7 Matrices

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Dadas las matrices *A* y B indica, si es posible.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{3} & -4 & \frac{3}{5}\\ 1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

a) Los elementos a_{34} y b_{14}

b) La dimensión de cada una de ellas

c) La matriz traspuesta de cada una de ellas

a) a_{34} no existe, ya que la matriz *A* solo tiene 2 columnas. $b_{14}=\frac{3}{5}$.

b) La matriz *A* tiene dimensión 3 x 2. La matriz *B* tiene dimensión 2 x 4.

c) $A^t=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ \frac{1}{3} & 0\\ -4 & -2\\ \frac{3}{5} & 1\end{pmatrix}$

4. Escribe la matriz de dimensión 2 x 4 en la que: $a_{ij}=(-1)^i(2i-j)$ para $1\le i\le 2, 1\le j\le 4$

$a_{11}=(-1)^1(2\cdot 1-1)=-1$ $\quad a_{12}=(-1)^1(2\cdot 1-2)=0$ $\quad a_{13}=(-1)^1(2\cdot 1-3)=1$ $\quad a_{14}=(-1)^1(2\cdot 1-4)=2$

$a_{21}=(-1)^2(2\cdot 2-1)=3$ $\quad a_{22}=(-1)^2(2\cdot 2-2)=2$ $\quad a_{23}=(-1)^2(2\cdot 2-3)=1$ $\quad a_{24}=(-1)^2(2\cdot 2-4)=0$

La matriz es $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

5. Escribe:

a) Una matriz triangular inferior tal que los elementos de la diagonal secundaria sean nulos.

b) Una matriz simétrica.

c) Una matriz antisimétrica.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 5 & 0 & -4\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ -4 & 3 & 0\end{pmatrix}$

6. **Halla qué condición deben cumplir *i* y *j* para que $a_{ij} = 0$ si *A* es una matriz:**

a) Triangular superior

b) Triangular inferior

c) Diagonal

d) Simétrica

a) En una matriz triangular superior son nulos todos los elementos situados debajo de la diagonal principal, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

b) En una matriz triangular inferior son nulos todos los elementos situados encima de la diagonal principal, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

c) En una matriz diagonal son nulos todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

d) En una matriz simétrica no es necesario que ningún elemento sea nulo.

7 y 8. **Ejercicios resueltos.**

9. **Dadas las matrices *M*, *N* y *P*:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $M + N$

b) $\frac{2}{5}N$

c) $-M$

d) $\frac{1}{2}M - 3N$

e) $2M - 3P^t$

f) $3\left(N^t + P\right) - M^t$

a) $M + N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\frac{2}{5}N = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

c) $-M = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{2}M - 3N = \frac{1}{2}M - 3N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ -4 & -6 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

e) $2M - 3P^t = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 & -6 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -11 & 10 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

f) $3\left(N^t + P\right) - M^t = 3\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 6 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 7 & 9 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$

10. Halla una matriz X tal que $2A + X = 3B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A + X = 3B \Rightarrow X = 3B - 2A \Rightarrow X = 3\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Justifica las siguientes propiedades.

a) $0 \cdot A_{mxn} = O_{mxn}$ **b)** $\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot O_{mxn} = O_{mxn}$

a) $0 \cdot A_{mxn}$ es la matriz de dimensión m x n que se obtiene multiplicando cada elemento de A por 0, con lo que $0 \cdot A_{mxn}$ es la matriz nula de dimensión m x n como afirma la propiedad.

b) $\lambda \cdot O_{mxn}$ es la matriz de dimensión m x n que se obtiene multiplicando cada elemento de O_{mxn} por λ. Al ser todos los elementos de O_{mxn} nulos se obtiene la propiedad enunciada.

12. Demuestra la propiedad asociativa del producto de números reales por matrices.

Si $A_{mxn} = (a_{ij})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, el elemento ij de la matriz $\lambda(\mu A)$ es $\lambda(\mu a_{ij}) = \lambda\mu a_{ij} = (\lambda\mu)a_{ij}$, es decir, coincide con el elemento ij de la matriz $(\lambda\mu)A$, por lo que $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

13. Escribe la matriz $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz diagonal y otra matriz.

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Calcula *a*, *b* y *c* en la expresión:

$$3\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2c \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones en ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$3\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3b \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2c \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4a & 8c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 4a-5 & 3c \end{pmatrix}$$

Igualando elemento a elemento obtenemos:

$$\begin{cases} 3 = 4a - 5 \\ 3b = -9 \\ -3 = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

15. Escribe la matriz A como combinación lineal de B_1, B_2 y B_3, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2B_1 + B_2 + 3B_3$$

16. **Dadas las matrices** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{6}\end{pmatrix}$**, halla las matrices *X* e *Y* que verifican:**

$$\begin{cases}2X-Y=A\\ X+Y=B\end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $3X=A+B\Rightarrow X=\frac{1}{3}(A+B)\Rightarrow X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos: $X+Y=B\Rightarrow Y=B-X\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

17 a 19. Ejercicios resueltos.

20. **Realiza los productos de dos factores que se pueden hacer con las matrices:**

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{-2}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$MN=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -2 & -3 & 0 & -1\\ 4 & 6 & 0 & 2\\ -4 & -6 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$NM=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\end{pmatrix}$$

MP no se puede realizar.

$$PM=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$$

$$NP=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

PN no se puede realizar.

21. **Calcula el valor de *a* y *b* para que las matrices** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{a}\\ \mathbf{3} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ **conmuten.**

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 3 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & a+2b\\ 5 & 2a+b\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & a\\ 3 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 2+a\\ 3+2b & 6+b\end{pmatrix}$$

$$AB=BA\Rightarrow\begin{pmatrix}7 & a+2b\\ 5 & 2a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 2+a\\ 3+2b & 6+b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}7=1+2a\\ a+2b=2+a\\ 5=3+2b\\ 2a+b=6+b\end{cases}\Rightarrow a=3,\ b=1$$

22. **Calcula los valores de *x* e *y* para que se verifique la igualdad:**

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \boldsymbol{x} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \boldsymbol{y} & \mathbf{1}\end{pmatrix}=\mathbf{3}\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2+2y & 3\\ 2x-y & x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2+2y=6\\ 2x-y=6\Rightarrow x=4,\ y=2\\ x-1=3\end{cases}$$

23. **Calcula $2M + I - M^2$ donde $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.**

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, por tanto, $2M + I - M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

24. **Demuestra que $I_m \cdot A_{mxn} = A_{mxn}$ y $A_{mxn} \cdot I_n = A_{mxn}$**

Para demostrar que $I_m \cdot A_{mxn} = A_{mxn}$, supongamos que $I_m = (b_{ij})$ y $A_{mxn} = (a_{ij})$.

Observemos que $I_m \cdot A_{mxn}$ es una matriz de dimensión *m* x *n* cuyo elemento de la fila *i* y columna *j* viene dado por $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$ y, como $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$, tenemos $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} = b_{ii}a_{ij} = a_{ij}$, es decir, $I_m \cdot A_{mxn}$ coincide con A_{mxn}.

De manera completamente análoga se prueba que $A_{mxn} \cdot I_n = A_{mxn}$.

25. **Ejercicio interactivo.**

26 y 27. Ejercicios resueltos.

28. **Calcula el rango de las matrices:**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + 3F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 4F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 14 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(N) = 2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & -9 & -18 \\ 0 & -3 & -12 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \to 4F_3 - 9F_2 \\ F_4 \to 4F_4 - 3F_2}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 3F_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(P) = 3$$

29. **Escribe una matriz de dimensión 3 x 5 que tenga rango 2.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera y segunda fila son linealmente independientes, pero la tercera es combinación lineal de ellas, ya que la tercera fila es la suma de la primera y la segunda. Por tanto, el rango de *M* es 2.

30. **Estudia según los valores de *a* el rango de las matrices:**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \boldsymbol{a}+\mathbf{4}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & a\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2-3F_1\\ F_3\to F_3-2F_1}}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & a-3\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}\underset{F_3\leftrightarrow F_2}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 4 & a-3\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-F_2}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & a-2\end{pmatrix}$$

Así, si $a-2=0\Rightarrow a=2$ tendremos $\text{rg}(A)=2$ y si $a\neq 2$ tendremos $\text{rg}(A)=3$.

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & a+4\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2-3F_1\\ F_3\to F_3+F_1\\ F_4\to F_4-2F_1}}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & a+2\end{pmatrix}\underset{F_3\leftrightarrow F_4}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & -1 & a+2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\underset{F_3\to 4F_3+F_2}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 4a+5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Así, si $4a+5=0\Rightarrow a=-\dfrac{5}{4}$ tendremos $\text{rg}(B)=2$ y si $a\neq-\dfrac{5}{4}$ tendremos $\text{rg}(B)=3$.

31. **Encuentra una matriz de orden 5 y rango 2.**

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

La primera y segunda fila son linealmente independientes, la tercera coincide con la primera, la cuarta es el doble que la segunda y la quinta es la suma de la primera y la segunda. Por tanto, el rango de *M* es 2.

32. **Ejercicio resuelto.**

33. **Comprueba si las matrices *M* y *N* son una la inversa de la otra:**

a) $M=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

b) $M=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

a) $MN=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $NM=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, por lo que *M* y *N* son inversas.

b) $MN=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, por lo que *M* y *N* no son inversas.

