}{3}}(r+3)\right) + C$$

a) $\int_0^5 2\pi r 3e^{-\frac{r}{3}}dr = -18\pi\left[\left(e^{-\frac{r}{3}}(r+3)\right)\right]_0^5 \simeq 84{,}201$ miles de habitantes, es decir, 84 201 habitantes.

b) $\int_5^{10} 2\pi r 3e^{-\frac{r}{3}}dr = -18\pi\left[\left(e^{-\frac{r}{3}}(r+3)\right)\right]_5^{10} \simeq 59{,}220$ miles de habitantes, es decir, 59 220 habitantes.

Síntesis

103. Dada la función $F(x)=\int_0^x (t^2-1)e^{-t^2}dt$, con dominio $\mathbb{R}$:

a) Calcula $F'(x)$, estudia el crecimiento de $F(x)$ y halla las abscisas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcula $F''(x)$, estudia la concavidad y convexidad de $F(x)$ y halla las abscisas de sus puntos de inflexión.

a) $F'(x)=(x^2-1)e^{-x^2}$. Esta derivada, $F'(x)$, se anula si $x=-1$ o $x=1$. Se estudia su signo:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo de F'	+	−	+
Comportamiento de F	Creciente	Decreciente	Creciente

Máximo relativo en $x=-1$. Mínimo relativo en $x=1$

b) La derivada segunda de F es $F''(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}$, que se anula si $x = 0$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$:

x	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(0,\sqrt{2})$
Signo de F''	+	−	+	−
Comportamiento de F	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava Hacia arriba	Cóncava hacia abajo

Puntos de inflexión en $x=-\sqrt{2}$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$.

104. Calcula el valor de la integral $\int_{-\pi}^{2\pi}|x|\operatorname{sen}x\,dx$.

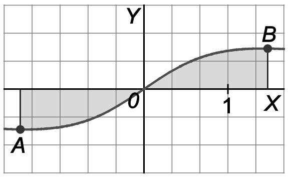
$$\int_{-\pi}^{2\pi}|x|\operatorname{sen}x dx = \int_{-\pi}^{0} -x\operatorname{sen}x dx + \int_0^{2\pi} x\operatorname{sen}x dx = \left[x\cos x - \operatorname{sen}x\right]_{-\pi}^{0} + \left[-x\cos x + \operatorname{sen}x\right]_0^{2\pi} = -\pi - 2\pi = -3\pi$$

105. Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2+2}$, calcula el área encerrada por la curva, el eje de abscisas y las rectas perpendiculares al eje *X* que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada.

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{2-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$, que se anula si $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Estudiando el signo de la derivada: $A\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ es mínimo y $B\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ es máximo.

El recinto está comprendido entre $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.



La función es simétrica respecto del origen. Por tanto, el área pedida es igual a:

$$A = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{x^2+2}dx = \left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2 \ \text{u}^2.$$

106. Sea $F(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Prueba que *F* es continua en $\mathbb{R}$.

b) Estudia si existe $F'(x)$ si $x \neq 0$ y si *F* es derivable en $x = 0$.

c) Estudia la continuidad de $F'(x)$.

a) El único punto problemático sería $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}}{1} = 1$. Finalmente, como $F(0) = 1$, *F* es continua en $x = 0$.

b) Si $x < 0$, $F'(x) = -\operatorname{sen} x$. Si $x > 0$, $F'(x) = \left(\dfrac{\int_0^x e^{t^2}}{x}\right)'$, que existe por tratarse de dos funciones derivables y no anularse el denominador.

Para estudiar si *F* es derivable en $x = 0$ se calculan las derivadas laterales en $x = 0$, $F'\left(0^-\right) = -\operatorname{sen} 0 = 0$ pues si $x < 0$, $F(x) = \cos x$.

$$F'\left(0^+\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^h e^{t^2}dt - h}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h^2}-1}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2he^{h^2}}{2} = 0$$

Así pues, *F* es derivable en 0 y $F'(0) = 0$.

c) $F'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{xe^{x^2}-\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$. Por un lado, F' es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. Se estudia la continuidad de F' en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} F'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{x^2}-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-e^{x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0^+} xe^{x^2}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} F'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\operatorname{sen} x)=0$ y $F'(0)=0$, resulta que F' es continua en $x=0$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

107. **a)** Encuentra una primitiva de $f(x)=\dfrac{6}{x^2+2x-8}$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje X y las rectas $x=-2$ y $x=0$.

a) Debemos descomponer en fracciones simples la función racional dada:

$$\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{6}{(x+4)(x-2)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

Si $x=-4$, obtenemos que $A=-1$. Si $x=2$, obtenemos que $B=1$. Por tanto:

$$f(x)=\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{-1}{x+4}+\frac{1}{x-2}$$

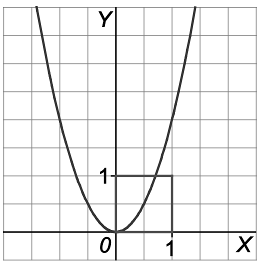
$$\int\frac{6}{x^2+2x-8}dx=\int\left(\frac{-1}{x+4}+\frac{1}{x-2}\right)dx=-\ln|x+4|+\ln|x-2|+C$$

b) Como la función $f(x)$ es negativa en el intervalo $(-4,2)$, el recinto se halla por debajo del eje de abscisas y su área nos la da la integral: $A=\int_{-2}^{0}\left|\dfrac{6}{x^2+2x-8}\right|dx=\big[|-\ln|x+4|+\ln|x-2||\big]_{-2}^{0}=2(\ln 4-\ln 2)=2\ln 2\ \text{u}^2$

108. La curva $y=2x^2$ divide al cuadrado de vértices $V_1(0,0)$, $V_2(1,0)$, $V_3(1,1)$ y $V_4(0,1)$ en dos recintos. Dibújalos y halla el área del recinto mayor.

La abscisa del punto de intersección de la parábola y el segmento V_3V_4 es $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Por tanto, el área del recinto de la izquierda viene dada por la integral:



$$A_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)dx=\left[x-\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3}\simeq 0{,}4714\ \text{u}^2.$$

El área del recinto de la derecha es $A_2=1-A_1\simeq 1-0{,}4714=0{,}5286\ \text{u}^2$.

