9 Sistemas de ecuaciones lineales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Añade una ecuación al sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x-y+z=3} \\ \boldsymbol{2x+y-3z=0} \end{cases}$ para que resulte un sistema incompatible.

Basta añadir, por ejemplo, la ecuación $x-y+z=0$, ya que ninguna solución de esta ecuación puede verificar a su vez la primera ecuación del sistema.

2. Escribe un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas que tenga como solución la terna (2, 3, 1).

Existen infinitos sistemas posibles, por ejemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=4 \end{cases}$$

3. Escribe en forma matricial y en forma vectorial los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x-y+3z-t=4 \\ x+3y-2z+5t=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1-3x_2=1 \\ x_1+2x_2=0 \\ x_1-2x_2=-1 \\ -3x_1+x_2=2 \end{cases}$

a) Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}z+\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}t=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Escribe en forma de sistema de ecuaciones y en forma vectorial la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Forma de sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ x+3y-2z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$$

Forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}z=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. **Las tres cifras de un múltiplo de 11 suman 19. Si se le cambian de orden las dos primeras cifras disminuye en 450.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita averiguar las cifras de un número que cumpla las condiciones.

b) ¿Hay algún otro sistema, que no sea equivalente, que cumpla también las condiciones del enunciado?

a) Sea $100x + 10y + z$ un número que verifica las condiciones del enunciado. Como las cifras suman 19 y al intercambiar las dos primeras cifras disminuye en 450 tenemos:

$$x + y + z = 19$$

$$(100x + 10y + z) - (100y + 10x + z) = 450 \Rightarrow 90x - 90y = 450 \Rightarrow x - y = 5$$

Por otro lado, al ser múltiplo de 11 se verifica que $x - y + z$ es múltiplo de 11, además, $1 \le x, y, z \le 9$ (ninguna de las cifras puede ser nula, ya que entonces su suma sería entonces como máximo 18), por lo que

$$1 - 9 + 1 \le x - y + z \le 9 - 1 + 9 \Rightarrow -7 \le x - y + z \le 17$$

De este modo se tiene que verificar que $x - y + z = 0$ o $x - y + z = 11$, pero la primera opción junto con $x - y = 5$ daría $z = -5$, lo que no es posible, por tanto, debe ser $x - y + z = 11$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones que nos permite encontrar un número verificando las condiciones del enunciado es

$$\begin{cases} x + y + z = 19 \\ x - y = 5 \\ x - y + z = 11 \end{cases}$$

Observemos que de las dos últimas ecuaciones deducimos que $z = 6$, con lo que, de las dos primeras ecuaciones se deduce que $x = 9$ e $y = 4$, es decir, el único número que verifica las condiciones del enunciado es 946.

b) Según el apartado anterior, no es posible encontrar otro sistema no equivalente al anterior que también verifique las condiciones del enunciado.

6 a 8. **Ejercicios resueltos.**

9. **Aplicando el método de Gauss se han obtenido los siguientes sistemas escalonados. Indica qué tipo de sistema es.**

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ \quad y + 3z = 1 \\ \quad\quad 4z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 9 \\ \quad y - 3z = 0 \\ \quad\quad 0 = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ \quad 2y + z - 2t = 2 \\ \quad\quad 4t = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z + t = 1 \\ \quad -4y + 3z - 2t = -1 \\ \quad\quad 5z + 2t = 2 \\ \quad\quad\quad 7t = 0 \end{cases}$

a) Sistema compatible determinado.

b) Sistema incompatible.

c) Sistema compatible indeterminado.

d) Sistema compatible determinado.

10. Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x+3y-2z=-3 \\ 3x+6y-z=-4 \\ 2x+9y+9z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-y=1 \\ x-4y=-7 \\ -2x+y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-2z+t=2 \\ 2y+z+t=0 \\ 2x+2y-3z+3t=6 \\ -x+y+z+t=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ -4x-y+3z-t=-1 \\ 3y+z-5t=-3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+3y-2z=-3 \\ 3x+6y-z=-4 \\ 2x+9y+9z=2 \end{cases} \underset{\substack{E_2\to 2E_2-3E_1 \\ E_3\to E_3-E_1}}{\longrightarrow} \begin{cases} 2x+3y-2z=-3 \\ 3y+4z=1 \\ 6y+11z=5 \end{cases} \underset{E_3\to E_3-2E_2}{\longrightarrow} \begin{cases} 2x+3y-2z=-3 \\ 3y+4z=1 \\ 3z=3 \end{cases} \to \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-y=1 \\ x-4y=-7 \\ -2x+y=0 \end{cases} \underset{\substack{E_2\to 2E_2-3E_1 \\ E_3\to 2E_3-E_1 \\ E_4\to E_4+E_1}}{\longrightarrow} \begin{cases} 2x+y=4 \\ -5y=-10 \\ -9y=-18 \\ 2y=4 \end{cases} \underset{\substack{E_3\to 5E_3+9E_2 \\ E_4\to 5E_4+2E_2}}{\longrightarrow} \begin{cases} 2x+y=4 \\ -5y=-10 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y=4 \\ -5y=-10 \end{cases} \to \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-2z+t=2 \\ 2y+z+t=0 \\ 2x+2y-3z+3t=6 \\ -x+y+z+t=0 \end{cases} \underset{\substack{E_3\to E_3-2E_1 \\ E_4\to E_4+E_1}}{\longrightarrow} \begin{cases} x+y-2z+t=2 \\ 2y+z+t=0 \\ z+t=2 \\ 2y-z+2t=2 \end{cases} \underset{E_4\to E_4-E_2}{\longrightarrow} \begin{cases} x+y-2z+t=2 \\ 2y+z+t=0 \\ z+t=2 \\ -2z+t=2 \end{cases} \underset{E_4\to E_4+2E_3}{\longrightarrow} \begin{cases} x+y-2z+t=2 \\ 2y+z+t=0 \\ z+t=2 \\ 3t=6 \end{cases} \to \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \\ t=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ -4x-y+3z-t=-1 \\ 3y+z-5t=-3 \end{cases} \underset{E_2\to E_2+2E_1}{\longrightarrow} \begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ y+z+t=1 \\ 3y+z-5t=-3 \end{cases} \underset{E_3\to E_3-3E_2}{\longrightarrow} \begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ y+z+t=1 \\ -2z-8t=-6 \end{cases} \to \begin{cases} x=3-4\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=3-4\lambda \\ t=\lambda \end{cases}$

11 a 13. Ejercicios resueltos.

14. Resuelve como ecuación matricial los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 3x+4y=6 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 6x+6y=-7 \end{cases}$

a) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, con matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Como $|A|=1\neq 0$, la matriz de coeficientes es invertible y $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz de incógnitas es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 \\ 9 \end{pmatrix}$.

b) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$, con matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$.

Como $|A|=30\neq 0$, la matriz de coeficientes es invertible y $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t=\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz de incógnitas es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

15. Resuelve los siguientes sistemas como ecuaciones matriciales.

a) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-2y=2 \\ y+z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ 2x+y-z=1 \\ -x-y+2z=2 \end{cases}$

a) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, con matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = -1 \neq 0$, la matriz de coeficientes es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de incógnitas es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, con matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 7 \neq 0$, la matriz de coeficientes es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de incógnitas es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

16. Expresa en forma matricial los siguientes sistemas y resuélvelos.

a) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z+t=0 \\ x-y-t=-1 \\ -x+z+t=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2z=0 \\ 3y+t=7 \\ x+y=2 \\ 3z+t=-2 \end{cases}$

a) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

con lo que es invertible y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz de incógnitas es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

con lo que es invertible y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj}(A)\right)^t = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 & 3 & -9 \\ -2 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz de incógnitas es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

17. Ejercicio interactivo.

18 a 20. Ejercicios resueltos.