34. **Calcula el valor que debe tener el parámetro *m* para que las matrices *A* y *B* sean una la inversa de la otra:**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{m}+\mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{m} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & m & m+1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m & m & -3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m^2-m-2 & m^2-m-1 & -m+2\\ m-2 & m-2 & 1\end{pmatrix}$$

Para que *A* y *B* sean inversas, *AB* debe ser la identidad, por tanto, obtenemos que $m=2$.

35. Calcula A^{-1} utilizando la definición de matriz inversa, siendo $A=\begin{pmatrix}11 & 7\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Si $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tenemos:

$$AA^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}11 & 7\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}11a+7c=1\\ 3a+2c=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}11b+7d=0\\ 3b+2d=1\end{cases}\Rightarrow a=2,\ b=-7,\ c=-3,\ d=11$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -3 & 11\end{pmatrix}$.

36. Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 5 & 6 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to F_2-5F_1}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\to F_1-F_2}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 6 & -1\\ 0 & 1 & -5 & 1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to 5F_2-3F_1}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -3 & 5\end{array}\right)\underset{F_1\to 4F_1+3F_2}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}20 & 0 & -5 & 15\\ 0 & -4 & -3 & 5\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to\frac{1}{20}F_1\\ F_2\to-\frac{1}{4}F_2}}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4}\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\leftrightarrow F_2}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to\frac{1}{2}F_1\\ F_2\to\frac{1}{2}F_2}}{\to}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0\end{array}\right)\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

37. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_3\to F_3-2F_1}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-F_3\\ F_2\to F_2-5F_3}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 10 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 10 & 1 & -5\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to 2F_2-3F_1\\ F_3\to 2F_3-F_1}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-F_2\\ F_3\to F_3-F_2}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 2 & 4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 2\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-F_3\\ F_2\to 2F_2+F_3}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0 & -4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 2\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1\to\frac{1}{2}F_1\\ F_2\to\frac{1}{2}F_2\\ F_3\to\frac{1}{2}F_3}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow N^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to 4F_2+F_1\\ F_3\to 4F_3-3F_1}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 4\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to 3F_1+F_2\\ F_3\to 3F_3+F_2}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}12 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 12\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-F_3\\ F_2\to 4F_2-F_3}}{\to}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}12 & 0 & 0 & 12 & 0 & -12\\ 0 & 12 & 0 & 12 & 12 & -12\\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 12\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to\frac{1}{12}F_1\\ F_2\to\frac{1}{12}F_2\\ F_3\to\frac{1}{4}F_3}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3\end{array}\right)\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

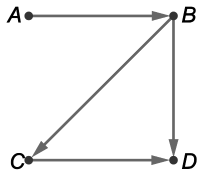
38. Si $A^3 = I$ demuestra que *A* es invertible y calcula, en función de *A*, su inversa.

Como $A^3 = A \cdot A \cdot A = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A)$ por la propiedad asociativa, entonces $A^3 = A^2 \cdot A$, es decir, $I = A^2 \cdot A = A \cdot A^2$, lo que implica que $A^{-1} = A^2$.

39. Ejercicio interactivo.

40. Ejercicio resuelto.

41. El grafo siguiente recoge las relaciones de influencia en un grupo de cuatro personas:



a) Halla la matriz *G* asociada al grafo.

b) Calcula $G + G^2$ e interpreta el resultado.

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $G + G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Los elementos de esta matriz indican el número de posibles relaciones de influencia entre las cuatro personas con un máximo de un intermediario.

Por ejemplo, el elemento de la segunda fila y cuarta columna nos indica que *B* puede influir sobre *D* de dos modos distintos, bien directamente, bien a través de un intermediario. De hecho, uno de estos modos es la influencia directa que muestra el grafo y el otro es la influencia a través de *C*.

42. Al punto *M*(–1, 2) se le aplica un giro de amplitud 120º y centro el origen y una simetría de eje la recta $y = x$. Halla las coordenadas de su trasformado.

La aplicación del giro y la simetría trasforman el punto *M*(–1, 2) en el punto

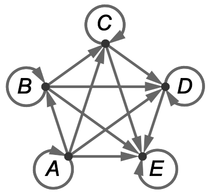
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 120º & \operatorname{sen} 120º \\ -\operatorname{sen} 120º & \cos 120º \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

43. **Traza un grafo dirigido para el que la matriz de adyacencia sea una matriz triangular superior de dimensión 5 x 5 cuyos elementos distintos de 0 son $a_{ij} = 1$.**

La matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y un posible grafo es:



44 a 53. **Ejercicios resueltos.**

EJERCICIOS

Matrices

54. **En la matriz:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué valor tiene el elemento de la segunda fila y tercera columna?

b) Escribe los elementos nulos con la notación a_{ij}.

a) $a_{23} = 0$

b) $a_{14} = 0$, $a_{23} = 0$ y $a_{32} = 0$

55. **En cada caso, escribe una matriz que cumpla las siguientes condiciones:**

a) Que su traspuesta sea una matriz columna.

b) Que sea triangular superior de orden 2.

c) Que sea simétrica de orden 3, tenga tres elementos iguales a 0 y el resto sean iguales a 1.

d) Que sea antisimétrica de orden 2 y uno de sus elementos sea igual a 1.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

56. **Identifica con expresiones de la forma a_{ij} los elementos de la matriz:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = -3,\ a_{22} = 2$ y $a_{23} = -1$

57. **Halla *a*, *b*, *c* y *d* para que las matrices siguientes sean iguales:**

$$\begin{pmatrix} 3a-b+2 & c+d+6 \\ 1-c-d & 2a+b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b-a & -3c+3d \\ 2c-8d & 10a-2b+1 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes de cada matriz tenemos:

$$\begin{cases} 3a-b+2 = b-a \\ 2a+b = 10a-2b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-2b = -2 \\ -8a+3b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = 3$$

$$\begin{cases} c+d+6 = -3c+3d \\ 1-c-d = 2c-8d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c-2d = -6 \\ -3c+7d = -1 \end{cases} \Rightarrow c = -2,\ d = -1$$

58. **Escribe la matriz cuadrada de orden 3 cuyos elementos son:**

$$a_{ij} = \begin{cases} 2j-i & \text{si } i \le j \\ (-1)^{i+j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

59. **Escribe la matriz de dimensión 3 x 4 cuyos elementos son:**

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i-j & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i = j \\ j-2i & \text{si } i > j \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

60. **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula, cuando sea posible:

a) $A+B$

b) $B-A$

c) $B+C^t$

d) $2A+3B$

e) $B+C$

f) $3A+2C^t$

a) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

b) $B-A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $B+C^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $2A+3B = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 17 & 14 & -10 \end{pmatrix}$

e) No se puede realizar.

f) $3A+2C^t = \begin{pmatrix} 12 & 9 & -5 \\ 1 & 16 & -4 \end{pmatrix}$

61. **Descompón la matriz** $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **en suma de la matriz identidad, una matriz simétrica y otra triangular superior.**

Una posible solución es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones son de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 1 & 3 \\ 1 & x & -2 \\ 3 & -2 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z & 1 & 2 \\ 0 & 3-x & 1 \\ 0 & 0 & 2-y \end{pmatrix}, \text{ con } x, y, z \in \mathbb{R}$$

62. **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 12 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ **, Halla tres matrices** A_1**,** A_2**, y** A_3 **tales que:**

a) $3A_1 = A$ **b)** $2A_2 = A$ **c)** $\frac{1}{2}A_3 = A$

a) $3A_1 = A \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $2A_2 = A \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ -3 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}A_3 = A \Rightarrow A_3 = 2A = \begin{pmatrix} 12 & -36 & 24 \\ -12 & 6 & 18 \end{pmatrix}$

63. **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) AC **c)** $AC - I_2$ **e)** $(BC)^2$

b) CB **d)** CA **f)** B^tA

a) $AC = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

d) $CA = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \\ 11 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

b) $CB = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ -3 & -3 & -4 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$

e) $(BC)^2 = \begin{pmatrix} 11 & -13 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -13 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 & -130 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $AC - I_2 = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

f) $B^tA = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 7 & -5 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

64. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{4} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Calcula:

a) ACB **b)** $B^tC^tA^t$ **c)** $(BC)^2A$

a) $AC=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 10\end{pmatrix}\Rightarrow ACB=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 17 & 6\\ 25 & 37 & 6\end{pmatrix}$

b) $B^tC^tA^t=(ACB)^t=\begin{pmatrix}5 & 25\\ 17 & 37\\ 6 & 6\end{pmatrix}$

c) $(BC)^2=\begin{pmatrix}-1 & 17\\ 13 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 17\\ 13 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}222 & -102\\ -78 & 246\end{pmatrix}\Rightarrow (BC)^2A=\begin{pmatrix}138 & -852 & 324\\ 582 & 1140 & -324\end{pmatrix}$

65. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{-2}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

Calcula:

a) AB **b)** BA **c)** $(A^t+B)A$

a) $AB=(-5)$

b) $BA=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 6 & -3 & 9 & 3\\ -4 & 2 & -6 & -2\\ 4 & -2 & 6 & 2\end{pmatrix}$

c) $(A^t+B)A=\begin{pmatrix}6 & -3 & 9 & 3\\ 4 & -2 & 6 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 6 & -3 & 9 & 3\end{pmatrix}$

66. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $C(A+B)=CA+CB$.

b) Comprueba que $(A+B)C^t=AC^t+BC^t$.

a) $C(A+B)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 15\\ -4 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $CA+CB=\begin{pmatrix}1 & 10\\ -4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 0 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 15\\ -4 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

b) $(A+B)C^t=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ -3 & 6 & -5\end{pmatrix}$ y $AC^t+BC^t=\begin{pmatrix}6 & 6 & -2\\ -5 & 2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ -3 & 6 & -5\end{pmatrix}$

67. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$, comprueba que se cumple la igualdad $\left(A^2-5I\right)^2=16I$.

$$A^2-5I=\begin{pmatrix}5&0&4\\0&1&0\\4&0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-4&0\\4&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A^2-5I\right)^2=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-4&0\\4&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-4&0\\4&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&16\end{pmatrix}=16I$$

68. Calcula $A^{102}-A^{100}$ siendo A la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

Calculemos las primeras potencias de A para poder formular una hipótesis sobre el valor de A^n :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix},\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix},\ A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix},\ \ldots,\ A^n=\begin{pmatrix}1&0\\2n&1\end{pmatrix}$$

Demostremos nuestra hipótesis por el método de inducción:

Primero comprobemos que la hipótesis es cierta si $n=1$, lo que es inmediato, ya que A coincide con la expresión de A^n si $n=1$.