Con lo cual, el recinto mayor es el de la derecha.

109. Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = a$ sea igual a $\frac{4}{3}$ de unidades de superficie.

El área nos la da la integral $A = 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)dx = 2\left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = 2\left[a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right] = 2\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 1$, y como ha de ser igual a $\frac{4}{3}$, concluimos que $a = \sqrt[3]{4}$.

110. Calcula el volumen del paraboloide de revolución que se obtiene al girar la región comprendida entre la parábola $y = x^2$ y el eje horizontal, alrededor del eje X desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

Se sabe que dicho volumen es igual a: $V = \int_0^4 \pi\left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{1024\pi}{5}$ u^3.

CUESTIONES

111. ¿Cuál es el valor de $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{\left(x^2+1\right)} dx$?

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\left(x^2+1\right)^7}$ es una función impar pues $f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\left((-x)^2+1\right)^7} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\left(x^2+1\right)^7} = -f(x)$, así que $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{\left(x^2+1\right)^7} dx = 0$.

112. Sea $f : [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt$.

¿Se puede asegurar que existen b y c en $[-2,2]$ tales que $b \le -1$, $c \ge 1$ y $f(b) = f(c)$? Justifica la respuesta.

Por el teorema del valor medio se sabe que:

A) Existe un número c del intervalo $[1,2]$ que cumple $\int_1^2 f(t)dt = f(c)(2-1) = f(c)$.

B) Existe un número b del intervalo $[-2,-1]$ que cumple $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = f(b)(-1-(-2)) = f(b)$.

Como ambas integrales son iguales, se concluye que, en efecto, existen b y c en $[-2,2]$ con $b \le -1$, $c \ge 1$ y $f(b) = f(c)$.

113. ¿Qué número es mayor, $\int_1^2 \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}dx$ o $\int_1^2 \frac{\text{sen}\, x}{x}dx$?

En el intervalo $[1,2]$, sen x es positivo y como sen $x \leq 1$, tenemos que sen$^2x \leq$ sen x.

Por otra parte, en dicho intervalo, $x \leq x^2$, así que $\frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \leq \frac{\text{sen}\, x}{x}$ por lo que $\int_1^2 \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}dx \leq \int_1^2 \frac{\text{sen}\, x}{x}dx$, de hecho es estrictamente menor pues la función $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x} - \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$ es continua en $[1,2]$, $f(x) \geq 0$, y no es idénticamente nula por lo que $\int_1^2 \left(\frac{\text{sen}\, x}{x} - \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}\right)dx > 0$, es decir, $\int_1^2 \frac{\text{sen}\, x}{x}dx > \int_1^2 \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}dx$.

114. Demuestra la igualdad $\int_0^b f(x)dx = \int_0^b f(b-x)dx$. Para ello, realiza el cambio $t = b - x$.

Se utiliza el teorema de sustitución en integrales definidas llamando $g(x) = b - x$ y entonces $g'(x) = -1$.

$$\int_0^b f(b-x)dx = -\int_0^b f(g(x))g'(x))dx = -\int_{g(0)}^{g(b)} f(t)dt = -\int_b^0 f(t)dt = \int_0^b f(t)dt = \int_0^b f(x)dx .$$

115. Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones.

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$

c) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $a = b$.

d) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo x, entonces $a = b$.

e) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

a) Es verdadera. Es la propiedad 6 de la integral definida.

b) Es falsa. Por ejemplo, $\left(\int_0^2 1x\, dx = 2\right) \neq \left(\int_0^2 1\,dx \cdot \int_0^2 x\, dx = 2{\cdot}2 = 4\right)$.

c) Es falsa. Por ejemplo, $\int_{-1}^{1} x\, dx = 0$.

d) Es verdadera. Si la función es positiva en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\, dx$ mide el área bajo la curva, así pues, esa área solo puede ser cero si $a = b$.

e) Es verdadera. Es la propiedad 4 de la integral definida.

116. Sea $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ con a > 0, continua y tal que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

a) ¿Es necesariamente $f(x)=0$ para todo x de $[-a,a]$?

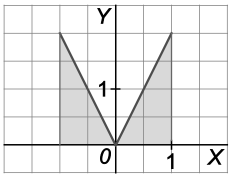
b) ¿Es necesariamente $\int_{-a}^{a}|f(x)|\,dx = 0$? ¿Y $\int_{-a}^{a}|f(-x)|\,dx = 0$?

c) Calcula $\int_{-a}^{a}(f(x)+2x)\,dx$.

Supongamos que f sea una función impar, por ejemplo, $f(x)=2x$ y $a=1$. Así pues $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 2x\,dx = 0$.

a) Ciertamente no es necesario, que como acabamos de ver, por ejemplo, $f(x)=2x$.

b) Obviamente tampoco pues en nuestro caso



$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$ es el área sombreada que obviamente no es cero.

Tampoco $\int_{-a}^{a}|f(-x)|\,dx = 0$ En nuestro caso $f(-x)=-2x$,

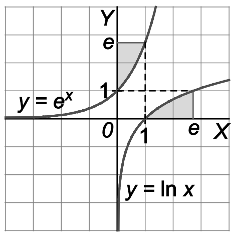
por lo que $\int_{-1}^{1}|-2x|\,dx$ vuelve a ser el área rayada, obviamente no cero.

c) $\int_{-a}^{a}(f(x)+2x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{a} 2x\,dx = 0 + \left[x^2\right]_{-a}^{a} = 0+0=0$.

117. Para calcular $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}\,dx$, un amigo te sugiere que pongas $x=\frac{2}{\cos t}$. ¿Le harías caso?

Con amigos así no hacen falta enemigos, pues si x está en $[-1,1]$, es imposible que $x=\frac{2}{\cos t}$ ya que $\left|\frac{2}{\cos t}\right|\ge 2$ así que $|x|\ge 2$, o sea, no estaría en $[-1,1]$.

