8 Movimiento ondulatorio: ondas mecánicas

ESQUEMA DE LA UNIDAD

Cuestiones previas (página 206)

1. ¿Es lo mismo un movimiento oscilatorio que uno ondulatorio?

No es lo mismo, la propagación de ese movimiento oscilatorio conduce al movimiento ondulatorio.

La diferencia fundamental radica en que en el movimiento ondulatorio se transporta energía.

2. Cita ejemplos de ondas. ¿Qué se propaga en una onda?

Ejemplos de ondas tenemos: olas en el agua, ondulaciones que se propagan por una cuerda, la luz, el sonido, etcétera.

En una onda se propaga exclusivamente energía.

3. ¿Qué parámetros se usan para caracterizar una onda? ¿Cuál es su significado físico?

Los parámetros que caracterizan una onda son:

- La longitud de onda (la distancia entre dos puntos consecutivos que se encuentran en el mismo estado de vibración); el período (el tiempo que tarda un punto cualquiera en repetir una oscilación).
- La frecuencia (el número de veces que un punto cualquiera repite cierto estado de oscilación por unidad de tiempo); velocidad de propagación (el cociente entre la longitud de la onda y su período).
- El número de onda (número de longitudes de onda que hay en una distancia 2π).

4. ¿Por qué se concede en física tanta importancia al estudio de las ondas?

La importancia de las ondas radica en la cantidad de aplicaciones técnicas que su estudio ha aportado así como por ejemplo la cobertura de un teléfono móvil, los radares de circulación, etcétera.

También es importante por la cantidad de fenómenos físicos estudiados como los efectos de un seísmo, el movimiento de las olas marinas...

5. ¿Qué propiedades de las ondas conoces?

La reflexión, la refracción, difracción, interferencias, polarización, etcétera.

Actividades (páginas 209/229)

1 Indica cuáles de los siguientes tipos de ondas son transversales y cuáles son longitudinales: las ondas en una cuerda, el sonido, la luz y los rayos X.

El sonido es la propagación de ondas longitudinales. El resto de ondas son transversales.

2 Se tensa una cuerda larga que tiene una densidad lineal de masa de 0,01 kg/m aplicando una fuerza de 60 N. Si se hace oscilar transversalmente un extremo de la cuerda, ¿con qué velocidad se propagarán las ondas en la cuerda?

Dado que la tensión es de 60 N y que la densidad lineal es μ = 0,01 kg/m, se obtiene directamente:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 77{,}46 \text{ m/s}$$

3 PAU Repite los apartados de la aplicación, para el caso de un pulso con la forma:

$$y(x, t) = \frac{9}{3(x + 2t)^2}$$

donde x e y se miden en centímetros y el tiempo en segundos.

a) La amplitud del pulso es el valor máximo de $y(x, t)$, que se obtiene para el valor mínimo del denominador, lo cual sucede cuando $x + 2t = 0$; por tanto, la amplitud es $A = 3$ cm.

b) La velocidad de propagación es el factor que multiplica al tiempo en la funcion de onda; por tanto, la velocidad es 2 cm/s hacia la izquierda.

c) En $t = 0$ s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 0) = \frac{9}{3 + x^2}$$

Es fácil comprobar que esta es una función par en forma de campana, que presenta un máximo para $x = 0$, y sendos puntos de inflexión en $x = -1$ m y $x = +1$ m.

En $t = 1$ s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 1) = \frac{9}{3 + (x + 2)^2}$$

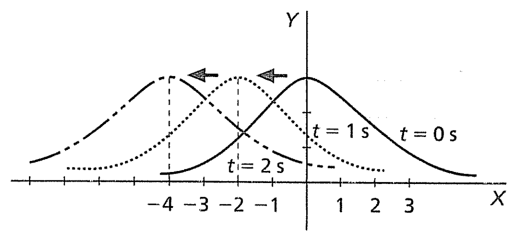
Esta función es idéntica a la anterior, aunque desplazada sobre el eje X dos unidades hacia la izquierda. Es decir, presenta el máximo para $x = -2$ m.

En $t = 2$ s, la función de onda tiene la forma:

$$y(x, 2) = \frac{9}{3 + (x + 4)^2}$$

Esta función es idéntica a la primera, aunque desplazada sobre el eje X cuatro unidades hacia la izquierda. Es decir, presenta el máximo para $x = -4$ m.

Así pues, el pulso progresa como se indica en la siguiente figura:



4 PAU Repite la aplicación anterior para la onda armónica $y = 3$ sen $5\pi\,(0{,}8x - t)$ cm.

La ecuación puede escribirse de este otro modo:

$$y = 3 \text{ sen } (4\pi x - 5\pi t) \text{ cm}$$

a) Por tanto:

$$A = 3 \text{ cm}$$

$$\omega = 5\pi \text{ rad/s}$$

$$k = 4\pi \text{ cm}^{-1} = 12{,}56 \text{ cm}^{-1}$$

b) La longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0{,}5 \text{ cm}$$

La frecuencia valdrá:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}5 \text{ Hz}$$

y el período será, por último:

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}4 \text{ s}$$

c) La velocidad es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = 1{,}25 \text{ cm/s}$$

La ecuación de la onda indica que se desplaza hacia la derecha.