21. Comprueba si son de Cramer cada uno de los siguientes sistemas y en caso de serlo, resuélvelos aplicando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 3x - 6y = 10 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 5y = 4 \\ -x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 5x - 2y - 2z = 3 \\ y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$

a) El número ecuaciones e incógnitas es el mismo, pero $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. El sistema no es de Cramer.

b) El número ecuaciones e incógnitas es el mismo y $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. El sistema es de Cramer con

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-15} = \frac{2}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-20}{-15} = \frac{4}{3} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-15} = \frac{1}{15}$$

c) El número ecuaciones e incógnitas es el mismo y $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$. El sistema es de Cramer con

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{95}{35} = \frac{19}{7} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-45}{35} = -\frac{9}{7}$$

d) El número ecuaciones e incógnitas es el mismo y $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. El sistema es de Cramer con

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15}{3} = 5 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{21}{3} = 7 \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{27}{3} = 9$$

e) El número ecuaciones e incógnitas es el mismo y $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. El sistema es de Cramer con

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10}{10} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{10} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10}{10} = 1$$

f) El número ecuaciones e incógnitas es el mismo y $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El sistema es de Cramer con

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$$

22. Resuelve los siguientes sistemas indeterminados con ayuda de la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 5x+3y-2z=1 \\ 7x+4y+z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y+z-2t=0 \\ -2x-2z+t=3 \\ 3x-y-z-t=-1 \end{cases}$

a) Como $\det(C_1, C_2)=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, podemos hacer $z=\lambda$ y obtener el sistema de Cramer:

$$\begin{cases} 5x+3y=1+2\lambda \\ 7x+4y=3-\lambda \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3 \\ 3-\lambda & 4 \end{vmatrix}}{-1}=5-11\lambda \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1+2\lambda \\ 7 & 3-\lambda \end{vmatrix}}{-1}=-8+19\lambda$$

b) Como $\det(C_1, C_2, C_3)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=16\neq 0$, podemos hacer $t=\lambda$ y obtener el sistema de Cramer:

$$\begin{cases} x-2y+z=2\lambda \\ -2x-2z=3-\lambda \\ 3x-y-z=-1+\lambda \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & -2 & 1 \\ 3-\lambda & 0 & -2 \\ -1+\lambda & -1 & -1 \end{vmatrix}}{16}=\frac{-13+3\lambda}{16}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 3 & -1+\lambda & -1 \end{vmatrix}}{16}=\frac{-12-12\lambda}{16}=\frac{-3-3\lambda}{4}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2\lambda \\ -2 & 0 & 3-\lambda \\ 3 & -1 & -1+\lambda \end{vmatrix}}{16}=\frac{-11+5\lambda}{16}$$

23. Resuelve los siguientes sistemas utilizando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z + t = 0 \\ x - y - t = -1 \\ -x + z + t = 0 \end{cases}$

a) El sistema es de Cramer, ya que hay el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 \cdot 2 = 2 \neq 0$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{2} = 0, \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{2} = -2$$

b) El sistema es de Cramer, ya que hay el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3 \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1$$

24 y 25. Ejercicios resueltos.

26. En cada caso, indica el número de soluciones del sistema.

a) $\text{rg}(A) = 2, \text{rg}(A^*) = 3, n = 3$

b) $\text{rg}(A) = 3, \text{rg}(A^*) = 3, n = 3$

c) $\text{rg}(A) = 2, \text{rg}(A^*) = 2, n = 4$

d) $\text{rg}(A) = 1, \text{rg}(A^*) = 2, n = 4$

a) El sistema es incompatible, es decir, no tiene soluciones, ya que $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$.

b) El sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución, ya que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$.

c) El sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 2, es decir, tiene infinitas soluciones dependientes de dos parámetros, ya que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n$ y $n - \text{rg}(A) = 2$.

d) El sistema es incompatible, ya que $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, es decir, no tiene soluciones.

27. Discute los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x-3y-z=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-3y=1 \\ -3x+2y=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 3x-y+z=1 \\ 2x+2y-z=3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-y=0 \\ 5x+y=1 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-5\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Como $|A^*|=-28\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A^*)=3$. Además, $\text{rg}(A)\leq 2$, con lo que $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Como $|A|=-20\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado.

d) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $|A^*|=0$, tenemos $\text{rg}(A^*)<3$.

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=2$ y el sistema es compatible determinado.

28. Discute los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y-3z=0 \\ x-z=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y+3z=-4 \\ 2x+y=4 \\ -x+y+2z=-1 \\ 3y-z=7 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*| \underset{\substack{C_3\to C_3+C_1 \\ C_4\to C_4+C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A^*)=4$. Además, $\text{rg}(A)\leq 3$, con lo que $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*| \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$, tenemos $\text{rg}(A^*)<4$.