118. Para calcular $\int_{1}^{e}\ln x\,dx$, si no se quiere integrar por partes, se puede utilizar el dibujo de la derecha. Justifica esta afirmación y calcula dicha integral.



Como las funciones $y=e^x$, $y=\ln x$ son inversas la una de la otra, sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante por lo que las áreas sombreadas son iguales, así que:

$$\int_{1}^{e}\ln x\,dx = e\cdot 1 - \int_{0}^{1} e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1)=1$$

119. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}\sqrt{t}}{x^3}$?

Dicho límite presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ por lo que, aplicando el teorema de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2}\,2x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\frac{2}{3}.$$

120. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, integrable y tal que para $x\in[-1,1]$ es $|f(x)|\le 1+x^2$. ¿Cuáles de entre los números –3; –2; –1; 2,5 y 2,75 pueden ser el valor de $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$?

Como $-(1+x^2)\le f(x)\le 1+x^2$, se tiene que $-\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx$.

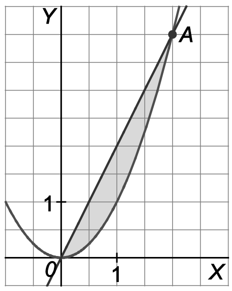
Es decir, $-\dfrac{8}{3}\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le\dfrac{8}{3}$ por lo que solo –2, –1 y 2,5 podrían ser el valor de la integral.

PROBLEMAS

121. Halla el volumen del sólido formado al girar en torno al eje X la región bajo la gráfica de $y=\sqrt{\operatorname{sen}x}$ en el intervalo $[0,\pi]$?

$$V=\int_0^{\pi}\pi f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx=\pi[-\cos x]_0^{\pi}=2\pi\ \text{u}^3$$

122. Determina el volumen generado al girar respecto al eje de abscisas la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x$.



Ambas gráficas se cortan en los puntos $O(0,0)$ y $A(2,4)$.

La recta va por arriba y la parábola por debajo.

El volumen pedido lo da la integral:

$$V=\int_0^2\pi(2x)^2\,dx-\int_0^2\pi(x^2)^2\,dx=\pi\int_0^2(4x^2-x^4)\,dx=\pi\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{64\pi}{15}\ \text{u}^3.$$

123. Calcula $\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$ siendo $f(x)=\operatorname{sen}x-\dfrac{1}{2}$.

En el intervalo $[0,\pi]$, $\operatorname{sen}x-\dfrac{1}{2}\ge 0$ si $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$, siendo negativa en el resto.

$$I=\int_0^{\pi}\left|\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx=\left[\frac{x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[\frac{x}{2}+\cos x\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}+\left[\frac{x}{2}+\cos x\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-1-\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}-2.$$

124. La función $\rho(x)=300\left[2+\text{sen}\left(4\sqrt{x+0{,}15}\right)\right]$, da la densidad de coches (en coches por km) en los primeros 20 km de una autovía, siendo *x* la distancia en kilómetros al comienzo de la misma. Calcula el número total de coches en los 20 km.

$$\int_0^{20}\rho(x)dx=\int_0^{20}300\left(2+\text{sen}\,4\sqrt{x+0{,}15}\right)dx=600\int_0^{20}dx+300\int_0^{20}\text{sen}\,4\sqrt{x+0{,}15}\,dx$$

Se cambia de variable: $\sqrt{x+0{,}15}=t$, $\dfrac{dx}{2\sqrt{x+0{,}15}}=dt\Rightarrow dx=2\sqrt{x+0{,}15}dx=2t\,dt$

$$\int\text{sen}\;4\sqrt{x+0{,}15}\,dx=\int 2t\text{sen}(4t)dt=2\int t\text{sen}(4t)dt\;;\;f(t)=t\;,\;g'(t)=\text{sen}(4t)\;,\;f'(t)=1,\;g(t)=-\frac{\cos(4t)}{4}$$

$$2\int t\text{sen}(4t)dt=2\cdot\left(\frac{-t\cos(4t)}{4}+\frac{1}{4}\int\cos(4t)dt\right)=\frac{-t\cos(4t)}{2}+\frac{\text{sen}(4t)}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\text{sen}\,4\sqrt{x+0{,}15}\,dx=\frac{-\sqrt{x+0{,}15}\cos\left(4\sqrt{x+0{,}15}\right)}{2}+\frac{\text{sen}\left(4\sqrt{x+0{,}15}\right)}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{20}300\left(2+\text{sen}\,4\sqrt{x+0{,}15}\right)dx=600\cdot 20+300\left[\frac{-\sqrt{x+0{,}15}\cos\left(4\sqrt{x+0{,}15}\right)}{2}+\frac{\text{sen}\left(4\sqrt{x+0{,}15}\right)}{8}\right]_0^{20}\simeq$$

$\simeq 11513$ coches

125. La aceleración en m/s² de un móvil con movimiento rectilíneo viene dada en función del tiempo *t* por la expresión $a(t)=3\cos(2t+1)$. Si la posición y la velocidad de la partícula en *t* = 0 eran $x(0)=5$ m y $v(0)=1$ m/s, respectivamente, determina:

a) La función que da la velocidad del móvil en función de *t*.

b) La función que da la posición del móvil en función de *t*.

a) La velocidad es la integral de la aceleración, así pues:

$$v(t)=\int a(t)dt=\int 3\cos(2t+1)dt=\frac{3}{2}\int 2\cos(2t+1)dt=\frac{3}{2}sen(2t+1)+C$$

Como sabemos que $v(0)=1$, ya podemos calcular la constante *C*:

$$v(0)=\frac{3}{2}\text{sen}(2\cdot 0+1)+C=1\Rightarrow C=1-\frac{3}{2}\text{sen}1$$

La función velocidad es $v(t)=\frac{3}{2}\text{sen}(2t+1)+1-\frac{3}{2}\text{sen}1$.

b) La posición es la integral de la velocidad, así pues:

$$x(t)=\int v(t)dt=\int\left[\frac{3}{2}\text{sen}(2t+1)+1-\frac{3}{2}\text{sen}1\right]dt=-\frac{3}{4}\cos(2t+1)+\left(1-\frac{3}{2}\text{sen}1\right)t+C$$

Como sabemos que $x(0)=5$, ya podemos calcular la constante *C*:

$$x(0)=-\frac{3}{4}\cos(2\cdot 0+1)+\left(1-\frac{3}{2}\text{sen}1\right)\cdot 0+C=5\Rightarrow C=5+\frac{3}{4}\cos 1$$

La función posición es $x(t)=-\frac{3}{4}\cos(2t+1)+\left(1-\frac{3}{2}\text{sen}1\right)t+5+\frac{3}{4}\cos 1$.