5 **PAU** **Cierta onda transversal tiene por ecuación:**

$$y = 0{,}2 \text{ sen } \frac{\pi}{3}(3x - 30t) \text{ m}$$

a) **Calcula la velocidad de propagación de dicha onda.**

b) **Determina la velocidad de oscilación máxima de un punto cualquiera x.**

c) **Detalla las diferencias entre las dos velocidades anteriores e indica si existe alguna relación entre ambas.**

d) **Halla la velocidad de oscilación del punto $x = 2$ m cuando $t = 10$ s.**

Según se desprende de la ecuación:

$$A = 0{,}2 \text{ m}; \omega = 10\pi \text{ rad/s}; k = \pi \text{ m}^{-1}$$

a) La velocidad de propagación puede expresarse del siguiente modo:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{10\pi}{\pi} = 10 \text{ m/s}$$

b) La velocidad de oscilación de un punto cualquiera es la derivada de la posición y con respecto al tiempo. Por tanto:

$$v = \frac{dy}{dt} = -2\pi \cos(\pi x - 10\pi t) \text{ m/s}$$

La velocidad máxima se producirá cuando el coseno alcance su valor máximo, que es 1, por lo que el valor absoluto de dicha velocidad será:

$$v_{máx} = 2\pi \text{ m/s} = 6{,}28 \text{ m/s}$$

c) Ambas velocidades son totalmente distintas, pues una representa la velocidad a la que se propaga la perturbación, mientras que la otra es la velocidad de oscilación (en la dirección perpendicular, si la onda es transversal) de un punto del medio, en el caso de las ondas mecánicas.

Podemos establecer una relación entre ambas velocidades, usando, por ejemplo, la ecuación:

$$y = A \cos k(x - vt)$$

y derivando:

$$v_{oscilación} = Akv \text{ sen } k(x - vt)$$

d) Sustituyendo en la expresión que obtuvimos en en el apartado *b)*, la velocidad de oscilación del punto $x = 2$ m, cuando $t = 10$ s, valdrá: $v_{oscilación} = -6{,}28$ m/s.

6 **PAU** **Una onda armónica viene dada por:**

$$y = 25 \cos \pi(2x - 5t) \text{ cm}$$

a) **Determina la longitud de onda y el período.**

b) **Calcula la velocidad y la aceleración de oscilación transversal de un punto cualquiera en función del tiempo.**

c) **Calcula la velocidad y la aceleración transversal en $t = 0$, en un punto situado en $x = 5{,}3$ cm.**

a) Puesto que $k = 2\pi \text{ cm}^{-1}$, entonces:

$$\lambda = 2\pi/k = 1 \text{ cm}$$

Además, $\omega = 5\pi$ rad/s; por lo que:

$$T = 2\pi/\omega = 0{,}4 \text{ s}$$

b) Derivando una vez con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad de oscilación:

$$v = \frac{dy}{dt} = 125\pi \text{ sen } \pi(2x - 5t) \text{ cm/s}$$

Al derivar por segunda vez, se calcula la aceleración de oscilación de un punto:

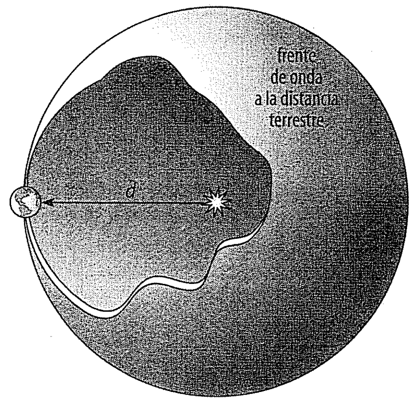
$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -625\pi^2 \cos \pi(2x - 5t) \text{ cm/s}^2$$

c) Para $t = 0$, y $x = 5{,}3$ cm, y sustituyendo en las expresiones anteriores:

$$v = 373{,}29 \text{ cm/s}; a = 1\,904{,}24 \text{ cm/s}^2$$

7 **Sabiendo que el radio terrestre es de 6 370 km y que la distancia media al Sol es de $1{,}496 \cdot 10^8$ km, determina qué porción de la energía irradiada en la superficie solar llega a la terrestre (considera como superficie terrestre su sección transversal, de área πr^2).**

Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía, podemos suponer que toda la energía irradiada por segundo en la superficie solar es la misma que acaba repartiéndose por todo el frente esférico donde se sitúa la Tierra, como puede verse en la siguiente figura:



Considerando que la energía se distribuye uniformemente por todo el frente de onda, se cumplirá que:

$$\frac{E_T}{S_T} = \frac{E}{S}$$

donde E_T es la energía que llega a la superficie terrestre, S_T (considerada como su sección transversal), mientras que E es la energía total correspondiente al frente de onda esférico, cuyo radio es igual a la distancia Tierra-Sol.

Así pues, la energía que llega a la Tierra es:

$$E_T = E\frac{S_T}{S} = E\frac{\pi r_T^2}{4\pi d^2} = 4{,}53 \cdot 10^{-10} \cdot E$$

Es decir, llega aproximadamente la diezmilmillonésima parte de la energía irradiada por la superficie solar. Si tenemos en cuenta que el valor de la llamada constante solar es igual 1,3 kW/m^2 y lo multiplicamos por los metros cuadrados de la superficie transversal terrestre, obtendremos la energía total que llega a la superficie terrestre.

Al dividir dicho valor por $4{,}53 \cdot 10^{-10}$, se calcula la energía irradiada por la superficie solar, cuyo valor figura en el texto del margen de la página 219.

8 **¿Qué diferencias encuentras en el transporte de energía por medio de ondas armónicas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales?**

El transporte de energía en medios isótropos y no disipativos no conlleva amortiguación en el caso de las ondas unidimensionales, pero sí en el de las bidimensionales y tridimensionales.

Las bidimensionales se amortiguan conforme al inverso de la raíz cuadrada de la distancia, mientras que las tridimensionales lo hacen según el inverso de la distancia.

9 **¿Cuál crees que es el motivo por el que se hace imprescindible la instalación de repetidores de TV en montañas para la emisión de señales a distancia?**

La instalación de repetidores se justifica por la inexistencia del fenómeno de difracción, debido a que las longitudes de onda típicas de la TV (del orden de 0,1 a 10 cm) son demasiado pequeñas para producir difracción al encontrarse con obstáculos naturales (montañas y otros accidentes) o artificiales (edificios, por ejemplo).