Comprobemos ahora que la hipótesis es cierta para $n+1$ suponiendo que lo es para n:

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}1&0\\2n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2n+2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2(n+1)&1\end{pmatrix}$$

Demostrada nuestra hipótesis, tenemos $A^{102}-A^{100}=\begin{pmatrix}1&0\\204&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\200&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\4&0\end{pmatrix}$.

69. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ halla una expresión que permita calcular A^n para cualquier n.

Calculemos las primeras potencias de A para poder formular una hipótesis sobre el valor de A^n :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix},\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix},\ A^4=A^3A=\begin{pmatrix}27&27&27\\27&27&27\\27&27&27\end{pmatrix},\ \ldots,\ A^n=\begin{pmatrix}3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\end{pmatrix}$$

Demostremos nuestra hipótesis por el método de inducción:

Primero comprobemos que la hipótesis es cierta si $n=1$, lo que es inmediato, ya que A coincide con la expresión de A^n si $n=1$.

Comprobemos ahora que la hipótesis es cierta para $n+1$ suponiendo que lo es para n:

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}\\3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}\\3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n&3^n&3^n\\3^n&3^n&3^n\\3^n&3^n&3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}\\3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}\\3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}\end{pmatrix}$$

70. Calcula A^n para cualquier n, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculemos las primeras potencias de A para poder formular una hipótesis sobre el valor de A^n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix},\ A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 \\ 27 & 27 & 27 \\ 36 & 36 & 36 \end{pmatrix}, \ldots$$

Nuestra hipótesis es que $A^n = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{n-2} & 2\cdot 3^{n-2} & 2\cdot 3^{n-2} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 4\cdot 3^{n-2} & 4\cdot 3^{n-2} & 4\cdot 3^{n-2} \end{pmatrix}$ si $n \geq 2$.

Demostremos nuestra hipótesis por el método de inducción:

Primero comprobemos que la hipótesis es cierta si $n = 2$, lo que es inmediato, ya que A^2 coincide con la expresión de A^n si $n = 2$.

Comprobemos ahora que la hipótesis es cierta para $n+1$ suponiendo que lo es para $n \geq 2$:

$$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{n-2} & 2\cdot 3^{n-2} & 2\cdot 3^{n-2} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 4\cdot 3^{n-2} & 4\cdot 3^{n-2} & 4\cdot 3^{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2\cdot 3^{n-2} & 3\cdot 2\cdot 3^{n-2} & 3\cdot 2\cdot 3^{n-2} \\ 3\cdot 3^{n-1} & 3\cdot 3^{n-1} & 3\cdot 3^{n-1} \\ 3\cdot 4\cdot 3^{n-2} & 3\cdot 4\cdot 3^{n-2} & 3\cdot 4\cdot 3^{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{n-1} & 2\cdot 3^{n-1} & 2\cdot 3^{n-1} \\ 3^{n} & 3^{n} & 3^{n} \\ 4\cdot 3^{n-1} & 4\cdot 3^{n-1} & 4\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{(n+1)-2} & 2\cdot 3^{(n+1)-2} & 2\cdot 3^{(n+1)-2} \\ 3^{(n+1)-1} & 3^{(n+1)-1} & 3^{(n+1)-1} \\ 4\cdot 3^{(n+1)-2} & 4\cdot 3^{(n+1)-2} & 4\cdot 3^{(n+1)-2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si $n = 1$ y $A^n = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{n-2} & 2\cdot 3^{n-2} & 2\cdot 3^{n-2} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 4\cdot 3^{n-2} & 4\cdot 3^{n-2} & 4\cdot 3^{n-2} \end{pmatrix}$ si $n \geq 2$.

71. Halla C^{200} siendo C la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observemos que $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$, por tanto, tenemos que:

$$C^{200} = C^{198}C^2 = \left(C^3\right)^{66} C^2 = \left(2I\right)^{66} C^2 = 2^{66}IC^2 = 2^{66}C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{67} \\ 2^{67} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{66} & 0 \end{pmatrix}$$

72. Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, determinando α y β.

$$A^2 + \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2\alpha+\beta & 4+\alpha \\ 4+\alpha & 5+2\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Si queremos que esta matriz sea la matriz nula, tendremos: $\begin{cases} 5+2\alpha+\beta = 0 \\ 4+\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -4, \beta = 3$

Por tanto, A verifica la ecuación $A^2 - 4A + 3I = 0$.

Ecuaciones y sistemas de matrices

73. Halla todas las matrices *X* que satisfacen la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, si A tiene inversa tendremos $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

Intentemos calcular por tanto la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to 2F_2 + F_1}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

74. Halla qué valor debe tomar *a* en la matriz $\begin{pmatrix} -a & -2 \\ 13 & a \end{pmatrix}$ para que su inversa coincida con su opuesta.

Sea $A = \begin{pmatrix} -a & -2 \\ 13 & a \end{pmatrix}$, queremos que $A \cdot (-A) = I$, es decir, que $-A^2 = I$, por tanto:

$$-A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 - a^2 & 0 \\ 0 & 26 - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 26 - a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5$$

75. Halla una matriz columna *B* tal que $AB = 3B + C$ siendo *A* y *C* las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Observemos que $AB = 3B + C \Rightarrow AB - 3B = C \Rightarrow (A - 3I)B = C$, por tanto, si $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, tendremos $B = (A - 3I)^{-1}C$.

Intentemos calcular la inversa de $A - 3I$ por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to 5F_1 + 3F_2}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} -10 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to -\frac{1}{10}F_1 \\ F_2 \to -\frac{1}{5}F_2}}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Así, $B = (A - 3I)^{-1}C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

También podríamos haber resuelto el ejercicio observando que B tiene dimensión 2 x 1 y haciendo $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, obteniendo:

$$AB = 3B + C \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 3b \\ -2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2 \\ 3b - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 3a + 2 \\ -2a + b = 3b - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 3b = 2 \\ -2a - 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5},\ b = \frac{4}{5} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

76. Halla todas las matrices *A*, de dimensión 2 x 2, que cumplen $A^2 = O$, $(1 \quad 1) \cdot A = O$ donde *O* denota la matriz nula de dimensión 2 x 2.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, de la segunda condición concluimos que:

$$(1 \quad 1) \cdot A = O \Rightarrow (a+c \quad b+d) = (0 \quad 0) \Rightarrow c = -a,\ d = -b \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

De la primera condición concluimos que:

$$A^2 = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - ab & -b^2 + ab \\ -a^2 + ab & b^2 - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab = 0 \\ b^2 - ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a-b) = 0 \\ b(b-a) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$$

Obtenemos, por tanto, que las matrices que verifican las condiciones son de la forma $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$ para algún número real *a*.

77. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Halla las matrices *X* e *Y* de dimensiones 2 x 3 tales que verifican el sistema matricial: $\begin{cases} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restándole la segunda obtenemos:

$$2X = 2A - B \Rightarrow X = \frac{1}{2}(2A - B) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos:

$$Y = A - 3X \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

78. Halla la matriz *X* que verifica la ecuación $AX + I = B - X$ donde *I* es la matriz identidad y *A* y *B* son las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observemos que $AX + I = B - X \Rightarrow AX + X = B - I \Rightarrow (A+I)X = B - I$, por tanto, si $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ tiene inversa tendremos $X = (A+I)^{-1}(B-I)$.

Intentemos calcular la inversa de $A + I$ por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 + 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to -F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, $X = (A+I)^{-1}(B-I) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

79. **Encuentra las matrices *A* y *B* que cumplen las siguientes ecuaciones:**

$$\mathbf{8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 5 y restándole la primera obtenemos:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -22 & 0 \\ 12 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ 10 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

80. **Considera las matrices siguientes:**

$$\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}$$

Determina dos matrices *M* y *N* tales que:

$$\mathbf{\begin{cases} AM + BN = C \\ AM = N \end{cases}}$$

Sustituimos $AM = N$ en la primera ecuación para obtener: $N + BN = C \Rightarrow (I + B)N = C$

Por tanto, si $I + B$ y A tienen inversas obtendremos $N = (I + B)^{-1}C$ y $M = A^{-1}N$.