126. Un objeto se mueve sobre una recta debido a la acción de una fuerza F que depende de su posición x a lo largo de dicha recta en la forma, $F(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$. El trabajo realizado por F al mover el objeto desde $x=a$ hasta $x=b$ es $W=\int_a^b F(x)dx$.

a) Calcula el trabajo para ir desde $x=3$ hasta $x=5$.

b) Determina si la fuerza $G(x)=\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que $F(x)$ para el mismo desplazamiento.

a) El trabajo es $W=\int_3^5 \dfrac{2}{(x-1)^2}dx=\left[\dfrac{2}{1-x}\right]_3^5=\dfrac{1}{2}$ J.

b) Al ser ambas fuerzas positivas en $[3,5]$, se pueden identificar los trabajos con las áreas que encierran las fuerzas bajo ellas.

Como $G(x)=\dfrac{2}{(x^2+1)^2}<\dfrac{2}{(x-1)^2}=F(x)$ en $[3,5]$, ya que el denominador de $G(x)$ es mayor que el de $F(x)$, se concluye que el trabajo de la fuerza $G(x)$ es menor que el de $F(x)$.

127. Para estudiar la capacidad de memorizar de un niño se usa el siguiente modelo: si x es su edad en años, entonces dicha capacidad viene dada por: $f(x)=1+2x\ln x$ con $0\le x\le 5$.

Calcula el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

El teorema del valor medio nos asegura que existe un número c del intervalo $[1,3]$ que cumple $\int_1^3 (1+2x\cdot\ln x)dx=f(c)(3-1)$. El valor $f(c)$ será el valor medio pedido.

Se calcula, pues, el valor de la integral y luego se halla $f(c)$: $\int(1+2x\ln x)dx=\int dx+2\int x\ln x\,dx=x+2\int x\ln x\,dx$.

Esta última integral se calcula por partes:

$$f(x)=\ln x\,,\ f'(x)=\frac{1}{x}\,,\ g'(x)=x\,,\ g(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$$

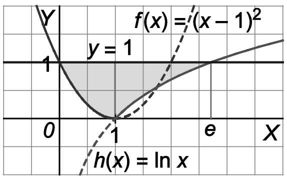
Entonces:

$$\int(1+2x\ln x)dx=x+x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\int_1^3(1+2x\cdot\ln x)\,dx=\left[x+x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^3=7{,}89\Rightarrow f(c)\cdot 2=7{,}89\Rightarrow f(c)=3{,}95$$

es el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y tercer cumpleaños.

128. Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si } x\le 1\\ \ln x & \text{si } x>1\end{cases}$. Dibuja el recinto acotado por la gráfica de $f(x)$ y la recta $y=1$, y determina su área.

La parábola $g(x)=(x-1)^2$ y el logaritmo $h(x)=\ln x$ se cortan en el punto $A(1,0)$ y el recinto, como se aprecia, está formado por dos recintos.



Calculemos sus áreas: $A_1=\int_0^1\left[1-(x-1)^2\right]dx=\int_0^1\left(-x^2+2x\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}$ u².

$A_2=\int_1^e(1-\ln x)dx=\left[x-(x\ln x-x)\right]_1^e=\left[2x-x\ln x\right]_1^e=e-2$ u².

El área del recinto es $\frac{2}{3}+e-2=e-\frac{4}{3}$ u².

Recuerda que la integral del logaritmo neperiano se calcula por partes: $I=\int \ln x\,dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x\end{array}\right\}\Rightarrow I=x\ln x-\int\frac{1}{x}x\,dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$$

129. Si $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$, ¿será entonces $\int_{-a}^{a}xf(x)dx=0$? Si es cierto, pruébalo, si es falso confírmalo con un ejemplo.

Es falso: basta que f sea impar para que $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

Por ejemplo $f(x)=x$, por lo que $\int_{-a}^{a}xf(x)dx=\int_{-a}^{a}x^2\,dx\neq 0$.

130. a) Sea g una función derivable que cumple $g(6)=\int_5^6 g(x)dx$. Calcula $\int_5^6 (x-5)g'(x)dx$.

b) Sea f continua y tal que $\int_1^e f(u)du=\frac{1}{2}$. Calcula $\int e^{\frac{x}{2}} f\left(e^{\frac{x}{2}}\right)dx$.

a) Calculamos la integral $\int (x-5)g'(x)dx$ por partes:

$$f(x)=x-5,\ f'(x)=1,\ g'(x)=g'(x),\ g(x)=g(x)$$

$$\int (x-5)g'(x)\,dx=(x-5)g(x)-\int g(x)dx$$

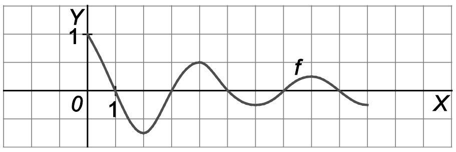
Por tanto, la integral definida pedida es: $\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx=\left[(x-5)g(x)\right]_5^6-\int_5^6 g(x)dx=g(6)-0-g(6)=0$

b) Para calcular $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}} f\left(e^{\frac{x}{2}}\right)dx$ empleamos el teorema de sustitución en integrales definidas:

Si f y g' son continuas, entonces $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$.