10 **¿Qué ocurre con la energía en los procesos de interferencia? ¿Se «disipa» o desaparece en los mínimos? Trata de dar una explicación.**

La energía total permanece constante, pero no se distribuye homogéneamente, de modo que en los mínimos es nula y se incrementa en los máximos.

11 **PAU** **Dos ondas armónicas responden a las ecuaciones:**

$$y_1 = 0{,}5 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t) \text{ m};$$
$$y_2 = 0{,}5 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t - 0{,}3) \text{ m}$$

a) **¿Cuál es la amplitud de la onda resultante de la interferencia? ¿Cómo calificarías la interferencia que se produce?**

b) **¿Cuál es la frecuencia de dicha onda resultante? Escribe su ecuación.**

La onda resultante de la interferencia tiene por ecuación la siguiente:

$$y = \left(2A \cos \frac{\delta}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right)$$

a) La amplitud es:

$$A' = 2A \cos \frac{\delta}{2} = 0{,}99 \text{ m}$$

Así pues, es casi el doble que la amplitud de las ondas componentes, por lo que cabe calificar la interferencia de *prácticamente constructiva*.

b) La frecuencia de la onda resultante es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 250 \text{ Hz}$$

y su ecuación:

$$y = 0{,}99 \text{ sen } (4\pi x - 500\pi t - 0{,}15) \text{ m}$$

12 **PAU** **Un punto, P, se encuentra a 10 m y 11 m, respectivamente, de dos fuentes de ondas, S y S', muy próximas entre sí, que emiten ondas de amplitud *A* con una frecuencia de 1 000 Hz. ¿Qué ocurrirá en dicho punto si las ondas se propagan por el medio con una velocidad de 500 m/s?**

La diferencia de caminos desde cada fuente al punto, Δd, es de 1 m.

Si la frecuencia de las ondas es de 1 000 Hz, su período será:

$$T = \frac{1}{f} = 0{,}001 \text{ s}$$

Como a su vez:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

entonces:

$$\lambda = vT = 500 \text{ m/s} \cdot 0{,}001 \text{ s} = 0{,}5 \text{ m}$$

Como puede comprobarse, se cumple que $\Delta d = 2 \cdot \lambda$, por lo que la interferencia de las ondas será constructiva en el punto P.

13 **PAU** **Una onda se proponga según la expresión:**

$$y = 0{,}1 \text{ sen } 2\pi(100t - x/0{,}40)$$

donde *x* e *y* se expresan en metros, y *t*, en segundos.

Determina:

a) **La longitud de onda, el período y la velocidad de propagación de la onda.**

b) **La distancia entre puntos que están en fase y en oposición de fase.**

a) De la ecuación de la onda, podemos concluir que:

$$\omega = 200\pi \text{ rad/s}$$
$$k = 5\pi \text{ m}^{-1}.$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}4 \text{ m}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}01 \text{ s}$$
$$v = \frac{\lambda}{T} = 40 \text{ m/s}$$

b) Dos puntos en consonancia de fase se encuentran separados por una distancia igual a λ, esto es, 0,4 m.

Por el contrario, dos puntos en oposición de fase se encontrarán separados por $\lambda/2$, es decir, por 0,2 m. En general:

$$\text{distancia entre puntos en fase} = n\lambda$$
$$\text{distancia entre puntos en oposición de fase} = (2n + 1)\ \lambda/2$$

14 **PAU** **Cierta cuerda de longitud *l*, fija por ambos extremos, tiene 6 vientres al provocar oscilaciones a 840 Hz.**

a) **¿A qué frecuencia tendrá cuatro vientres?**

b) **¿A qué frecuencia habrá solo uno?**

a) La frecuencia dada corresponde al sexto armónico. Por tanto, la frecuencia del cuarto armónico (donde presentará 4 vientres) es:

$$f^{IV} = 4\frac{f^{VI}}{6} = 560 \text{ Hz}$$

b) La frecuencia fundamental es la que presenta un solo vientre y valdrá:

$$f_0 = \frac{f^{VI}}{6} = 140 \text{ Hz}$$

15 **PAU** **Dos ondas armónicas vienen descritas por las siguientes ecuaciones:**

$$y_1 = 12 \text{ sen } \pi(2x - 3{,}2t) \text{ cm}$$
$$y_2 = 12 \text{ sen } \pi(2x + 3{,}2t) \text{ cm}$$

a) **Calcula la amplitud de estas ondas en las posiciones $x = 0{,}3$ cm, $x = 0{,}5$ cm, y $x = 1{,}5$ cm.**

b) **Determina la distancia entre nodos consecutivos.**

Al propagarse en sentidos opuestos, las dos ondas darán lugar al establecimiento de una onda estacionaria cuya expresión es:

$$y = (24 \text{ sen } 2\pi x) \cdot \cos 3{,}2\pi t \text{ cm}$$

a) Las amplitudes en los puntos citados serán:

$$x = 0{,}3 \text{ cm} \Rightarrow A = 22{,}8 \text{ cm}$$
$$x = 0{,}5 \text{ cm} \Rightarrow A = 0 \text{ cm}$$
$$x = 1{,}5 \text{ cm} \Rightarrow A = 0 \text{ cm}$$

b) En los nodos ha de cumplirse que:

$$kx = 0, \pi, 2\pi \ldots \Rightarrow 2\pi x = 0, \pi, 2\pi \ldots$$

Por tanto:

$$x = 0, 1/2, 1 \ldots$$

Es decir, la distancia entre nodos consecutivos es de 0,5 cm.

Actividades finales (páginas 232/233)

Guía de repaso

1 **¿Qué se entiende por onda?**

Una onda representa el movimiento de propagación de una perturbación de un punto a otro sin que exista transporte neto de materia.