Intentemos calcular las inversas de $I + B$ y A por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to 2F_2 + F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to 2F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 \to \frac{1}{4}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{4}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow (I + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 + 2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to 9F_1 - 4F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 9 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 \to \frac{1}{9}F_1 \\ F_2 \to -\frac{1}{9}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Así, $N = (I + B)^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $M = A^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Rango

81. Las tres matrices fila F_1, F_2 y F_3 son independientes:

$$F_1 = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 4) \qquad F_2 = (-2 \quad 3 \quad 1 \quad 2) \qquad F_3 = (0 \quad 1 \quad 1 \quad 2)$$

a) Escribe tres matrices de dimensión 3 x 4 en las que la primera fila sea F_1 y cuyos rangos sean, respectivamente, 1, 2 y 3.

b) Escribe una matriz de dimensión 4 x 3 cuyo rango sea 3.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

82. Halla el rango de las siguientes matrices observando la relación entre sus filas o entre sus columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En la matriz *A* tenemos $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = F_1$, por lo que su rango es 1.

En la matriz *B* tenemos $C_3 = C_2 - C_1$ y C_1, C_2 son linealmente independientes, por lo que su rango es 2.

83. Determinar, sin utilizar el método de Gauss, el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En la matriz *A* tenemos $F_2 = F_1 + F_3$, $F_4 = F_1 - F_3$ y F_1, F_3 son linealmente independientes, por lo que $\text{rg}(A) = 2$.

En la matriz *B* las filas son linealmente independientes, por lo que $\text{rg}(B) = 4$.

84. Calcula el rango de las siguientes matrices, utilizando el método de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 11 \\ -4 & -6 & 10 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ 2 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - 5F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -14 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 7 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to 3F_3 - F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 7 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 11 \\ -4 & -6 & 10 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 4F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ 2 & 10 & 7 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to 3F_2 - F_1 \\ F_3 \to 3F_3 + F_1 \\ F_4 \to 3F_4 - 2F_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 23 \\ 0 & 10 & 23 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 + 7F_2 \\ F_4 \to F_4 + 10F_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to 3F_4 - F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(N) = 3$$

85. Obtén el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 6 & a\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 6 & a\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3-4F_1}}{\to}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 7 & -6 & -1\\ 0 & 7 & -6 & a\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-F_2}{\to}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 7 & -6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}$$

Para que el rango de *A* sea 2 la última fila debe ser nula, por tanto, $a=-1$.

86. Halla, según el valor de *a*, el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & a & 4\\ 1 & a & a^2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & a & 4\\ 1 & a & a^2\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3-F_1}}{\to}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & a-2 & 0\\ 0 & a-2 & a^2-4\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-F_2}{\to}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & a-2 & 0\\ 0 & 0 & a^2-4\end{pmatrix}$$

Si $a^2-4\neq 0$, es decir, si $a\neq -2$ y $a\neq 2$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & a-2 & 0\\ 0 & 0 & a^2-4\end{pmatrix}=3$.

Si $a=-2$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$ y si $a=2$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1$.

87. Estudia el rango de la matriz según los valores del parámetro *m*.

$$\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ m & 0 & m\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ m & 0 & m\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-F_1}{\to}\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & m-1\end{pmatrix}$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq 0$ tenemos $\text{rg}(M)=\text{rg}\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & m-1\end{pmatrix}=3$.

Si $m=1$ tenemos $\text{rg}(M)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$.

Si $m=0$ tenemos $\text{rg}(M)=\text{rg}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$.

Matriz inversa

88. Determina cuál de las siguientes matrices es inversa de otra:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\5&4\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&-5\\-1&1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-4&1\\5&-1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1&-5\\-1&-4\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&-4\\16&-21\end{pmatrix}\qquad AD=\begin{pmatrix}-2&-9\\-9&-41\end{pmatrix}\qquad BD=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad BC=\begin{pmatrix}-41&9\\9&-2\end{pmatrix}\qquad CD=\begin{pmatrix}3&16\\-4&-21\end{pmatrix}$$

Por tanto, A y C son inversas, al igual que B y D.

89. Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices utilizando la definición.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}11&8\\4&3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Si $F^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tenemos:

$$FF^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}11&8\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}11a+8c=1\\4a+3c=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}11b+8d=0\\4b+3d=1\end{cases}\Rightarrow a=3,\ b=-8,\ c=-4,\ d=11$$

Por tanto, $F^{-1}=\begin{pmatrix}3&-8\\-4&11\end{pmatrix}$

Si $G^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tenemos:

$$GG^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+3c=1\\a+3c=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}2b+3d=0\\b+3d=1\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=-1,\ c=-\frac{1}{3},\ d=\frac{2}{3}$$

Por tanto, $G^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Si $H^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ tenemos:

$$HH^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a_{11}+a_{31}=1\\a_{21}=0\\a_{11}+a_{31}=0\end{cases},\begin{cases}2a_{12}+a_{32}=0\\a_{22}=1\\a_{12}+a_{32}=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}2a_{13}+a_{13}=0\\a_{23}=0\\a_{13}+a_{33}=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}a_{11}=1,\ a_{21}=0,\ a_{31}=-1\\a_{12}=0,\ a_{22}=1,\ a_{32}=0\\a_{13}=-1,\ a_{23}=0,\ a_{33}=2\end{matrix}$$

Por tanto, $H^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$

90. **Calcula, si es posible, la matriz inversa de cada una de las matrices por el método de Gauss-Jordan:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{7}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 7 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to 2F_2-F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 7 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\underset{F_1\to F_1-7F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 8 & -14\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\underset{F_1\to\frac{1}{2}F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & -7\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to F_2+F_1\\ F_3\to F_3+2F_1}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-F_2\\ F_3\to F_3-F_2}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\to -F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3+3F_1}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & 4 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to 3F_1+2F_2\\ F_3\to F_3+2F_2}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow C \text{ no tiene inversa.}$$

91. **Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3+F_1}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1+2F_2\\ F_3\to F_3+2F_2}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F_1\to F_1-2F_3\\ F_3\to F_2-F_3}}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to -F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

92. **Calcula el valor de *k* para que *B* sea la matriz inversa de *A*, siendo:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}$$

$$AB=I\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -4-k\\ 0 & 1 & 4+k\\ 0 & 0 & -3-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow k=-4$$

93. **Determina razonadamente para qué valores de *k* tienen inversa cada una de las siguientes matrices:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Recordemos que una matriz cuadrada de orden n tiene inversa si y solo si su rango es n.

Puesto que $\text{rg}(M)=2$ para cualquier valor de k y $\text{rg}(N)=3\Leftrightarrow k\neq 1$, concluimos que M no tiene inversa para ningún valor de k y N tiene inversa si $k\neq 1$.

94. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&0\\0&1&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}3&x&y\\-2&1&-2\\2&x&y\end{pmatrix}$$

estudia si existen números reales *x* e *y* tales que la matriz *B* es la inversa de la matriz *A*.

Para que B sea la inversa de A debe ser $AB=I$, es decir:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2x+3&2y-6\\0&x+1&y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+3=1\\x+1=0\\2y-6=0\\y-2=0\end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones concluimos que $x=-1$, pero las dos últimas son contradictorias, por lo que no existen valores para x e y que hagan que B sea la inversa de A.

95. Estudia para qué valores de *m* la matriz siguiente tiene inversa y, si es posible, halla su inversa para $m=-1$.

$$\begin{pmatrix}m&0&1\\0&1&1\\m&0&m\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}m&0&1\\0&1&1\\m&0&m\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}m&0&1\\0&1&1\\0&0&m-1\end{pmatrix}$$

M tendrá inversa si $\text{rg}(M)=\text{rg}\begin{pmatrix}m&0&1\\0&1&1\\0&0&m-1\end{pmatrix}=3$, es decir, si $m\neq 1$ y $m\neq 0$.

Si $m=-1$, $M=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ tiene inversa, que calculamos con el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\-1&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to 2F_1+F_3\\F_2\to 2F_2+F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&0&1&0&1\\0&2&0&-1&2&1\\0&0&-2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to -\frac{1}{2}F_1\\F_2\to \frac{1}{2}F_2\\F_3\to -\frac{1}{2}F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Síntesis

96. **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **se pide:**

a) Comprueba que se verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Justifica que A tiene inversa y obtén A^{-1}.

c) Calcula A^{100}.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$,

por lo que $A^3 + I = O$.

b) La inversa de A es $A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, ya que $AA^{-1} = A\left(-A^2\right) = -A^3 = I$.

c) $A^{100} = \left(A^3\right)^{33} \cdot A = \left(-I\right)^{33} \cdot A = -I^{33}A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

97. **Dada la matriz *A* prueba que la matriz inversa de A es** $A^{-1} = -A^2 + A + 2I$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Basta comprobar que $AA^{-1} = I$, es decir, que $-A^3 + A^2 + 2A = I$, y, en efecto, tenemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

con lo que $-A^3 + A^2 + 2A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

98. **Encuentra dos matrices, *A*, *B,* cuadradas de orden 2 que sean solución del sistema matricial:**

$$\begin{cases} 2A + B = C^2 \\ A - B = C^{-1} \end{cases} \text{ siendo } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos $3A = C^2 + C^{-1} \Rightarrow A = \frac{1}{3}\left(C^2 + C^{-1}\right)$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $B = A - C^{-1}$. Calculamos C^{-1} por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 + 3F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to -F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos:

$$A = \frac{1}{3}\left(C^2 + C^{-1}\right) = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 7 \\ \frac{14}{3} & 10 \end{pmatrix} \text{ y } B = A - C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 7 \\ \frac{14}{3} & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} & 4 \\ \frac{8}{3} & 11 \end{pmatrix}.$$

99. **Determina *a*, *b* y *c* para que la matriz:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

verifique que su traspuesta A^t coincide con su inversa A^{-1}. Calcula en todos esos casos la matriz A^4.