Así pues: $\int_0^2 f\left(e^{\frac{x}{2}}\right)e^{\frac{x}{2}}\,dx=2\int_0^2 f\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}dx=2\int_{e^{\frac{0}{2}}}^{e^{\frac{2}{2}}} f(t)\,dt=2\int_1^e f(t)\,dt=2\cdot\frac{1}{2}=1$

131. Sea $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ con f, definida en $[0,10]$, dada en la figura.



a) ¿Tiene g algún máximo o mínimos relativos? ¿Dónde están?

b) ¿En qué valores de x alcanza g el máximo y el mínimo absolutos?

c) ¿En qué intervalo es la gráfica de g cóncava hacia arriba?

d) Esboza la gráfica de g.

Al ser $g'(x)=f(x)$, se ve que $g'(x)=0$ si $x=1, 3, 5, 7, 9$.

a) En los puntos de abscisa 1, 5, 9, $g'(x)$ pasa de ser positiva a negativa, luego g pasa de ser creciente a decreciente, es decir, se trata de máximos relativos.

En los puntos de abscisa 3, 7, $g'(x)$ pasa de ser negativa a positiva, así que en ellos $g(x)$ presenta mínimos relativos.

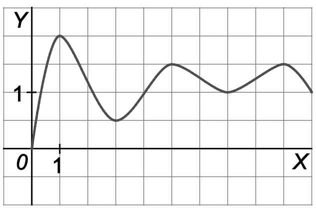
b) Se estudia el valor de g en $x=0$ y $x=10$ y en los puntos del interior en los que se anula la derivada.

$g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$; $g(1)>0$, $g(3)<g(1)$, $g(5)<g(1)$, $g(7)<g(1)$ pues $g(7)<g(5)$, $g(9)=g(5)$ y $g(10)<g(9)$.

Así pues, el máximo absoluto de g se alcanza en $x=1$. Análogamente, se ve que el mínimo se alcanza en 3.

c) $g''(x)>0$ si $f'(x)>0$ y eso ocurre en $(2,4)\cup(6,8)$.

d)



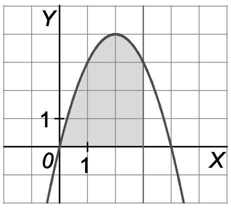
132. Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0)=P(2)=1$ y que $\int_0^2 P(x)dx = \frac{1}{3}$.

$P(x)=ax^2+bx+c$ con $a \neq 0$. $P(0)=c=P(2)=4a+2b+c=1$, es decir, $4a+2b=0$ y $c=1$.

Por otra parte, $\int_0^2 \left(ax^2+bx+1\right)dx = \frac{1}{3}$, es decir: $a\,\frac{8}{3}+2b+2=\frac{1}{3}$,

Por tanto, si $2a+b=0$ y $\frac{4}{3}a+b=-\frac{5}{6}$, se tiene que $\frac{2}{3}a=\frac{5}{6}$, $a=\frac{5}{4}$, $b=-\frac{5}{2}$, y $P(x)=\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1$.

133. En la figura se muestra la parte positiva de la gráfica de $y = 4x - x^2$. Encuentra la ecuación de una recta vertical para que el área de la zona sombreada sea de 9 u².



$\int_0^a \left(4x-x^2\right)dx = 9$, es decir: $\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^a = 9$, $2a^2-\frac{a^3}{3}=9$, $a^3-6a^2+27=0$, $(a-3)\left(a^2-3a-9\right)=0$, $a=3$, pues las otras soluciones no están en $[0, 4]$.

La recta buscada es $x=3$.

PARA PROFUNDIZAR

134. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que si $x \neq 0$, $g(x)=\frac{x}{e^x-1}$ y sea $f(x)=\int_{-x}^{x} g(t)dt$.

Calcula $g(0)$, estudia la continuidad de *f* y obtén $f'(x)$.

Como *g* es continua en 0, se tiene que $g(0)=\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$.

f es continua en $\mathbb{R}$ pues es derivable ya que *g* es continua y, al ser $f(x)=\int_{-x}^{x} g = \int_{-x}^{0} g + \int_{0}^{x} g$, se tiene que:

$$f'(x)=\left(-g(-x)\right)(-1)+g(x)=g(-x)+g(x)=\frac{-x}{e^{-x}-1}+\frac{x\left(e^x+1\right)}{e^x-1}$$

135. Sea *f* una función continua y positiva en el intervalo $[0,1]$. Halla razonadamente el número de raíces en $(0,1)$ de la función $F(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^1 f(t)dt$.

La función $F(x)$ es continua en $[0,1]$ (pues es derivable), siendo $F(0)=\int_0^0 f-\int_0^1 f = 0-\int_0^1 f<0$ pues *f* es positiva en $[0,1]$.

Análogamente, $F(1)=\int_0^1 f-\int_1^1 f=\int_0^1 f-0>0$.

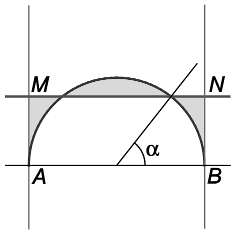
Así pues, *F* tiene al menos una raíz en $(0,1)$.

Se estudia $F'(x)$: $F'(x)=f(x)-f(x)(-1)=2f(x)>0$

Así pues, como $F'(x)$ nunca se hace cero en $(0,1)$, se desprende que *F* no puede tener más de una raíz en dicho intervalo por lo que, junto al argumento anterior, se concluye que solo tiene una raíz.

136. La figura muestra un semicírculo de radio 1, diámetro horizontal *AB* y rectas tangentes en *A* y *B*. ¿A qué distancia del diámetro debe colocarse la recta horizontal *MN* para minimizar el área sombreada?

Hazlo de dos formas: minimizando una función integral y minimizando una función que dependa de α.