2 **¿Qué es lo que se propaga en una onda?**

Se transporta energía.

3 **Establece los criterios para clasificar las distintas ondas.**

Según el número de dimensiones en que se propaga la onda o según la coincidencia o no entre la dirección de oscilación de la propiedad perturbada y la de la propagación de la onda.

4 **¿Qué ejemplos tomados de la experiencia cotidiana conoces de ondas longitudinales y transversales?**

Ejemplo de onda longitudinal es el sonido y de transversal la luz o las ondas en una cuerda.

5 **¿De qué depende la velocidad de propagación de una onda en un medio?**

Depende de la elasticidad y la inercia del medio.

6 **¿Qué tipo de ecuación representaría una onda que se propaga hacia la derecha, en el sentido positivo de las *x*? ¿Y hacia la izquierda?**

La ecuación que representa una onda que se propaga en sentido positivo de *x*:

$$y = f(x - vt)$$

La ecuación que representa una onda que se propaga en sentido negativo de *x*:

$$y = f(x + vt)$$

7 **¿Qué es una onda armónica? Escribe su ecuación general.**

Una onda armónica es una perturbación que se propaga producida por un oscilador armónico. Su expresión general en función en función seno y coseno respectivamente es:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x \pm vt)$$
$$y(x, t) = A \cos k(x \pm vt)$$

8 **¿Qué parámetros constantes definen una onda armónica?**

La longitud de onda, período, frecuencia, velocidad de propagación y número de onda.

9 **¿Qué relaciones pueden establecerse entre los parámetros?**

Entre la frecuencia y el período ($f = 1/T$); entre el número de onda y su longitud ($k = 2\pi/\lambda$); y entre la velocidad, longitud y período ($v = \lambda/T$).

10 **¿Se amortigua una onda armónica unidimensional a medida que se propaga, si el medio no disipa energía?**

No se amortigua la onda. Véase el subapartado del subepígrafe 3.3, dedicado a la energía en una onda armónica unidimensional.

11 **¿Por qué se amortiguan las ondas bidimensionales y tridimensionales a medida que se propagan aunque el medio no disipe energía? ¿Lo hacen de la misma manera?**

Debido a la conservación de la energía y a su distribución en frentes de onda. No lo hacen de la misma manera, en el caso de una bidimensional su amplitud decrece: $1/\sqrt{r}$ y en el caso de la tridimensional decrece: $1/r$.

12 **¿Qué fenómenos son específicamente ondulatorios? ¿Cuáles pueden darse tanto en el movimiento ondulatorio como en el de partículas?**

La difracción, la interferencia y la polarización son fenómenos estrictamente ondulatorios; la reflexión y la refracción también se dan en el campo de las partículas.

13 **¿En qué consiste el método de Huygens para explicar la propagación de las ondas?**

Consiste en dos principios:

- Todo punto de un medio hasta el cual llega una perturbación se comporta como un foco emisor de ondas secundarias que se propagan en la dirección de la perturbación.
- La superficie tangente (envolvente) a todas las ondas secundarias en un instante dado constituye el siguiente frente de ondas.

14 **¿Qué es la reflexión?**

Es cuando una onda llega a una superficie de separación entre dos medios y se refleja propagándose por el mismo medio.

15 **¿En qué consiste la refracción?**

Es cuando una onda llega a una superficie de separación entre dos medios y pasa propagándose por distinto medio.

16 **¿Qué es la difracción?**

La difracción es el fenómeno por el cual una onda modifica su dirección de propagación al encontrarse con aberturas u obstáculos.

17 **¿Qué es la interferencia entre ondas armónicas?**

Es cuando dos ondas llegan a combinar sus efectos en un punto.

18 **¿Cuándo tiene lugar una interferencia constructiva entre ondas idénticas? ¿Y cuándo es destructiva?**

Una interferencia es constructiva cuando las ondas están en consonancia de fase, mientras que es destructiva cuando se hallan en oposición de fase (véase la página 226).

19 **Dos fuentes de ondas puntuales producen ondas circulares. ¿Qué condición se cumple en los puntos donde se producen máximos de interferencia? ¿Y en los mínimos?**

En los máximos, la diferencia de recorridos de las ondas emitidas por cada fuente es un número entero de longitudes de onda, mientras que en los mínimos dicha diferencia es un número impar de semilongitudes de onda.

20 **¿Cómo se pueden originar ondas estacionarias? ¿Qué tiene de particular la ecuación que las representa?**

Por ejemplo, entre una onda dada y su onda reflejada en el mismo medio, como sucede en las ondas estacionarias en cuerdas fijas por uno o por sus dos extremos. La ecuación tiene de particular que la amplitud depende de la posición.

21 **¿En qué posiciones se encuentran los nodos que se generan en una onda estacionaria producida en una cuerda fija por sus dos extremos? ¿Y los antinodos?**

Los nodos se encuentran ubicados en $x = n\lambda/2$; y los antinodos en $x = (2n + 1)\,\lambda/4$.

22 **¿Qué son los armónicos? ¿Qué relación hay entre las frecuencias del quinto y del tercer armónico?**

Los armónicos son las frecuencias a las que tienen lugar el establecimiento de ondas estacionarias. La frecuencia del tercer armónico es 3/5 de la frecuencia del quinto armónico.

23 **¿Se propaga energía en una onda estacionaria?**

No se propaga energía. Véase el subepígrafe 5.4.

Propagación de ondas mecánicas

24 **Disponemos de una cuerda de cierta longitud; ¿qué debemos hacer si deseamos triplicar la velocidad de propagación de un pulso sobre dicha cuerda?**

Hay que aumentar nueve veces la tensión de la cuerda, como se desprende de la expresión **8.1**.