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=15\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado.

29. Discute los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = 3 \\ y - z = 1 \\ x - 3y + 3z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 3 \\ -3x + 9y - 6z = 2 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Como $C_3 = -C_2$, tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.

De igual modo, $\text{rg}(A^*) = \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 2$, ya que los menores de orden 3 que se obtienen ampliando el anterior menor de orden 2 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 3 \\ -3 & 9 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

Las dos filas de A son proporcionales ($F_2 = -\frac{3}{2}F_1$), con lo que todos los menores de orden 2 de A serán nulos y $\text{rg}(A) = 1$. En cambio, las dos filas de A^* no son proporcionales, de hecho, el menor $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 26 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*) = 2$. Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

30 a 32. Ejercicios resueltos.

33. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + 7z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

Como son sistemas homogéneos, se trata de sistemas compatibles. Para saber si son determinados o indeterminados estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y lo comparamos con el número de incógnitas.

a) $\text{rg}(A) = 1$, ya que las filas A son proporcionales ($F_1 = -3F_3, F_2 = -4F_3$), por tanto, el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1. Para resolverlo hacemos $y = \lambda$ y despejamos en la tercera ecuación, obteniendo $x = 2\lambda$.

b) $\text{rg}(A) = 2$, ya que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z = \lambda$, obteniendo el sistema de Cramer:

$$\begin{cases} x - y = -2\lambda \\ x - 2y = -7\lambda \end{cases} \Rightarrow x = 3\lambda, y = 5\lambda, z = \lambda$$

34. **Añade una ecuación al sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{cases}$ para que resulte homogéneo**

a) Determinado. **b)** Indeterminado.

Observemos que el rango de la matriz de coeficientes del sistema homogéneo del enunciado es 2, ya que el menor $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

a) Basta añadir una ecuación que no sea combinación lineal de las del sistema original pero cuyo término independiente siga siendo nulo, por ejemplo, $2x - 3y = 0$. De este modo, el rango de la matriz de coeficientes del nuevo sistema será 3 y, por tanto, el nuevo sistema será compatible determinado.

b) Puesto que el sistema original ya es compatible indeterminado, basta añadir cualquier ecuación que sea combinación lineal de las dadas, por ejemplo, $-x + y + 2z = 0$.

35. **Discute y resuelve los siguientes sistemas homogéneos.**

a) $\begin{cases} -x + 7y - 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + y - 4z = 0 \\ 2x - 5y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Como son sistemas homogéneos, se trata de sistemas compatibles. Para saber si son determinados o indeterminados estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y lo comparamos con el número de incógnitas.

a) $\text{rg}(A) = 2$, ya que $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z = \lambda$, obteniendo el sistema de Cramer:

$$\begin{cases} -x + 7y = 5\lambda \\ 2x - 3y = -\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{8\lambda}{11},\ y = \frac{9\lambda}{11},\ z = \lambda$$

b) $\text{rg}(A) = 3$, ya que $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -53 \neq 0$, por tanto, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial, $x = y = z = 0$.

36. **Se sabe que una solución de un sistema homogéneo indeterminado es $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$. Halla otra solución del sistema que esté formada por números enteros no nulos.**

Cualquier terna proporcional a la del enunciado también será solución. Si queremos que esté formada por números enteros basta multiplicar por cualquier múltiplo no nulo de 6. Por ejemplo, una posible solución sería $(2, 5, 4)$.

37 y 38. **Ejercicios resueltos.**

39. Discute los siguientes sistemas para los distintos valores del parámetro y resuélvelos en el caso de ser compatibles indeterminados.

a) $\begin{cases} kx - y + z = 1 \\ x - y - z = k - 1 \\ x - ky + 2z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} kx + ky + 2z = 1 \\ kx + y + kz = 1 \\ x + ky + z = k \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + my = m \\ mx + my = 0 \\ x + y = m \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + my - z = 0 \\ 2x - 2y + mz = 1 \\ -x + mz = 0 \\ 3x - my = 1 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -k & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \\ 1 & -k & 2 & 2 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 - 3k + 4 = 0 \Rightarrow k = -4,\ k = 1$$