Se toma un sistema de ejes perpendiculares con origen en el centro del semicírculo, cuya ecuación sería:

$y=\sqrt{1-x^2}$. Sea $y=k$ la ecuación de la recta *MN* y se escribe el área sombreada en función de *k*.

$$A=2\left[\int_0^{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{1-x^2}dx-k\sqrt{1-k^2}+k\left(1-\sqrt{1-k^2}\right)-\int_{\sqrt{1-k^2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx\right]=$$

$$=2\left[\int_0^{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{1-x^2}dx+\int_1^{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{1-x^2}dx+k-2k\sqrt{1-k^2}\right]=f(k)$$

Para obtener el mínimo valor de $f(x)$, con $k\in[0,1]$, se calcula su derivada respecto de *k*.

$$f'(k)=2\left[k\cdot\frac{(-k)}{\sqrt{1-k^2}}+k\frac{(-k)}{\sqrt{1-k^2}}+1-2\left(\sqrt{1-k^2}-\frac{k^2}{\sqrt{1-k^2}}\right)\right]=2\left[\frac{-2k^2}{\sqrt{1-k^2}}+1-2\sqrt{1-k^2}+\frac{2k^2}{\sqrt{1-k^2}}\right]=$$

$=2\left[1-2\sqrt{1-k^2}\right]$. Así pues, $f'(k)=0$ si $\sqrt{1-k^2}=\frac{1}{2}$, $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Así pues, la recta *MN* se debe situar a una distancia de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ del diámetro *AB.* Se comprueba, posteriormente, que para ese valor de *k*, *f* alcanza el mínimo absoluto.

Se resuelve ahora el problema sin utilizar el cálculo integral, como indica el enunciado. El área sombreada es:

$$2\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\text{sen}\alpha\cos\alpha+\frac{1+1-\cos\alpha}{2}\text{sen}\alpha-\frac{\alpha}{2}\right]=2\left[\frac{\pi}{4}-\alpha+\text{sen}\alpha-\text{sen}\alpha\cos\alpha\right]=f(\alpha)\text{ con }\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$f'(\alpha)=2[-1+\cos\alpha-\cos2\alpha]=0$ si $\cos2\alpha-\cos\alpha+1=0$, es decir, $\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha-\cos\alpha+1=0$, es decir, $2\cos^2\alpha-\cos\alpha=0$. Así pues, $\cos\alpha=0,\cos\alpha=\frac{1}{2}$

Se nota que el valor $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ corresponde al valor de $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ obtenido por el procedimiento anterior.

Se comprueba que $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ corresponde efectivamente al mínimo absoluto.

Si $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ y $f(0)=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\simeq1{,}57$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+1\right]=2\cdot\left[1-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{4-\pi}{2}\simeq0{,}43$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]=2\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right]=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\simeq0{,}34$$

Así pues, el mínimo valor corresponde a $\alpha=\frac{\pi}{3}$ o $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

137. a) Escribe $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$.

(Haz $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ e integra por partes).

b) Utiliza el apartado anterior para demostrar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

c) Si n es un impar positivo, prueba la fórmula de Wallis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot n}$$

a) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \int (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)dx =$

$= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$

$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \Rightarrow \int \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{-1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \left[-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\,\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$, es decir, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx = \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-4} x\,dx$, es decir: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-4} x\,dx$

Reiterando, si n es un entero positivo impar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}...\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}...\frac{2}{3}\cdot 1$$

138. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{1-x}$.

a) Calcula $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$.

Para cada $n \geq 1$, sea $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

b) Demuestra que si $x \in [0,1]$, entonces $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$.

c) Calcula $J_n = \int_0^1 x^n\,dx$ y prueba que si $n \geq 1$, entonces $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. Deduce que I_n no es un número entero.

d) Por integración por partes demuestra que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

e) Sea $k_n = n!e - I_n$, escribe k_{n+1} en función de k_n y prueba que k_n es un número entero para todo n.

f) Utilizando c) y d) prueba que $n!e = k_n + I_n$ no es un entero.

g) Demuestra que el número e es irracional.

a) $I_1 = \int_0^1 xe^{1-x}dx = \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot e^{1-x}dx = e - 2$

b) Si $x \in [0,1]$, $1 \leq e^{1-x} \leq e$, así que $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$

c) $\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \leq e \cdot \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Por tanto, si $n \geq 2$, es $\frac{1}{3} \leq I_n \leq \frac{e}{3}$, $I_1 = e - 2$. Luego I_n no es un número entero.

d) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx = \left[-x^{n+1} \cdot e^{1-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}dx = -1 + (n+1)I_n$

e) Por inducción:

Si $n = 1$, $k_1 = 1!e - I_1 = e - (e-2) = 2$.

Suponiendo que k_n es entero se demuestra para k_{n+1}.

$k_{n+1} = (n+1)!e - I_{n+1} = (n+1)!e - (n+1)I_{n+1} + 1 = (n+1)[n!e - I_n] + 1 = (n+1)k_n + 1$ es entero.

f) Como, según c), I_n no es entero con $n \geq 1$, sigue que $n!e = k_n + I_n$ no es entero con $n \geq 1$.

g) Si $n!e$ no es entero, e es irracional pues, en caso contrario, $e = \frac{a}{b}$, se tomaría $n = b$ y $n!e = b!\frac{a}{b} = (b-1)!a$ sería entero.

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. En la parábola que corresponde a la función $f(x) = x^2 + a$, siendo a un número real, las tangentes en los puntos de abscisas 1 y –1 pasan por el origen de coordenadas.

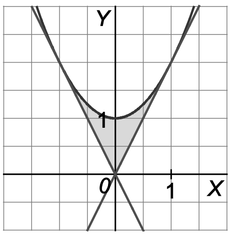
Obtén a y calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y dichas tangentes.

Los puntos de abscisas 1 y -1 tienen ordenada $1 + a$.

Las rectas tangentes en dichos puntos son $y-(1+a)=2(x-1)$ e $y-(1+a)=-2(x+1)$.

Al pasar por $O(0,0)$, la primera, por ejemplo, es $-(1+a)=-2$, $a=1$.

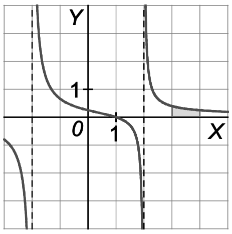
Así pues, la parábola es $y = x^2 + 1$ y nos piden el área del recinto sombreado.



Área sombreada $= 2\int_0^1 (x^2+1-2x)\,dx = 2\left[\dfrac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}\cdot 1 = \dfrac{2}{3}$ u^2

2. Calcula el valor del área limitada por la curva $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$, el eje X y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

Un esbozo de la región de la que nos piden el área sería la sombreada.