Queremos que $AA^t = I$, es decir, que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & \frac{b+c}{\sqrt{2}} \\ a & \frac{b+c}{\sqrt{2}} & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ 2b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,\ b = \frac{1}{\sqrt{2}},\ c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = 0, b = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ c = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

En el primer caso, es decir, si $a = 0,\ b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, observemos que $A^{-1} = A^t = A$, con lo que $A^2 = I$ y, por tanto, $A^4 = A^2A^2 = I$.

En el segundo caso, es decir, si $a = 0,\ b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tenemos $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

100. **Obtén, para todo número natural, el valor de:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix},...$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ B^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},\ B^4 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix},...$$

Observando estas potencias podemos concluir que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$ y $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}$, con lo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

101. **Sea la matriz** $A=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$**:**

a) Comprueba que se verifica $A^3-I=O$, con I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Calcula A^{13}.

c) Basándote en los apartados anteriores, y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X+I=A$.

a) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$, por lo que $A^3-I=O$.

b) $A^{13}=\left(A^3\right)^4\cdot A=\left(I\right)^4\cdot A=I^4A=A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

c) $A^2X+I=A\Rightarrow A^3X+A=A^2\Rightarrow X+A=A^2\Rightarrow X=A^2-A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

102. **Sea la matriz** $B=\begin{pmatrix}\mathbf{1+m} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1-m}\end{pmatrix}$ **e I la matriz Identidad.**

a) Halla para qué valores de m se verifica que $B^2=2B+I$.

b) Calcula B^{-1} para los valores m hallados en el apartado anterior.

a) $B^2=\begin{pmatrix}(1+m)^2+1 & 2\\ 2 & (1-m)^2+1\end{pmatrix}$ y $2B+I=\begin{pmatrix}2(1+m)+1 & 2\\ 2 & 2(1-m)+1\end{pmatrix}$, por tanto,

$$B^2=2B+I\Rightarrow\begin{cases}(1+m)^2+1=2(1+m)+1\\ (1-m)^2+1=2(1-m)+1\end{cases}\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm1$$

b) Observemos que $B^2=2B+I\Leftrightarrow B^2-2B=I\Leftrightarrow B(B-2I)=I$, por lo que, si $m=\pm1$ tenemos $B^{-1}=B-2I$.

Es decir, si $m=-1$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; y si $m=1$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

CUESTIONES

103. Sea *A* una matriz *m* x *n*.

a) ¿Existe una matriz *B* tal que *BA* sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz *B* tal que *AB* sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

c) Si *AB* es una matriz cuadrada, ¿qué orden tiene B^tA^t ?

a) *BA* será una matriz fila de dimensión 1 x *n* si *B* es una matriz fila de dimensión 1 x *m*.

b) *AB* será una matriz fila solo si $m = 1$ y *B* tiene dimensión *n* x *k*, en cuyo caso *AB* tendrá dimensión 1 x *k*.

c) Si *AB* es una matriz cuadrada, su orden será *m* y *B* tendrá dimensión *n* x *m*. Por tanto A^t tendrá dimensión *n* x *m* y B^t tendrá dimensión *m* x *n*, con lo que B^tA^t tendrá orden *m*. También podríamos observar que $B^tA^t = (AB)^t$ tendrá el mismo orden que *AB*, es decir, orden *m*.

104. *A* es una matriz de dimensión 3 x 4 cuyo rango es 3. Determina qué variaciones puede haber en su rango cuando:

a) Se añade una fila.

b) Se añade una columna.

c) Se elimina una fila.

d) Se elimina una columna.

Observemos que las tres filas de *A* son linealmente independientes y hay tres columnas linealmente independientes.

a) Si la fila que se añade es lineal independiente de las tres filas originales de *A*, el rango de la nueva matriz será 4, si es linealmente dependiente, el rango seguirá siendo 3.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y añadimos la fila $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la nueva matriz tendrá rango 4, pero si añadimos la fila $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tendrá rango 3.

b) Las tres filas de la nueva matriz seguirán siendo linealmente independientes, por lo que el rango de la nueva matriz seguirá siendo 3.

c) Las dos filas no eliminadas serán linealmente independientes, por lo que el rango de la nueva matriz será 2.

d) El rango de la nueva matriz puede seguir siendo 3 o puede ser 2.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y eliminamos una de las tres primeras columnas el rango de la nueva matriz es 2, si eliminamos la cuarta columna el rango será 3.

105. Sean *A*, *B* y *C* tres matrices tales que el producto *ABC* es una matriz 3x2 y el producto AC^t es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de *C*. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de *A*, *B* y *C*.

Sean m_1 x n_1, m_2 x n_2 y m_3 x n_3 las dimensiones respectivas de *A*, *B* y *C*.

Para poder calcular *ABC* debe ser $n_1 = m_2$ y $n_2 = m_3$; además, para que *ABC* tenga dimensión 3 x 2 debe ser $m_1 = 3$ y $n_3 = 2$.

Por otro lado, para poder calcular AC^t debe ser $n_1 = n_3$; además, para que AC^t sea cuadrada debe ser $m_1 = m_3$.

Por tanto, obtenemos $n_1 = n_3 = m_2 = 2$ y $m_1 = m_3 = n_2 = 3$, es decir, *A* tiene dimensión 3 x 2, *B* tiene dimensión 2 x 3 y *C* tiene dimensión 3 x 2.

106. Si *A* y *B* son dos matrices cuadradas de orden *n* demuestra que:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$$

Observemos que $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2$, por tanto,

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \Leftrightarrow \cancel{A^2} - AB - BA + \cancel{B^2} = \cancel{A^2} - 2AB + \cancel{B^2} \Leftrightarrow -AB - BA = -2AB \Leftrightarrow 2AB - AB = BA \Leftrightarrow AB = BA$$

107. La matriz *A* es de dimensión *m* x *n* y la matriz *B* de dimensión *p* x *q*. Determina, en cada caso, qué relación debe haber entre *m*, *n*, *p* y *q* para que:

a) Exista $(AB)^{-1}$.

b) Se pueda calcular $A^2 - B^2$.

c) Se pueda calcular $AB^t - A$.

a) Para que exista $(AB)^{-1}$ debe existir en primer lugar *AB* y debe ser una matriz cuadrada, es decir, debe ser $n = p$ y $m = q$.

b) Para que se puedan calcular A^2 y B^2, *A* y *B* deben ser matrices cuadradas. Además, deben ser del mismo orden para poder calcular $A^2 - B^2$. Por tanto, la condición buscada es $m = n = p = q$.

c) Para que se pueda calcular AB^t debe ser $n = q$. Además, para poder calcular $AB^t - A$ la dimensión de AB^t, *m* x *p*, debe coincidir con la de *A*, es decir, $n = p$. Por tanto, la condición buscada es $n = p = q$.

108. Estudia cómo varía el producto de dos matrices *A* y *B* si se hacen en ellas los siguientes cambios:

a) Se cambian de orden las filas *i* y *k* de la matriz *A*.

b) Se cambian de orden las columnas *j* y *k* de la matriz *B*.

c) Se multiplica por 2 la fila *i* de la matriz *A*.

d) Se suma a la fila *i* de *A* la fila *k* multiplicada por 2.

a) Las filas *i* y *k* del producto cambian de orden.

b) Las columnas *j* y *k* del producto cambian de orden.

c) La fila *i* del producto queda multiplicada por 2.

d) La nueva fila *i* del producto es la suma de la antigua fila *i* con la fila *k* multiplicada por 2.

109. Se considera la matriz *A*, cuadrada de orden 3, de modo que $\text{rg}(A) = 2$. Determina, si es posible, el efecto que tienen sobre el rango cada una de las siguientes acciones o pon ejemplos en caso contrario.

a) Multiplicar *A* por 2.

b) Sumarle la matriz identidad.

c) Añadir una fila de unos.

a) El rango de la nueva matriz seguiría siendo 2.

b) Es imposible saber que efecto tiene esta acción sobre el rango, podría tomar cualquier valor entre 1 y 3.

La única posibilidad que podemos descartar es que la nueva matriz tenga rango 0, ya que en este caso debería ser $A + I = O$, es decir, la matriz *A* debería ser –*I*, que no tiene rango 2.

Por ejemplo, las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tienen rango 2, pero al sumarles la identidad tienen, respectivamente, rango 1, 2 y 3.

c) El rango de la nueva matriz podría ser 2 o 3, pero nunca menor que 2, ya que en *A* hay dos filas linealmente independientes que seguirán siéndolo en la nueva matriz.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, al añadir una fila de unos el rango de la nueva matriz seguiría siendo 2; pero si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, al añadir una fila de unos el rango de la nueva matriz sería 3.