- Para $k \neq -4$ y $k \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $k = -4$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3.$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} k & k & 2 \\ k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} k & k & 2 & 1 \\ k & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & k \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0 \Rightarrow -k^3+2k^2+k-2=0 \Rightarrow k=-1,\ k=1,\ k=2$$

- Para $k\neq -1$, $k\neq 1$ y $k\neq 2$ tenemos $|A|\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $k=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Para resolver el sistema en este caso, observemos que según el menor de orden 2 anterior, debemos eliminar la tercera ecuación y hacer $z=\lambda$ para obtener un sistema de Cramer:

  $$\begin{cases} -x-y=1-2\lambda \\ -x+y=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-2+\lambda}{2},\ y=\frac{3\lambda}{2},\ z=\lambda$$

- Para $k=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  Observemos que, tanto en A como en A^*, $F_2=F_3$, por lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Para resolver el sistema en este caso, observemos que según lo anterior podemos eliminar la tercera ecuación. Para decidir que incógnita será un parámetro observemos que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, con lo que hacemos $x=\lambda$ para obtener un sistema de Cramer:

  $$\begin{cases} y+2z=1-\lambda \\ y+z=1-\lambda \end{cases} \Rightarrow x=\lambda,\ y=1-\lambda,\ z=0$$

- Para $k=2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ m & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & m & m \\ m & m & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, con rango máximo 2 y 3, respectivamente.

$$|A^*| = 0 \Rightarrow -m^3 + 3m^2 = 0 \Rightarrow m = 0,\ m = 3$$

- Para $m \neq 0$ y $m \neq 3$ tenemos $|A^*| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3$ y $\text{rg}(A) \leq 2$, con lo que el sistema es incompatible.

- Para $m = 0$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) =$ nº de incógnitas $= 2$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $m = 3$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

  En A, C_1 y C_2 coinciden, por tanto, $\text{rg}(A) = 1$.

  En A^*, el menor $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A^*) = 2$.

  Así, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

d) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & -2 & m \\ -1 & 0 & m \\ 3 & -m & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 0 \\ 2 & -2 & m & 1 \\ -1 & 0 & m & 0 \\ 3 & -m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3 y 4, respectivamente.

$$|A^*| = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1,\ m = 2$$

- Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$ tenemos $|A^*| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A^*) = 4$ y $\text{rg}(A) \leq 3$, con lo que el sistema es incompatible.

- Para $m = 1$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  En A y A^* el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, ampliándolo con C_1 y F_2 obtenemos el menor $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) =$ nº de incógnitas $= 3$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $m = 2$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  En A y A^* el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, ampliándolo con C_1 y F_1 obtenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$.

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) =$ nº de incógnitas $= 3$ y el sistema es compatible determinado.

40. Discute los siguientes sistemas para los distintos valores del parámetro.

a) $\begin{cases} 2x - ky = 1 \\ kx - 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax + 3y - z = -3 \\ x + ay + z = -a \\ ax + y + z = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - ay - z = 2 \\ ax + y + 2z = 1 \\ (a+1)x - y + z = a+1 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -k \\ k & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -k & 1 \\ k & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 2 y 3, respectivamente.

$$|A^*| = 0 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow k = -2,\ k = 3$$

- Para $k \neq -2$ y $k \neq 3$ tenemos $|A^*| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3$ y $\text{rg}(A) \leq 2$, con lo que el sistema es incompatible.

- Para $k = -2$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  En A, C_1 y C_2 coinciden, por tanto, $\text{rg}(A) = 1$. En A^*, el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A^*) = 2$.

  Así, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k = 3$ tenemos $|A^*| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible determinado.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 & -3 \\ 1 & a & 1 & -a \\ a & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = -2,\ a = 1$$

- Para $a \neq -2$ y $a \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $a = -2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

- Para $a = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Observemos que llegamos a la misma conclusión si nos damos cuenta que, tanto en A como en A^*, tenemos $F_2 = F_3$.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$$

- Para $m \neq 0$ y $m \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) =$ nº de incógnitas $= 3$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $m = 0$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $m = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

d) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 & 2 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 4 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 2$$

- Para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $a = -2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

- Para $a = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

41. **Ejercicio interactivo.**

42 a 46. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Sistemas de ecuaciones. Soluciones