Así que el área pedida es $\int_3^4 \dfrac{x-1}{x^2-4}dx$.

$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{x^2-4}$$

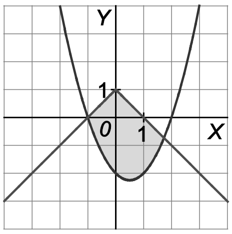
Luego $x-1 = A(x-2)+B(x+2)$. Por tanto, si $\begin{cases} x=2 \Rightarrow 1=4B \\ x=-2 \Rightarrow -3=-4A \end{cases}$ por lo que:

$$\int_3^4 \frac{x-1}{x^2-4}dx = \left[\frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2|\right]_3^4 = \frac{3}{4}\ln 6 + \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{3}{4}\ln 5 = \frac{3}{4}\ln\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\ln 2 \text{ u}^2$$

3. Obtén el área del recinto acotado limitado por las gráficas de $f(x) = x^2 - x - 2$ y $g(x) = 1 - |x|$.

El recinto del que se pide el área es el sombreado.

Así pues, las coordenadas de los puntos de corte son las soluciones de los sistemas:



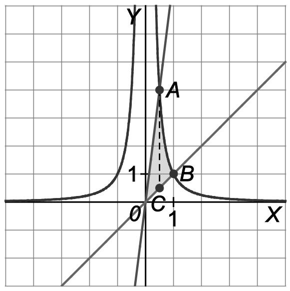
$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \\ y = x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = (x+1)(x-2) \\ y = -x+1 \end{cases}$$

que son $x=-1$ y $x=\sqrt{3}$, respectivamente, por lo que el área pedida será:

$$\int_{-1}^0 [x+1-(x+1)(x-2)]dx + \int_0^{\sqrt{3}} [-x+1-(x+1)(x-2)]dx = \int_{-1}^0 (-x^2+2x+3)dx + \int_0^{\sqrt{3}} (-x^2+3)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} - 1 + 3 + (-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + \frac{7}{3} \text{ u}^2$$

4. Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$ e $y = 8x$ y calcula su área.



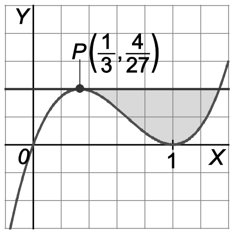
$$A:\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ y = 8x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 4\right);\ B:\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow B(1,1);\ C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Área del triángulo OCA: $\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{8}$ u^2

Área región $ACB = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-x\right)dx = \left[-\frac{1}{x}-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -1-\frac{1}{2}+2+\frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ u^2

Así que el área del recinto sombreado es $\dfrac{7}{8}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{2}$ u^2.

5. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a dicha gráfica en el máximo relativo.



$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ si $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} \Rightarrow x = 1, x = \dfrac{1}{3}$

$f''(x) = 6x - 4$, $f''\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0$ por lo que el máximo relativo es $P\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$.

Nos piden el área de la región sombreada.

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{27}$ $\qquad B:\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + x \\ y = \dfrac{4}{27} \end{cases}$

Resolvemos la ecuación $x^3 - 2x^2 + x - \dfrac{4}{27} = 0$. Sabemos que una solución es $x = \dfrac{1}{3}$, así que factorizamos como $x^3 - 2x^2 + x - \dfrac{4}{27} = \left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x^2 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{9}\right)$.

$x^2 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{9} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}, x = \dfrac{4}{3}$ por lo que $B\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ y el área pedida es:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}}\left[\frac{4}{27} - \left(x^3 - 2x^2 + x\right)\right]dx = \left[\frac{4x}{27} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{12}\ \text{u}^2$$

6. Si $I = \displaystyle\int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt$ y $J = \displaystyle\int_0^1 e^{1-t}\operatorname{sen} t\,dt$, comprueba que $\begin{cases} J + I = -\cos 1 + e \\ J - I = -\operatorname{sen} 1 \end{cases}$, y calcula después las integrales.

$$I = \int_0^1 \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{e^{1-t}}\ \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{\cos t\,dt} = \left[e^{1-t}\operatorname{sen} t\right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-t}\operatorname{sen} t\,dt = \operatorname{sen}1 + J$$

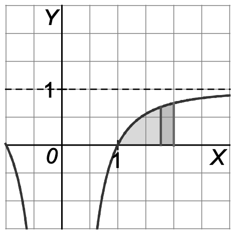
$$J = \int_0^1 \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{e^{1-t}}\ \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{\operatorname{sen} t\,dt} = \left[-e^{1-t}\cos t\right]_0^1 - \int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt = -\cos1 + e - I$$

$\begin{matrix} I = \operatorname{sen}1 + J \\ J = -\cos 1 + e - I \end{matrix}$, debemos probar que $\begin{matrix} I + J = -\cos 1 + e \\ I - J = \operatorname{sen}1 \end{matrix}$ y efectivamente, $\begin{matrix} I - J = \operatorname{sen}1 & (1^{\text{a}}\ \text{ecuación}) \\ I + J = -\cos1 + e & (2^{\text{a}}\ \text{ecuación}) \end{matrix}$,

por tanto, $I = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}1 - \cos1 + e)$, $J = \dfrac{1}{2}(-\operatorname{sen}1 - \cos 1 + e)$.

7. Encuentra el valor de c para que la recta $x = c$ divida al área de la región bajo la gráfica de $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ entre 1 y 2 en dos regiones, tales que el área de la de la izquierda sea el doble del área de la de la derecha.