110. **Sea A una matriz cuadrada de orden n de modo que $A^2 = O$, siendo O la matriz nula (la formada completamente por ceros).**

a) Comprueba que $(A+I_n)^2 = 2A + I_n$.

b) Comprueba que las matrices $B = I_n - A$ y $C = A + I_n$ son una inversa de la otra.

a) $(A+I_n)^2 = (A+I_n)(A+I_n) = A^2 + AI_n + I_nA + I_n^2 = O + A + A + I_n = 2A + I_n$

b) $BC = (I_n - A)(A+I_n) = I_nA + I_n^2 - A^2 - AI_n = A + I_n - O - A = I_n \Rightarrow B$ y C son inversas.

111. **Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que la matriz A es invertible.**

$A^2 = A + I \Rightarrow A^2 - A = I \Rightarrow A(A - I) = I \Rightarrow A$ es invertible y $A^{-1} = A - I$.

112. **a)** Determina qué condición debe cumplir una matriz diagonal para ser invertible.

b) Halla la inversa de cualquier matriz diagonal de orden 3 que cumpla la condición del apartado anterior.

a) La condición es que ningún elemento de la diagonal principal sea nulo.

b) Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal de orden 3 con a, b y c distintos de 0, su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}.$$

113. **a)** Si A es una matriz no singular y $(B - C)A = O$, la matriz nula, comprueba que $B = C$.

b) Según el resultado del apartado anterior, cuando $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ la única matriz X que verifica la ecuación $XA = O$ es la matriz nula. ¿Es cierta esta afirmación?

a) Como A tiene inversa, tenemos $(B - C)A = O \Rightarrow B - C = OA^{-1} = O \Rightarrow B = C$.

b) $X = O$ es solución de la ecuación $XA = O$, pero no se puede afirmar que sea la única solución usando el apartado anterior, ya que A no tiene inversa, lo que se puede comprobar intentando calcularla por el método de Gauss-Jordan.

De hecho, la afirmación no es cierta, por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es otra solución de la ecuación $XA = O$.

NOTA: Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenemos $XA = O \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ d = 2c \end{cases}$, por lo que las soluciones de la ecuación $XA = O$ son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{pmatrix}$ con $a, c \in \mathbb{R}$.

114. **Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A + B = AB$. Comprueba que entonces se tiene la fórmula:**

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

Basta comprobar que $(I - B)(-B^{-1}A) = I$, ahora bien, tenemos:

$$(I - B)(-B^{-1}A) = -B^{-1}A + BB^{-1}A = -B^{-1}A + IA = (-B^{-1} + I)A$$

por tanto, basta comprobar que $(-B^{-1} + I)A = I$, es decir, que $A^{-1} = -B^{-1} + I$, o lo que es lo mismo, que $A^{-1} + B^{-1} = I$. Para ello, observemos que:

$$A + B = AB \Rightarrow A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1}ABB^{-1} \Rightarrow A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} = I^2 \Rightarrow IB^{-1} + A^{-1}I = I \Rightarrow B^{-1} + A^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} + B^{-1} = I$$

quedando así demostrada la fórmula pedida.

115. Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}\ a,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b\neq 0$$

a) Calcula AA^t, donde A^t es la matriz traspuesta de la matriz A.

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores de $a,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ b\neq 0$.

a) $$AA^t=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}=\left(a^2+b^2\right)I\ .$$

b) Según el apartado anterior, si $B=\dfrac{1}{a^2+b^2}A^t$ tenemos $AB=I$, es decir, A es invertible y $A^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}A^t$.

116. Se dice que una matriz cuadrada es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Se pide:

a) Demostrar que una matriz de la forma $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\ \alpha\in\mathbb{R}$ es ortogonal.

b) Calcular x e y de modo que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ sea ortogonal.

a) Si $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ tenemos:

$$AA^t=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I\ ,$$

es decir, $A^{-1}=A^t$, por lo que A es ortogonal.

b) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ tenemos que A es ortogonal si:

$$AA^t=I\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & xy \\ 0 & xy & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 1+x^2=1 \\ xy=0 \\ y^2=1 \end{cases}\Rightarrow x=0,\ y=\pm 1$$

117. Halla las coordenadas del punto en el que se trasforma el punto *P*(2, 5) al aplicarle, sucesivamente, un giro de centro el origen y amplitud –60º, una simetría de eje el de ordenadas y una traslación de vector (–3, 2).

La aplicación del giro, la simetría y la traslación trasforman el punto $P(2,\ 5)$ en el punto:

$$(2\quad 5)\begin{pmatrix} \cos(-60^{\circ}) & \operatorname{sen}(-60^{\circ}) \\ -\operatorname{sen}(-60^{\circ}) & \cos(-60^{\circ}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(-3\quad 2)=(2\quad 5)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(-3\quad 2)=$$

$$=(2\quad 5)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}+(-3\quad 2)=\begin{pmatrix} \frac{-2-5\sqrt{3}}{2} & \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}+(-3\quad 2)=\begin{pmatrix} \frac{-8-5\sqrt{3}}{2} & \frac{9-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS

118. Se dice que una matriz cuadrada es involutiva si cumple que $A^2 = I$, donde *I* denota la matriz identidad.

a) Justifica razonadamente que toda matriz involutiva es regular.

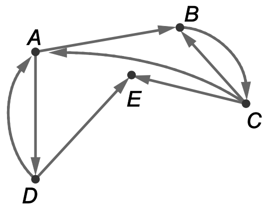
b) Determina para qué valores de los parámetros *a* y *b* la siguiente matriz es involutiva.

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

a) Puesto que una matriz involutiva verifica que $AA = I$, cualquier matriz involutiva es regular y su inversa coincide con ella misma, $A^{-1} = A$.

b) $\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ b = \pm 1$

119. El grafo siguiente contiene la información sobre la capacidad de influencia que tiene cada uno de los miembros de un grupo de personas sobre los demás.



a) Escribe la matriz, *M*, asociada al grafo.

b) Determina las matrices M^2 y M^3.

c) Interpreta la información que proporciona la matriz $M + M^2 + M^3$.

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Los elementos de esta matriz indican el número de posibles relaciones de influencia entre el grupo de personas con un máximo de dos intermediarios.

Por ejemplo, el elemento de la tercera fila y quinta columna nos indica que *C* puede influir sobre *E* de tres modos distintos, bien directamente, bien a través de uno o dos intermediarios.

Estos tres modos son la influencia directa (ningún intermediario), la influencia a través de *A* y *D* (dos intermediarios) y otros modos de influir a través de dos intermediarios que no tienen significancia real pero que aparecen en el grafo, la influencia a través de *B* y *C*. No hay ninguna influencia de *C* sobre E a través de un único intermediario.

120. a) Halla la matriz asociada a una simetría cuyo eje es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

b) Determina qué movimiento resulta de la composición de la simetría del apartado anterior y de la que tiene como eje la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

a) $S=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que trasforma cada punto $P=(x \quad y)$ en el punto $P'=(x \quad y)S=(-y \quad -x)$, simétrico de P respecto de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

b) La composición de ambas simetrías viene dada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que se corresponde con una simetría respecto del origen de coordenadas.

121. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de *c* tales que la matriz $A+cB$ no tenga rango 2.

b) Calcula, para los valores hallados de *c*, la matriz $A(A+cB)$ y su rango.

a) $A+cB=\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$ no tiene rango 2 si sus filas son proporcionales, esto ocurre si $1+c=0 \Rightarrow c=-1$ o si $\dfrac{4+4c}{1+c}=\dfrac{2-c}{-1} \Rightarrow 2-c=-4 \Rightarrow c=6$.

b) Si $c=-1$ tenemos $A(A+cB)=A(A-B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1, ya que $F_1=-2F_2$.

Si $c=6$ tenemos $A(A+cB)=A(A-B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -21 & 3 \\ 84 & -12 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1, ya que $F_2=-4F_1$.

122. En una pastelería se elaboran dos tipos de tartas: de limón y de chocolate. De cada tipo hace tres tamaños. Cada semana fabrica las tartas que aparecen en la tabla:

	Limón	Chocolate
Grande	10	5
Mediana	16	20
Pequeña	12	10

De las tartas de chocolate vende en la pastelería el 60 %, y de las tartas de limón, el 50 %. El resto se reparten a domicilio.

a) Escribe la matriz que expresa el número de tartas según el tamaño y el sabor.

b) Escribe las matrices que expresan el número de tartas y el porcentaje según el sabor y el tipo de venta.

c) Calcula la matriz que expresa el número de tartas según el tamaño y el tipo de venta.

a) $A=\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 16 & 20 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

b)

	Pastelería	Domicilio
Limón	50 % de 38	50 % de 38
Chocolate	60 % de 35	40 % de 35

Número de tartas: $B_1=\begin{pmatrix} 19 & 19 \\ 21 & 14 \end{pmatrix}$ Porcentaje: $B_2=\begin{pmatrix} 50 & 50 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}$

c) La matriz viene dada por $A\cdot\dfrac{1}{100}B_2=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 20 & 16 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$.

123. Dos matrices cuadradas *A* y *B* de igual orden son semejantes si existe una tercera matriz *M* tal que $B = M^{-1}AM$. Comprueba si son semejantes las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Queremos comprobar si existe una matriz invertible $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $B = M^{-1}AM$, es decir, tal que $MB = AM$:

$$MB = AM \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+2b & -6a+3b \\ -3c+2d & -6c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a-2c & b-2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3a+2b = 2a-c \\ -6a+3b = 2b-d \\ -3c+2d = a-2c \\ -6c+3d = b-2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a+2b+c = 0 \\ -6a+b+d = 0 \\ -a-c+2d = 0 \\ -b-6c+5d = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por el método de Gauss obtenemos como solución $a = b = c = d = 0$, es decir, *M* debería ser la matriz nula, pero entonces no sería invertible, por tanto, las matrices *A* y *B* no son semejantes.