25 **¿Qué diferencia existe entre un movimiento oscilatorio y otro ondulatorio? Idea un símil que aclare esta diferencia.**

Un movimiento oscilatorio es efectuado por un cuerpo o sistema.

El movimiento ondulatorio consiste en la propagación de la energía sin que exista transporte neto de materia; tampoco es preciso que oscile ninguna partícula del medio, dado que existen ondas que se propagan en el vacío.

Las ondas electromagnéticas, por ejemplo, son generadas por cargas eléctricas oscilantes (este sería el movimiento oscilatorio), pero su propagación consiste en modificaciones del campo electromagnético (que varía de forma ondulatoria).

26 PAU **Un pulso de onda que se desplaza a lo largo del eje *X* viene dado por la siguiente función:**

$$y\,(x,\,t) = \frac{2}{1 + (x + 3t)^2}$$

donde *x* se mide en centímetros, y *t*, en segundos.

a) **Determina la amplitud del pulso.**

b) **¿Con qué velocidad y en qué sentido se desplaza?**

c) **Traza la forma de la onda en $t = 0$, $t = 1$ s, y $t = 2$ s, y comprueba el sentido del desplazamiento.**

a) La amplitud o máximo valor de *y* es el que se obtiene cuando el denominador alcanza su valor mínimo (esto es, cuando el paréntesis es cero), de modo que:

$$A = 2 \text{ cm}$$

b) La velocidad es el factor que multiplica al tiempo, por lo que:

$$v = 3 \text{ cm/s}$$

El pulso se desplaza hacia la izquierda, dado el signo positivo.

c) Para $t = 0$:

$$y = \frac{2}{1 + x^2}$$

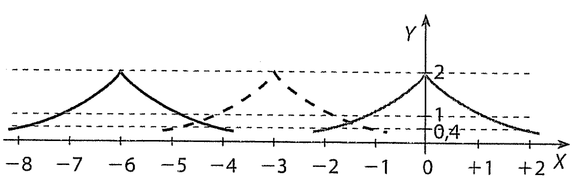
Para $t = 1$ s:

$$y = \frac{2}{1 + (x + 3)^2}$$

Para $t = 2$ s:

$$y = \frac{2}{1 + (x + 6)^2}$$

Al representar la propagación del pulso, observamos cómo se desplaza efectivamente 3 cm cada segundo hacia la izquierda:



27 **Sobre una cuerda tensa de 1,320 kg de masa y una longitud de 7 m, deseamos producir ondas que se propaguen a una velocidad de 30 m/s. ¿A qué tensión debemos someter la cuerda?**

Puesto que:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Tl}{m}}$$

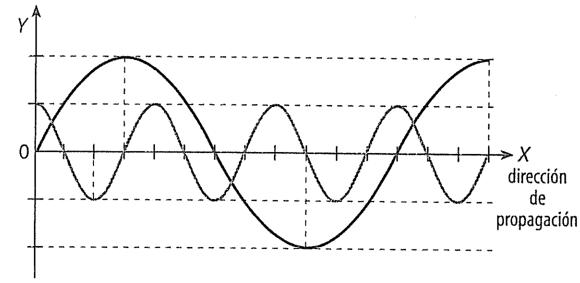
puede concluirse que:

$$T = \frac{mv^2}{l} = 169{,}7 \text{ N}$$

Ondas armónicas

28 **Dibuja dos ondas armónicas tales que una tenga el triple de frecuencia y la mitad de amplitud que la otra y que entre las dos exista un desfase de $\pi/2$.**

Las gráficas pedidas, considerando que las dos ondas tienen la misma velocidad de propagación, son:



29 **En un movimiento ondulatorio que se propaga a velocidad constante, la frecuencia y la longitud de onda:**

a) **Son independientes.**

b) **Están relacionadas.**

c) **Están relacionadas solo si la onda se propaga en un medio material.**

Razona y demuestra tu respuesta.

La respuesta correcta es la ***b)***. Están interrelacionadas como se muestra en la expresión **8.6.** Incluso en el caso de que no exista medio material (ondas electromagnéticas), se mantiene la relación, que viene dada por la expresión $c = \lambda f$.

30 **Escribe la función de una onda armónica que se desplaza hacia la derecha en términos de:**

a) ***k* y *v*** ***b)*** **λ y *v*** ***c)*** **λ y *f*** ***d)*** ***v* y *f***

a) $y = A \text{ sen } k\,(x - vt)$

b) $y = A \text{ sen } \dfrac{2\pi}{\lambda}\,(x - vt)$

c) $y = A \text{ sen } 2\pi \left(\dfrac{x}{\lambda} - ft\right)$

d) $y = A \text{ sen } 2\pi f \left(\dfrac{x}{v} - t\right)$

31 PAU **Una onda armónica se mueve hacia la izquierda con una amplitud de 10 cm, una longitud de onda de 0,5 m y un período de 0,2 s. Escribe la ecuación que representa dicha onda si $y = 10$ cm en $x = 0$ en el instante inicial. Determina igualmente la velocidad de propagación de la onda.**

Dado que en $x = 0$ y $t = 0$, la onda presenta su máxima elongación ($y = 0{,}1$ m), resulta conveniente escribir la ecuación en función del coseno:

$$y\,(x,\,t) = A \cos\,(kx + \omega t)$$

El signo positivo denota la propagación hacia la izquierda. A partir de los datos se obtiene $k = 2\pi/\lambda = 4\pi \text{ m}^{-1}$ y $\omega = 2\pi/T = 10\pi$ rad/s. Por tanto, en su forma coseno, la ecuación de la onda es:

$$y\,(x,\,t) = 0{,}1 \cos\,(4\pi\, x + 10\pi\, t) \text{ m}$$

Si se escribe la ecuación en forma seno, se debe introducir una fase inicial $\delta = \pi/2$:

$$y\,(x,\,t) = 0{,}1 \text{ sen }(4\pi\, x + 10\pi\, t + \pi/2) \text{ m}$$

La velocidad de propagación será:

$$v = \frac{\omega}{k} = 2{,}5 \text{ m/s}$$

32 PAU **Escribe la ecuación de una onda armónica que avanza en el sentido positivo de las *x* con una amplitud de 15 cm y una frecuencia de oscilación de 350 Hz, si su velocidad de propagación es de 200 cm/s.**