47. Escribe cada uno de los siguientes sistemas en forma matricial y en forma vectorial.

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + 2z + t = 1 \\ x + 4y - 2z + t = 0 \\ -2x + y + z - 2t = 2 \end{cases}$

a) Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

48. Escribe un sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada sea:

$$\boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - 2y + z + 2t = 3 \\ y + 2z - t = 2 \end{cases}$$

49. Escribe un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas que tenga entre sus soluciones (2, 1, –3).

Por ejemplo, $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

50. Determina una matriz *A* para que el sistema $\boldsymbol{AX = 0}$ sea equivalente a la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Trasponiendo la ecuación matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución de sistemas

51. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+5y-2z=1 \\ -x+3y-2z=-6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+4y+3z=1 \\ x+y+z=3 \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -x+2y-z=-2 \\ 3x-4y=14 \\ 2x-z=14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+y-3z=6 \\ 3x+2z=0 \\ -2x-2y+z=-3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ x+3y=5 \\ -2x-y=0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x-y-2z=-3 \\ -x+2y+z=0 \\ 4x+5y+z=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+5y-2z=1 \\ -x+3y-2z=-6 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2-2E_1 \\ E_3\to E_3+E_1}]{} \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y=-1 \\ 5y-3z=-5 \end{cases} \to \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+y-3z=6 \\ 3x+2z=0 \\ -2x-2y+z=-3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2+3E_1 \\ E_3\to E_3-2E_1}]{} \begin{cases} -x+y-3z=6 \\ 3y-7z=18 \\ -4y+7z=-15 \end{cases} \xrightarrow[E_3\to E_3+E_2]{} \begin{cases} -x+y-3z=6 \\ 3y-7z=18 \\ -y=-3 \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{18}{7} \\ y=-3 \\ z=-\dfrac{27}{7} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+4y+3z=1 \\ x+y+z=3 \\ -x+2y-z=0 \end{cases} \xrightarrow[E_1\leftrightarrow E_2]{} \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+4y+3z=1 \\ -x+2y-z=0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_3-2E_1 \\ E_3\to E_3+E_1}]{} \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=-5 \\ 3y=3 \end{cases} \to \begin{cases} x=9 \\ y=1 \\ z=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ x+3y=5 \\ -2x-y=0 \end{cases} \xrightarrow[E_1\leftrightarrow E_2]{} \begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+4y=6 \\ -2x-y=0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2-2E_1 \\ E_3\to E_3+2E_1}]{} \begin{cases} x+3y=5 \\ -2y=-4 \\ 5y=10 \end{cases} \xrightarrow[E_3\to 2E_3+5E_2]{} \begin{cases} x+3y=5 \\ -2y=-4 \\ 0=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+3y=5 \\ -2y=-4 \end{cases} \to \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x+2y-z=-2 \\ 3x-4y=14 \\ 2x-z=14 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2+3E_1 \\ E_3\to E_3+2E_1}]{} \begin{cases} -x+2y-z=-2 \\ 2y-3z=8 \\ 4y-3z=10 \end{cases} \xrightarrow[E_3\to E_3-E_2]{} \begin{cases} -x+2y-z=-2 \\ 2y-3z=8 \\ 2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x=6 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-y-2z=-3 \\ -x+2y+z=0 \\ 4x+5y+z=2 \end{cases} \xrightarrow[E_1\leftrightarrow E_2]{} \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ 2x-y-2z=-3 \\ 4x+5y+z=2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2+2E_1 \\ E_3\to E_3+4E_1}]{} \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ 3y=-3 \\ 13y+5z=2 \end{cases} \to \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$

52. Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ -2x+3y+3t=-2 \\ 2y-2z-5t=12 \\ -x+2y-2z-2t=-3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y-z+t=4 \\ 2x+4y+t=8 \\ x-y+t=2 \\ 4x+8y+9z+t=14 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ -2x+3y+3t=-2 \\ 2y-2z-5t=12 \\ -x+2y-2z-2t=-3 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2+2E_1 \\ E_4\to E_4+E_1}]{} \begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ -y+2z+t=-2 \\ 2y-2z-5t=12 \\ -z-3t=-3 \end{cases} \xrightarrow[E_3\to E_3+2E_2]{} \begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ -y+2z+t=-2 \\ 2z-3t=8 \\ -z-3t=-3 \end{cases} \xrightarrow[E_4\to E_4-E_3]{} \begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ -y+2z+t=-2 \\ 2z-3t=8 \\ -3z=-11 \end{cases} \to$