124. En una cadena de supermercados hacen tres tipos de lotes de verdura para ensalada, *A*, *B* y *C*, de modo que el lote *A* incluye 400 g de lechuga, 200, de tomate, y 100, de zanahoria; el lote *B* incluye 200 g de lechuga, 300, de tomate, y 150, de zanahoria; y el lote *C* incluye 500 g de lechuga, 300, de tomate, y 50, de zanahoria.

Se ha recogido la información sobre las ventas de cada tipo de lote en dos supermercados de la cadena. En el supermercado *X* se han vendido 50 lotes de tipo *A*, 30 lotes de tipo *B* y 25 lotes de tipo *C*. En el supermercado *Y* se han vendido 40 lotes de tipo A, 20 de tipo *B* y 25 de tipo C.

a) Escribe la matriz *M* que engloba la información de los tipos de lote y su composición.

b) Escribe la matriz *V* que recoja la información de las ventas por supermercado.

c) Halla la matriz que contenga la información de la cantidad de cada tipo de verdura que ha hecho falta en cada supermercado.

a) $M = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 100 \\ 200 & 300 & 150 \\ 500 & 300 & 50 \end{pmatrix}$

b) $V = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 \\ 40 & 20 & 25 \end{pmatrix}$

c) La matriz viene dada por $VM = \begin{pmatrix} 38500 & 26500 & 10750 \\ 32500 & 21500 & 8250 \end{pmatrix}$

125. Halla todas las matrices triangulares superiores de orden 2 que verifican que su cuadrado es la matriz identidad.

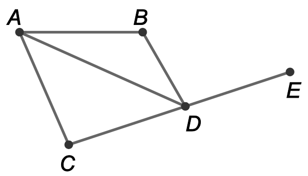
Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ una matriz triangular superior de orden 2 tal que $X^2 = I$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b(a+c) = 0 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1,\ b = 0,\ c = 1 \\ a = -1,\ b = 0,\ c = -1 \\ a = 1,\ b \in \mathbb{R},\ c = -1 \\ a = -1,\ b \in \mathbb{R},\ c = 1 \end{cases}$$

Por tanto, puede ser:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,\ X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,\ X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

126. **La figura representa el tendido de comunicaciones entre cinco lugares.**



a) Escribe la matriz A, de adyacencia del grafo.

b) Halla las matrices A^2, A^3 e interprétalas.

c) Halla la matriz $A + A^2 + A^3$ e interprétala.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sus elementos representan el número de conexiones que hay entre los puntos con una escala, por ejemplo, $a_{32} = a_{23} = 2$ significa que hay dos maneras de conectar los puntos B y C con una escala, en concreto $B - A - C$ y $B - D - C$.

$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Sus elementos representan el número de conexiones que hay entre los puntos con dos escalas, por ejemplo, $a_{41} = a_{14} = 6$ significa que hay seis maneras de conectar los puntos A y D con dos escalas, en concreto $A - B - A - D$, $A - C - A - D$, $A - D - A - D$, $A - D - B - D$, $A - D - C - D$ y $A - D - E - D$.

c) $M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 9 & 3 \\ 7 & 4 & 4 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 8 & 8 & 8 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Sus elementos representan el número de conexiones que hay entre los puntos con un máximo de dos escalas, por ejemplo, $a_{13} = a_{31} = 7$ significa que hay siete maneras de conectar los puntos A y C con un máximo de dos escalas, en concreto $A - C$ (conexión directa, sin escalas), $A - D - B$ (conexión con una escala), $A - B - A - C$, $A - D - A - C$, $A - C - A - C$, $A - C - D - C$ y $A - B - D - C$ (conexiones con dos escalas).

127. En una fábrica se utiliza, para la fabricación de envases, cartón y plástico. Los envases de tipo *A* se fabrican con 20 g de cartón y 5 de plástico. Los envases de tipo *B* se fabrican con 15 g de cartón y 10 de plástico.

a) Escribe una matriz que recoja la información sobre tipos de envases y cantidad de material de cada tipo necesario.

b) El plástico cuesta 3 céntimos el gramo, y el cartón 2, céntimos el gramo. Escribe la matriz de precios y calcula, operando con matrices, la matriz que da el coste de cada tipo de envase.

c) En una semana se necesitan 200 envases de tipo *A* y 300 de tipo *B*. Calcula, operando con matrices, la cantidad necesaria de cada material.

a) $M = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

b) La matriz de precios es $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, la matriz que da el coste de cada tipo de envase es $MN = \begin{pmatrix} 55 \\ 60 \end{pmatrix}$.

c) La matriz de necesidades de material viene dada por $M^t \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8500 \\ 4000 \end{pmatrix}$, es decir, necesitamos 8,5 kg de cartón y 4 kg de plástico.

128. Halla la matriz inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - F_3}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_4}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4 \to F_4 - F_5}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

129. Si A es una matriz cuadrada de orden n.

a) Comprueba que $A + A^t$ es una matriz simétrica.

b) Comprueba que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

c) Demuestra que toda matriz cuadrada se puede expresar como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

d) Descompón la matriz B como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, siendo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t \Rightarrow A + A^t$ es simétrica.

b) $(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -A + A^t = -(A - A^t) \Rightarrow A - A^t$ es antisimétrica.

c) $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$, donde $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica y $\frac{1}{2}(A - A^t)$ es antisimétrica.

d) $B_1 = \frac{1}{2}(B + B^t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica, $B_2 = \frac{1}{2}(B - B^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = B_1 + B_2$.

130. Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2 x 2.

a) Comprueba que se verifica:

$$\text{Traza}(A + B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$$

$$\text{Traza}(AB) = \text{Traza}(BA)$$

b) Utilizando los resultados anteriores, demuestra que es imposible tener $AB - BA = I$ donde I denota la matriz identidad.

c) Encuentra dos matrices para las que:

$$\text{Traza}(AB) \neq \text{Traza}(A) \cdot \text{Traza}(B)$$

a) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ tenemos $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

y $BA = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$, con lo que

$$\text{Traza}(A + B) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) = (a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$$

$$\text{Traza}(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) = (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12}) + (a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}) = \text{Traza}(BA)$$

b) Según el apartado anterior, $\text{Traza}(AB - BA) = \text{Traza}(AB) - \text{Traza}(BA) = 0$, pero $\text{Traza}(I) = 2$, por lo que $AB - BA$ nunca puede ser igual a la matriz identidad.

c) Basta tomar $A = B = I$, ya que $\text{Traza}(AB) = \text{Traza}(I^2) = \text{Traza}(I) = 2$ y $\text{Traza}(A) \cdot \text{Traza}(B) = 2 \cdot 2 = 4$.

131. Considera el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2.

a) Escribe la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices $B_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

b) Halla una matriz que no se pueda escribir como combinación lineal de B_1 y B_2.

c) Encuentra cuatro matrices del espacio vectorial tales que cualquier matriz se pueda expresar como combinación lineal de ellas.

a) $A=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_1+\lambda_2 & 2\lambda_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_1+\lambda_2=1\\ 2\lambda_2=-2\end{cases} \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1 \Rightarrow A=2B_1-B_2$

b) Observemos que en cualquier combinación lineal de B_1 y B_2, $\lambda_1B_1+\lambda_2B_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_1+\lambda_2 & 2\lambda_2\end{pmatrix}$, los elementos de la diagonal secundaria deben coincidir, por lo que, por ejemplo, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ no es combinación lineal de B_1 y B_2.

c) Cualquier matriz de orden 2 se puede escribir como combinación lineal de las matrices:

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad C_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad C_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad C_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

En efecto, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=aC_1+bC_2+cC_3+dC_4$.

132. Considera la matriz *M* de dimensión *m* x *n* y los productos M^tM y MM^t. Demuestra que en los dos casos la matriz producto es simétrica.

En efecto, M^tM y MM^t son simétricas, de hecho una es la traspuesta de la otra, ya que $\left(M^tM\right)^t=\left(M^t\right)^tM^t=MM^t$.

133. Se consideran las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}$$

Demuestra que tienen la misma forma:

a) La suma de dos matrices de esa forma.

b) El producto de una matriz de esa forma por un número.

c) El producto de dos matrices de esa forma.

a) $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a' & 0 & 0\\ b' & a' & 0\\ c' & b' & a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+a' & 0 & 0\\ b+b' & a+a' & 0\\ c+c' & b+b' & a+a'\end{pmatrix}$

b) $\lambda\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a & 0 & 0\\ \lambda b & \lambda a & 0\\ \lambda c & \lambda b & \lambda a\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & 0 & 0\\ b' & a' & 0\\ c' & b' & a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa' & 0 & 0\\ ab'+ba' & aa' & 0\\ ac'+bb'+ca' & ab'+ba' & aa'\end{pmatrix}$

134. Dos matrices son anticonmutativas si se verifica que:

$$\boldsymbol{AB = -BA}$$

a) Comprueba que son anticonmutativas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

b) Determina en qué casos dos matrices cuadradas diagonales de orden 2 no nulas son anticonmutativas.

a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que A y B son anticonmutativas.

b) Sean $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$AB = -BA \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1b_1 = 0 \\ a_2b_2 = 0 \end{cases}$$

Para que se cumplan estas condiciones y además A y B no sean nulas, debe ser $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ o $a_2 = b_1 = 0$, $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Es decir, para que dos matrices cuadradas diagonales de orden dos no nulas sean anticonmutativas, tienen que ser de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Halla una matriz diagonal de orden 4 con $\boldsymbol{a_{ii} = (-1)^i \cdot i^2}$ para cualquier *i*.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $M(N + P^t)$ **b)** $N^tM + 3P$ **c)** $(M^2 - 2I)N$

a) $M(N+P^t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N^tM + 3P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 7 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 16 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $(M^2 - 2I)N = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 10 & 5 & -4 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 8 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -13 \\ -1 & 2 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$

3. **Halla una matriz *X* tal que $AX+B=I+X$, siendo *A* y *B* las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Observemos que $AX+B=I+X \Rightarrow AX-X=I-B \Rightarrow (A-I)X=I-B$, por tanto, si $A-I$ tiene inversa, tendremos $X=(A-I)^{-1}(I-B)$.