Del enunciado se desprende que:

$$A = 15 \text{ cm}$$

$$f = 350 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 700\pi \text{ rad/s}$$

$$v = 200 \text{ cm/s} \Rightarrow k = \omega/v = 3{,}5\pi \text{ cm}^{-1}$$

Con esto ya podemos escribir la ecuación de la onda:

$$y = 15 \text{ sen } \pi\,(3{,}5x - 700t) \text{ cm}$$

33 PAU Una onda armónica transversal se desplaza hacia la derecha (sentido positivo) en la dirección X y tiene una amplitud de 4 cm, una longitud de onda de 4 cm y una frecuencia de 8 Hz. Determina:

a) **La velocidad de propagación de la onda.**

b) **La fase inicial si en $x = 0$ y $t = 0$ la elongación es -2 cm.**

c) **La expresión matemática de la onda.**

d) **La distancia que separa dos puntos del eje X que oscilan con una diferencia de fase de $\pi/3$ rad.**

a) La velocidad de propagación es $v = \lambda f = 32$ cm/s.

b) Si la ecuación se escribe en forma coseno:

$$y(x, t) = A \cdot \cos(kx + \omega t + \delta)$$

Sabemos la elongación en $x = 0$ y $t = 0$, luego:

$$y(0, 0) = 4 \cos \delta = -2 \Rightarrow \delta = 2\pi/3$$

Mientras que si la ecuación se escribe en forma seno:

$$y(0, 0) = 4 \operatorname{sen} \delta = -2 \Rightarrow \delta = -\pi/6$$

c) Dado que $k = 2\pi/\lambda = \pi/2$ cm^{-1} y $\omega = 2\pi f = 16\pi$ rad/s, la ecuación de la onda es, en forma coseno:

$$y(x, t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 16\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{cm}$$

Mientras que en forma seno, será:

$$y(x, t) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x - 16\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \text{cm}$$

d) Sean dos puntos x_1 y x_2. La diferencia de fase entre ellos viene dada por:

$$\Delta\Phi = kx_1 - kx_2 = \frac{\pi}{2}(x_1 - x_2)$$

Dado que la diferencia de fase es de $\pi/3$ rad, se obtiene:

$$\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{2}{3}$$

34 PAU Una onda armónica viene descrita mediante la ecuación siguiente:

$$\mathbf{y = 15 \operatorname{sen} (0{,}4x - 20t) \text{ cm}}$$

Determina:

a) **La amplitud, frecuencia angular y el número de onda.**

b) **La longitud de onda, la frecuencia y el período.**

c) **La velocidad de propagación y el sentido de la propagación.**

a) De la ecuacion de la onda armónica se obtiene directamente:

$$A = 15 \text{ cm}$$
$$\omega = 20 \text{ rad/s}$$
$$k = 0{,}4 \text{ cm}^{-1}$$

b) A partir de los parámetros anteriores, podemos obtener estos:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 15{,}7 \text{ cm}$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3{,}18 \text{ Hz}$$
$$T = \frac{1}{f} = 0{,}31 \text{ s}$$

c) La velocidad de propagación será $v = \lambda f = 50$ cm/s. Se llega a este mismo valor si se utiliza la expresión $v = \omega/k$.

A la vista del signo que hay dentro de la función seno, sabemos que la onda se propaga hacia la derecha (x crecientes).

35 PAU Una onda armónica viene dada por la ecuación:

$$\mathbf{y = 10 \operatorname{sen} 3\pi (3x + 30t) \text{ cm}}$$

a) **¿En qué sentido se desplaza?**

b) **Halla su amplitud, frecuencia, período y longitud de onda.**

c) **¿A qué velocidad se propaga?**

a) Se desplaza en el sentido negativo de las x, es decir, hacia la izquierda.

b) De la ecuación se desprende que:

$$A = 10 \text{ cm}$$
$$\omega = 90\pi \text{ rad/s}$$
$$k = 9\pi \text{ cm}^{-1}$$

Por lo que:

$$f = 45 \text{ Hz}$$
$$T = 2{,}22 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}22 \text{ cm}$$

c) Su velocidad de propagación es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = 10 \text{ cm/s}$$

36 Si la onda del ejercicio anterior se propaga por una cuerda, ¿cuál sería la velocidad máxima con la que oscilaría un punto cualquiera de dicha cuerda?

Partiendo de $y = 10 \operatorname{sen} (9\pi x + 90\pi t)$ cm, y derivando, obtenemos:

$$v = \frac{dy}{dt} = 900\pi \cos(9\pi x + 90\pi t) \text{ cm/s}$$

La velocidad máxima de oscilación se alcanza cuando el valor del coseno es igual a la unidad. Por tanto:

$$v_{máx} = 900\pi \text{ cm/s} = 28{,}26 \text{ m/s}$$

37 PAU Escribe la ecuación de una onda que se propaga hacia el sentido negativo de las x y que tiene las siguientes características: $A = 15$ cm, $\lambda = 0{,}4$ cm, $f = 5$ Hz. Ten en cuenta que y toma su valor máximo en $x = 0$ y $t = 0$.