$\to x=\dfrac{43}{3},\ y=\dfrac{82}{9},\ z=\dfrac{11}{3},\ t=-\dfrac{2}{9}$

b) $\begin{cases} x+y-z+t=4 \\ 2x+4y+t=8 \\ x-y+t=2 \\ 4x+8y+9z+t=14 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2\to E_2-2E_1 \\ E_3\to E_3-E_1 \\ E_4\to E_4-4E_1}]{} \begin{cases} x+y-z+t=4 \\ 2y+2z-t=0 \\ -2y+z=-2 \\ 4y+13z-3t=-2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_3\to E_3+E_2 \\ E_4\to E_4-2E_2}]{} \begin{cases} x+y-z+t=4 \\ 2y+2z-t=0 \\ 3z-t=-2 \\ 9z-t=-2 \end{cases} \xrightarrow[E_4\to E_4-E_3]{} \begin{cases} x+y-z+t=4 \\ 2y+2z-t=0 \\ 3z-t=-2 \\ 6z=0 \end{cases} \to$

$\to x=1,\ y=1,\ z=0,\ t=2$

53. Resuelve los siguientes sistemas transformándolos en ecuaciones matriciales.

a) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + 2z = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x + z = 4 \\ -x + y = -2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - z = 3 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$

a) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, con matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 11 \neq 0$, con lo que A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de incógnitas es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, con matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 1 \neq 0$, con lo que A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de incógnitas es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, con matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 2 \neq 0$, con lo que A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

d) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, con matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 5 \neq 0$, con lo que A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

54. Resuelve los siguientes sistemas utilizando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+4y=7 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ x-y+2z=1 \\ -x-2y+z=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x-y+3z=2 \\ 2x+z=1 \\ x+2y-z=-1 \end{cases}$

a) El sistema es de Cramer, ya que hay el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{1} = -8 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{14}{1} = 14$$

b) El sistema es de Cramer, ya que hay el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$.

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-15}{-11} = \frac{15}{11} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-11} = \frac{8}{11}$$

c) El sistema es de Cramer, ya que hay el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{11}{9} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-32}{9} = -\frac{32}{9} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-17}{9} = -\frac{17}{9}$$

d) El sistema es de Cramer, ya que hay el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$.

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{11} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{11} = -\frac{3}{11} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{7}{11}$$

55. Aplica la regla de Cramer para hallar las soluciones de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x + t = 0 \\ 2x + y = 1 \\ 2y + z = 2 \\ x + 2t = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2y + z - 2t = 1 \\ x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 4t = 0 \end{cases}$

a) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{3} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{3} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{3} = 0 \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{3} = 0$$

b) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 2 \cdot 26 = 68$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{68} = -\frac{2}{17} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{20}{68} = \frac{5}{17}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{68} = \frac{1}{17} \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-12}{68} = -\frac{3}{17}$$

56. Resuelve los siguientes sistemas indeterminados.

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 5x + y - z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 2y + z - t = 1 \\ x + y + z + 2t = 0 \\ 3x + y - 2t = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + y - z = 6 \\ 4x + 3y - 2z = 23 \end{cases}$

a) Como $\det(C_2, C_3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, podemos hacer $x = \lambda$ y obtener un sistema de Cramer:

$$\begin{cases} -2y + z = 1 - 3\lambda \\ y - z = -1 - 5\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = 8\lambda,\ z = 1 + 13\lambda$$

b) Como $\det(C_1, C_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, podemos hacer $x_3 = \lambda$ y obtener un sistema de Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 + 2\lambda \\ x_1 - x_2 = 1 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{5 - 7\lambda}{4},\ x_2 = \frac{1 + 5\lambda}{4},\ x_3 = \lambda$$