Intentemos calcular la inversa de $A-I=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2-F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to 2F_1+F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -6 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to\frac{1}{2}F_1\\ F_2\to-\frac{1}{6}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{array}\right)\Rightarrow (A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=(A-I)^{-1}(I-B)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

4. **Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, calcula A^n para cualquier valor natural de *n*.**

Calculemos las primeras potencias de *A* para poder formular una hipótesis sobre el valor de A^n:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix},\ A^4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 8 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \ldots,\ A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 2n & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Demostremos nuestra hipótesis por el método de inducción:

Primero comprobemos que la hipótesis es cierta si $n=1$, lo que es inmediato, ya que *A* coincide con la expresión de A^n si $n=1$.

Comprobemos ahora que la hipótesis es cierta para $n+1$ suponiendo que lo es para *n*:

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 2n & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{n+1} & 0\\ 2n+2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{n+1} & 0\\ 2(n+1) & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5. **Determina el rango de las siguientes matrices, sin utilizar el método de Gauss:**

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\\ -4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

El rango de *A* es 2, ya que sus dos filas no son proporcionales, es decir, son linealmente independientes.

El rango de *B* es 2, ya que F_1 y F_2 no son proporcionales y $F_3=2F_1+F_2$.

El rango de *C* es 2, ya que F_1 y F_4 no son proporcionales, F_2 es una fila nula y $F_3=-2F_1$.

6. **Calcula el rango de la matriz *M* utilizando el método de Gauss:**

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3+3F_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & 12 & -8 \end{pmatrix} \underset{F_3\to F_3+4F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(M)=2$$

7. **Halla el valor de *a* y *b* para que la matriz** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-b} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **sea la inversa de la matriz** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-a} \end{pmatrix}$**.**

Queremos que $AB=I$, por tanto:

$$\begin{pmatrix} a+b & a+2b & 0 \\ -1-b & -1-2b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+2b=0 \\ -1-b=0 \\ -1-2b=1 \\ -b=1 \end{cases} \Rightarrow a=2,\ b=-1$$

8. **Halla la inversa de la matriz *N* utilizando el método de Gauss-Jordan.**

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to 2F_2+F_1 \\ F_3\to 2F_3-F_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{F_3\to 2F_3-3F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -6 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1\to F_1+F_3 \\ F_2\to F_2+F_3}}{\to}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -4 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -6 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1\to \frac{1}{2}F_1 \\ F_2\to \frac{1}{4}F_2 \\ F_3\to -F_3}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow N^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

9. **Dadas las matrices** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **resuelve el sistema matricial** $\begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{X}+\mathbf{3}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{X}+\mathbf{2}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B} \end{cases}$ **donde *X* e *Y* son matrices cuadradas de orden 3.**

Restándole a la primera ecuación el doble de la segunda obtenemos $-Y=A-2B\Rightarrow Y=2B-A$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $X+2(2B-A)=B\Rightarrow X=2A-3B$, por tanto:

$$X=2A-3B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y=2B-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Con las matrices *A*, *B*, *C* y *D* se pueden hacer las operaciones $(A+D)C^t$, CB^t y B^2. Entonces se puede hacer la operación:

A. $(CBD)^t$

B. $C(D+A)B$

C. $(BA^tD)^2$

D. $(A^t+D^t)^2C$

Sean, respectivamente, $m_1 \; x \; n_1$, $m_2 \; x \; n_2$, $m_3 \; x \; n_3$ y $m_4 \; x \; n_4$ la dimensión de *A*, *B*, *C* y *D*.

Como se puede calcular B^2, la matriz *B* es cuadrada, es decir, $m_2 = n_2$.

Como se puede calcular $A+D$, *A* y *D* tienen la misma dimensión, es decir, $m_1 = m_4$ y $n_1 = n_4$. Además, como se puede calcular $(A+D)C^t$, el número de columnas de $A+D$ coincide con el número de filas de C^t, es decir, $n_1 = n_3$.

Por último, como se puede calcular CB^t, el número de columnas de *C* coincide con el número de filas de B^t, es decir, $n_3 = n_2$.

En resumen, las dimensiones de *A*, *B*, *C* y *D* son, respectivamente, $m_1 \; x \; n_1$, $n_1 \; x \; n_1$, $m_3 \; x \; n_1$ y $m_1 \; x \; n_1$.

De este modo, $(CBD)^t$ no necesariamente se puede calcular, ya que *BD* solo se podría calcular si $n_1 = m_1$, lo que no tenemos asegurado. Tampoco es seguro que se pueda calcular $C(D+A)B$, ya que, de nuevo, $C(D+A)$ solo se podría calcular si $n_1 = m_1$. Tampoco es seguro que se pueda calcular $(A^t+D^t)^2C$, ya que sería necesario que $m_1 = m_3$, lo que no tenemos asegurado.

En cambio $(BA^tD)^2$ se puede calcular, ya que el número de columnas de *B* coincide con el de filas de A^t y el número de columnas de A^t coincide con el de filas de *D* (con lo que se puede calcular BA^tD), además, BA^tD tendrá dimensión $n_1 \; x \; n_1$, con lo que se puede calcular $(BA^tD)^2$.

Por tanto, la respuesta correcta es C.

2. Si la matriz *A* tiene una de sus *n* filas nula y se puede hacer el producto *AB*, entonces:

A. *AB* tiene una fila nula.

B. *AB* tiene una columna nula.

C. *A* es regular.

D. rg(*A*) = *n*

A es obviamente correcta, si la fila *i* de *A* es nula, la fila *i* de *AB* será nula.

En cambio B, C y D son falsas, basta considerar el ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I_2$.

3. Si la matriz *A*, de orden *n*, es invertible entonces la matriz 3*A*:

A. Es invertible y su inversa es $3A^{-1}$.

B. Es invertible y su inversa es 3^nA^{-1}.

C. Es invertible y su inversa es $\frac{1}{3}A^{-1}$.

D. No necesariamente es invertible.

La respuesta correcta es C, ya que $(3A)\left(\frac{1}{3}A^{-1}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3}AA^{-1} = I$.

4. **Dada la matriz** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$**:**

A. Si $abc=0 \Rightarrow \text{rg}(A)<2$

B. Si $ab=0 \Rightarrow \text{rg}(A)<2$

C. Si $ac=0 \Rightarrow \text{rg}(A)<2$

D. Si $bc=0 \Rightarrow \text{rg}(A)<2$

La respuesta correcta es B, ya que si $ab=0$, tendremos $a=0$ o $b=0$, con lo que bien una fila bien una columna de A será nula.

En cambio A, C y D son falsas, basta considerar $a=1, b=1, c=0$, con $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=2$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

5. ***A* es una matriz triangular de orden 4, no diagonal y no nula, entonces:**

A. $\text{rg}(A)=4$

B. A tiene inversa.

C. A no es antisimétrica.

D. $A+A^t$ es simétrica.

A no es cierta, basta considerar el ejemplo $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tampoco es cierta B, ya que es equivalente a A.

C sí es cierta, ya que si A fuera antisimétrica y, por ejemplo, triangular superior, todos los elementos por encima de la diagonal principal serían nulos por ser triangular superior y, por tanto, también los elementos por debajo de la diagonal principal y los de la diagonal principal serían nulos por ser antisimétrica, en contradicción con el hecho de que A es no nula.

También D es cierta, de hecho es cierta para cualquier matriz cuadrada A, ya que:

$$\left(A+A^t\right)^t=A^t+\left(A^t\right)^t=A^t+A=A+A^t$$

Por tanto, las respuestas correctas son C y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Sea *A* una matriz cuadrada de orden 3.**

1. A tiene únicamente cuatro elementos no nulos.

2. $\text{rg}(A)\geq 2$

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

1 no implica 2, basta considerar $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que cumple 1 pero no 2, ya que el rango de A es 1.

2 tampoco implica 1, basta considerar $A=I_3$, que cumple 2, ya que su rango es 3, pero no 1.

Por tanto, la respuesta correcta es D.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se quiere calcular el rango de la matriz no nula *A* de dimensión 3 x 4. Para ello se obtiene una matriz equivalente escalonada por filas *B* de la que se sabe:**

1. El número de filas. **2.** b_{22} **3.** b_{33}

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. No puede eliminarse ningún dato.

El número de filas de *B* coincide con el número de filas de *A*, por lo que el dato 1 es innecesario, la respuesta correcta es A.