Dado que $\lambda = 0{,}4$ cm y $f = 5$ Hz, entonces:

$$k = 2\pi/\lambda = 5\pi \text{ cm}^{-1}$$
$$\omega = 2\pi f = 10\pi \text{ rad/s}$$

Por consiguiente, la ecuación de la onda tendrá la siguiente forma:

$$y = A \operatorname{sen} (kx + \omega t + \delta)$$

Como $y = A$ en $x = 0$ y $t = 0$, entonces:

$$\operatorname{sen} \delta = 1 \Rightarrow \delta = \pi/2 \text{ rad}$$

Así pues, la ecuación será:

$$y = 15 \operatorname{sen} \pi (5x + 10t + 1/2) \text{ cm}$$

D38 PAU Una partícula oscila verticalmente en la dirección Y, en torno al origen de coordenadas, con una amplitud de 2 cm y una frecuencia $f = 1/8$ Hz. La posición inicial de la partícula en $t = 0$ es $y = 2$ cm. Las oscilaciones de la partícula originan una onda armónica transversal que se propaga hacia X^+. Sabiendo que la distancia entre dos puntos consecutivos del eje X que oscilan con un desfase de π radianes es de 20 cm, determina:

a) **La amplitud y frecuencia angular de la onda armónica.**

b) **Su longitud de onda y su velocidad de propagación.**

c) **La expresión matemática de la onda.**

d) **La expresión de la velocidad de oscilación en función del tiempo para un punto del eje X situado a 20 cm y el valor de dicha velocidad en $t = 10$ s.**

a) La amplitud de la onda es la propia del oscilador, es decir, $A = 2$ cm. Del mismo modo, la frecuencia angular es:

$$\omega = 2\pi f = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

b) La distancia entre dos puntos consecutivos que oscilan con un desfase de π es igual a media longitud de onda. Por tanto:

$$\lambda = 40 \text{ cm} = 0{,}4 \text{ m}$$

Así pues, la velocidad de propagación es:

$$v = \lambda f = 5 \text{ cm/s} = 0{,}05 \text{ m/s}$$

c) Dada la posición inicial del oscilador, resulta conveniente escribir la ecuación en forma coseno, de modo que:

$$y(x, t) = A \cos (kx - \omega t)$$

Puesto que $k = 2\pi/\lambda = 5\pi \text{ m}^{-1}$ y $\omega = \pi/4$ rad/s, resulta:

$$y(x, t) = 0{,}02 \cos \left(5\pi x - \frac{\pi}{4} t\right) \text{ m}$$

d) Derivando y respecto del tiempo, se obtiene:

$$v_{osc} = \frac{dy}{dt} = 5\pi \cdot 10^{-3} \text{ sen} \left(5\pi x - \frac{\pi}{4} t\right) \text{ m/s}$$

Si $x = 20$ cm, resulta:

$$v_{osc} = 5\pi \cdot 10^{-3} \text{ sen} \left(\pi - \frac{\pi}{4} t\right) \text{ m/s}$$

Cuando $t = 10$ s, la velocidad resulta ser:

$$v_{osc} = 1{,}57 \cdot 10^{-2} \text{ sen}(\pi - 2{,}5\pi) = 1{,}57 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

39 PAU **Una onda armónica con una frecuencia de 20 Hz se propaga a una velocidad de 80 m/s. Determina:**

***a)* A qué distancia mínima se encuentran dos puntos cuyos desplazamientos están desfasados 30°.**

***b)* Cuál es el desfase, en un punto dado, entre dos desplazamientos que se producen en dos tiempos que distan 0,01 s.**

a) La distancia mínima entre dos puntos cuyos desplazamientos están desfasados 30°, o $\pi/6$ rad, se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$\Delta\Phi = kx_1 - kx_2 = \frac{\pi}{6}$$

A partir de los datos podemos determinar k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}$$

Por tanto:

$$\frac{\pi}{2}(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{3} \text{ m}$$

b) Al tratarse de un desfase temporal, entonces:

$$\Delta\Phi(t) = \omega(t_1 - t_2) = 2\pi f \cdot 0{,}01 = 0{,}4\pi \text{ rad} = 72°$$

Propagación de energía en ondas armónicas

40 **¿Cómo podemos duplicar la potencia transmitida por una onda armónica que se propaga en una determinada dirección?**

Partiendo de la expresión **8.17**, puede duplicarse la potencia aumentando la frecuencia en un factor raíz de dos, incrementando la amplitud en la misma medida o haciendo que la velocidad de propagación se duplique, lo que en el caso de las ondas que se desplazan en una cuerda podría conseguirse cuadruplicando la tensión de la misma.

41 **Cuando una onda armónica se amortigua, ¿cambia su frecuencia? ¿Y su longitud de onda? ¿Y su velocidad de propagación? ¿Y su amplitud?**

Por su carácter armónico, no cambia ni su frecuencia ni su longitud de onda; en consecuencia, tampoco varía la velocidad de propagación.

Lo que sí se modifica en una onda amortiguada es la amplitud.

42 PAU **Una cuerda sometida a una tensión constante de 60 N tiene una densidad lineal de 150 g/m. ¿Cuánta potencia debe suministrarse a la cuerda para producir ondas armónicas de una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 30 Hz?**

La potencia transmitida a la cuerda viene dada por:

$$P = 2\mu\pi^2 f^2 A^2 v$$

En esta expresión, conocemos μ (0,15 kg/m), así como la frecuencia y la amplitud, y podemos determinar la velocidad, pues:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 20 \text{ m/s}$$

Sustituyendo todos los datos, resulta:

$$P = 533 \text{ W}$$

D 43 PAU **Una cuerda tensa tiene una longitud de 8 m y pesa 8,7 N. Indica la potencia que debemos suministrarle para producir ondas armónicas que respondan a esta ecuación: $y = 10 \text{ sen } \pi(4x - 80t)$ cm.**

Al ser una onda unidimensional, la potencia que debemos suministrar viene dada por la expresión:

$$P = 2\mu\pi^2 f^2 A^2 v$$

donde:

$$\mu = \frac{m}{l} = 0{,}11 \text{ kg/m}$$

$$A = 0{,}1 \text{ m}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{80\pi}{4\pi} = 20 \text{ cm/s} = 0{,}2 \text{ m/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 40 \text{ Hz}$$

Por tanto:

$$P = 6{,}95 \text{ W}$$

Interferencias y ondas estacionarias

44 **¿Se produce alguna alteración en el avance de ondas que interfieren entre sí? Cita un ejemplo que avale tu respuesta.**

No hay interacción en lo relativo a la propagación de cada onda tomada individualmente. Lo único que puede variar es la amplitud resultante en determinados puntos, como consecuencia de la interferencia.