Hay que hallar c para que $\int_1^c \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\int_c^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$, es decir:



$\left[x + \frac{1}{x}\right]_1^c = 2\left[x + \frac{1}{x}\right]_c^2$, así que $c + \frac{1}{c} - 2 = 2\left(2 + \frac{1}{2} - c - \frac{1}{c}\right)$,

$c + \frac{1}{c} - 2 = 5 - 2c - \frac{2}{c}$, o sea:

$3\left(c + \frac{1}{c}\right) = 7 \Rightarrow c + \frac{1}{c} = \frac{7}{3} \Rightarrow 3c^2 - 7c + 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$ y como $c > 1$, la solución es $c = \frac{7 + \sqrt{13}}{6}$

8. Calcula los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \int_0^{2x} e^{t^2 - 10t + 24}\, dt$.

$f'(x) = -2 + e^{4x^2 - 20x + 24} \cdot 2 = 0$ si $e^{4x^2 - 20x + 24} = 1$, es decir, $4x^2 - 20x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$

9. Calcula el volumen del cuerpo generado en la rotación alrededor del eje X de la superficie limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ con $0 \le x \le \pi$ y el eje.

$$V = \pi\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\pi = \frac{\pi^2}{2}\ \text{u}^3$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si $f(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^4 t\, dt$ y $g(x) = 2x^2$, entonces $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es igual a:

A. $2\pi - 1$ **B.** $3\pi - \frac{1}{4}$ **C.** $2\pi - \frac{2}{3}$ **D.** $\pi - \frac{8}{3}$

La solución es D. $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$g(x) = 2x^2$, $g'(x) = 4x$, $f(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^4 t\, dt$;

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 t\left(1 + \operatorname{tg}^2 t - 1\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 t\left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 t\, dt = \left[\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int \left(1 + \operatorname{tg}^2 t - 1\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{3} - [\operatorname{tg} t]_0^{\frac{\pi}{4}} + [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

Por otra parte, $f'(x) = \operatorname{tg}^4 x$, con lo que $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. $g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) = \pi - \frac{8}{3}$. Así pues, $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{8}{3}$

2. Sobre la integral $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx$ podemos afirmar:

A. Vale 0.

B. No existe, pues $y = |\operatorname{sen} x|$ no es integrable.

C. Vale 4.

D. Es $|-\cos 2\pi| + |\cos 0|$.

La solución es C.

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx = \int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 1+1+1+1 = 4$$

3. Sea *f* una función definida en el intervalo abierto $(0,4)$ con derivada segunda continua. Si *f* tiene extremos locales en los puntos 1 y 2, de la integral $I = \int_1^2 x f''(x)\, dx$, podemos asegurar que:

A. $I = f(2) - f(1)$

B. $I = f(1) - f(2)$

C. $I = f'(1) - f'(2)$

D. $I = 2f'(2) - f'(1)$

La solución es B. $I = \int_1^2 x f''(x)\, dx = [x f'(x)]_1^2 - \int_1^2 f'(x) = [x f'(x)]_1^2 - [f(x)]_1^2 = 2f'(2) - f'(1) - (f(2) - f(1))$

Al tener *f* extremos locales en 1 y 2, se tiene $f'(2) = f'(1) = 0$ por lo que $I = f(1) - f(2)$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Sean $I = \int_0^1 t\cos^2(\pi t)\, dt$ y $J = \int_0^1 t\operatorname{sen}^2(\pi t)\, dt$.

A. $I > 0$

B. $I + J = 1$

C. $I \le 1$

D. $I - J \le \int_0^1 t\cos 2\pi t\, dt$

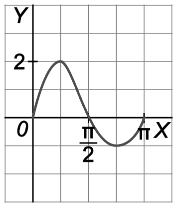
La respuesta A es verdadera pues las funciones continuas $f(t) = t\cos^2(\pi t)$ y $g(t) = t\operatorname{sen}^2(\pi t)$ son no negativas en el intervalo $[0,1]$.

La respuesta B es falsa porque $I + J = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$

La respuesta C es verdadera porque $I = \int_0^1 t\cos^2(\pi t)\, dt \le \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$.

La respuesta D es verdadera porque $I - J = \int_0^1 t\left(\cos^2(\pi t) - \operatorname{sen}^2(\pi t)\right) dt = \int_0^1 t\cos(2\pi t)\, dt$.

5. **Sea *f* la función definida en $[0,\pi]$ cuya representación gráfica es la de la figura.**



A. $\int_0^{\pi} f(x)dx \geq 0$

B. $\int_0^{\pi} |f(x)| dx = \left| \int_0^{\pi} f(x)dx \right|$

C. $\left| \int_0^{\pi} f(x)dx \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$

D. El valor medio de *f* en $[0,\pi]$ es inferior a 1.

La respuesta A es verdadera pues $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx > -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$.

La respuesta B es falsa, pues $\int_0^{\pi} |f(x)| dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ y $\left| \int_0^{\pi} f(x)dx \right| < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

La respuesta C es falsa pues $\int_0^{\pi} f(x)dx > 0$, por lo que $\left| \int_0^{\pi} f(x)dx \right| = \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$.

La respuesta D es verdadera ya que $\int_0^{\pi} f(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$, por lo que el valor medio de *f* en $[0,\pi]$ es menor que $\frac{\pi}{\pi} = 1$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. ***Sea *f* una función continua en $[a, b]$.**

1. $\left| \int_a^{b} f(x)dx \right| = 0$

2. $f(x) = 0$ **en** $[a, b]$

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2 **B.** 1 $\Rightarrow$ 2, pero 2 $\not\Rightarrow$ 1 **C.** 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2 **D.** 1 y 2 se excluyen entre sí.

La solución es C. Si $f(x) = 0$ en $[a, b]$, es $\int_a^{b} f(x)dx = 0$, por lo que 2 $\Rightarrow$ 1. Obviamente 1 $\not\Rightarrow$ 2, como lo justifica cualquier función cuya gráfica sea como la del ejercicio, es decir, simétrica respecto del punto medio del intervalo $[a, b]$.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para calcular $\int_0^{8} f(x)dx$ nos dan estos datos:**

1. $f(x)$ **es periódica de periodo 4.**

2. $f(x)$ **es una función par.**

3. $f(x) = x$ **para** $0 \leq x < 2$ **.**

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. No puede eliminarse ningún dato.

La solución es D. Los datos 1, 2 y 3 son los tres necesarios para saber cómo es la función en $[0,8]$. Así pues no puede eliminarse ningún dato.