En el *Libro del alumno* (página 223) hemos proporcionado un ejemplo referido al sonido: varias personas pueden mantener conversaciones cruzadas, sin que las voces se estorben unas a otras.

45 **Al originar oscilaciones en un extremo de una cuerda que se halla unida a la pared por el otro extremo, se produce una onda estacionaria que tiene un solo vientre. ¿Qué debemos hacer si deseamos que tenga tres vientres?**

Hay que triplicar la frecuencia de la oscilación.

46 **¿Es siempre cinco veces mayor que la fundamental la frecuencia de un quinto armónico?**

Siempre es, en efecto, cinco veces mayor, como vemos en el caso de la cuerda fija por ambos extremos, recogido en el *Libro del alumno,* y en el de la cuerda fija por un extremo, en el que no existen los armónicos pares y que figura como ampliación en el material fotocopiable número 2.

47 PAU Dos ondas armónicas que se propagan en sentidos opuestos producen una onda estacionaria de ecuación:

$$y = 3 \text{ sen } 0{,}2x \cdot \cos 50t \text{ cm}$$

a) **Determina la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de las ondas componentes.**

b) **¿Cuál es la distancia entre dos nodos consecutivos?**

Si las ondas componentes tienen la forma:

$$y_1 = A \text{ sen } (kx + \omega t);\ y_2 = A \text{ sen } (kx - \omega t)$$

entonces la onda estacionaria resultante vendrá dada por la siguiente expresión:

$$y = (2A \text{ sen } kx) \cdot \cos \omega t \text{ cm}$$

a) De la ecuación de la onda se obtiene que:

$$k = 0{,}2 \text{ cm}^{-1};\ \omega = 50 \text{ rad/s}$$

De este modo:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 10\pi \text{ cm}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{25}{\pi} \text{ Hz}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = 250 \text{ cm/s}$$

b) Los nodos son los puntos de amplitud cero, lo cual se cumplirá cuando:

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi\ldots \Rightarrow 0{,}2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi\ldots$$

De donde:

$$x = 0, 5\pi, 10\pi, 15\pi\ldots$$

Como puede comprobarse, la distancia entre nodos consecutivos es de 5π cm o 15,7 cm.

48 PAU La función de una onda estacionaria en una cuerda fija por sus dos extremos es:

$$y = 0{,}3 \text{ sen } 0{,}2x \cdot \cos 500t \text{ cm}$$

a) **Determina su longitud de onda y su frecuencia.**

b) **¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas transversales en dicha cuerda?**

c) **Si está vibrando en su cuarto armónico, ¿cuál es su longitud?**

a) A partir de la ecuación dada se obtiene:

$$k = 0{,}2 \text{ cm}^{-1};\ \omega = 500 \text{ rad/s}$$

Por consiguiente:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 31{,}41 \text{ cm};\ f = \frac{\omega}{2\pi} = 79{,}62 \text{ Hz}$$

b) La velocidad es:

$$v = \frac{\omega}{k} = 2\,500 \text{ cm/s}$$

c) Si vibra en su cuarto armónico, se cumplirá que:

$$f = 4\frac{v}{2l} \Rightarrow l = \frac{2v}{f} = 62{,}82 \text{ cm}$$

49 PAU Una onda estacionaria se establece en una cuerda de 2 m fija por ambos extremos. Cuando la frecuencia de la excitación es de 200 Hz, la cuerda presenta cuatro vientres.

a) **¿Cuál es la longitud de la onda?**

b) **¿En qué armónico vibra la cuerda?**

c) **¿Cuál es la frecuencia fundamental?**

a) Si la cuerda presenta cuatro vientres, está vibrando en su cuarto armónico, tal como se observa en la figura 8.45 de la página 228. En consecuencia, la longitud de onda es justamente la mitad de la longitud de la cuerda:

$$l = 4\frac{\lambda}{2}$$

En esta expresión, el número 4 indica los vientres que hay. Despejando λ:

$$\lambda = \frac{l}{2} = 1 \text{ m}$$

b) Como hemos visto, la cuerda vibra en el cuarto armónico.

c) La frecuencia fundamental será:

$$f_0 = \frac{f^{IV}}{4} = 50 \text{ Hz}$$

50 PAU Dos ondas armónicas tienen por ecuaciones:

$$y_1 = 3 \text{ sen } \pi\,(4x - 200t) \text{ m}$$

$$y_2 = 3 \text{ sen } \pi\,(4x - 200t - 0{,}15) \text{ m}$$

Halla la amplitud y frecuencia de la onda resultante

Se trata de dos ondas que se propagan en la misma dirección y sentido, pero que están desfasadas. En consecuencia, interfieren produciendo, en un punto x y un tiempo t, una perturbación que vendrá dada por:

$$y = 6 \cos 0{,}075\pi \cdot \text{sen } \pi\,(4x - 200t - 0{,}075) \text{ m}$$

Así pues, la amplitud será:

$$A' = 6 \cos 0{,}075\pi = 5{,}83 \text{ m}$$

Puesto que $\omega = 200\pi$ rad/s, la frecuencia será:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$$