c) Como $\det(C_1, C_2, C_3) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, podemos hacer $t = \lambda$ y obtener un sistema de Cramer:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 + \lambda \\ x + y + z = -2\lambda \\ 3x + y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+\lambda & -2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 \\ 2+2\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{7 + 9\lambda}{11} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 3 & 2+2\lambda & 0 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{1 - 5\lambda}{11} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -2\lambda \\ 3 & 1 & 2+2\lambda \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-8 - 26\lambda}{11}$$

d) El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, con lo que, dado que sabemos que el sistema es indeterminado, el grado de indeterminación será 1 y, considerando el menor de orden 2 anterior, podemos resolverlo eliminando la tercera ecuación y tomando $z = \lambda$ para obtener un sistema de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + y = 6 + \lambda \end{cases} \Rightarrow x = 5 - \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = \lambda$$

57. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x - 2y + 7z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

a) $$\begin{cases} x - 2y + 7z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3 - E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1} \begin{cases} x - 2y + 7z = 3 \\ 3y - 15z = -6 \\ y - 5z = -2 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to 3E_3 - E_2]{} \begin{cases} x - 2y + 7z = 3 \\ 3y - 15z = -6 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 7z = 3 \\ 3y - 15z = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

NOTA: El determinante de la matriz de coeficientes es nulo, por lo que no se puede usar el método de Cramer directamente, deberíamos discutir previamente el sistema para verificar si es compatible indeterminado y determinar qué ecuación o ecuaciones se pueden eliminar y qué incógnita o incógnitas se toman como parámetros.

b) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x-y-z=4 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3y+z=1 \\ 2x+y=3 \\ x-y-z=4 \end{cases} \xrightarrow[E_4 \to E_4 - E_1]{E_3 \to E_3 - 2E_1} \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3y+z=1 \\ -3y-2z=-1 \\ -3y-2z=2 \end{cases} \xrightarrow{E_4 \to E_4 - E_1} \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3y+z=1 \\ -3y-2z=-1 \\ 0=-3 \end{cases}$

El sistema es incompatible, no tiene solución.

NOTA: Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ podríamos haber pensado en aplicar la regla de Cramer al sistema resultante de eliminar la cuarta ecuación y hacer $t = \lambda$, pero para ello tendríamos que haber comprobado si el sistema es compatible indeterminado y resulta no serlo.

58. **Resuelve el sistema:**

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por lo que podemos usar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

59. **Resuelve el siguiente sistema.**

$$\begin{cases} \mathbf{x-2y+z-3t=-4} \\ \mathbf{x+2y+z+3t=4} \\ \mathbf{2x-4y+2z-6t=-8} \\ \mathbf{2x+2z=0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+z-3t=-4 \\ x+2y+z+3t=4 \\ 2x-4y+2z-6t=-8 \\ 2x+2z=0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_3 \to E_3 - 2E_1 \\ E_4 \to E_4 - 2E_1}]{E_2 \to E_2 - E_1} \begin{cases} x-2y+z-3t=-4 \\ 4y+6t=8 \\ 0=0 \\ 4y+6t=8 \end{cases} \xrightarrow{E_2 = E_4} \begin{cases} x-2y+z-3t=-4 \\ 4y+6t=8 \end{cases} \to x=-\mu,\ y=\frac{4-3\lambda}{2},\ z=\mu,\ t=\lambda$$

60. **Resuelve los siguientes sistemas indeterminados con grado de indeterminación 2.**

a) $\begin{cases} 2x+3y-z+3t=1 \\ -3x+y+z-2t=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ 2x-y-3z=-3 \end{cases}$

a) Como $\det(C_3, C_4) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, podemos hacer $x = \lambda$, $y = \mu$ y obtener un sistema de Cramer:

$$\begin{cases} -z+3t=1-2\lambda-3\mu \\ z-2t=2+3\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow x=\lambda,\ y=\mu,\ z=8+5\lambda-9\mu,\ t=3+\lambda-4\mu$$

b) Como $\det(C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, podemos hacer $x = \lambda$, $z = \mu$ y obtener un sistema de Cramer:

$$\begin{cases} y-t=-\lambda+\mu \\ y=-3-2\lambda+3\mu \end{cases} \Rightarrow x=\lambda,\ y=-3-2\lambda+3\mu,\ z=\mu,\ t=-3-\lambda+2\mu$$

61. Determina las soluciones de los siguientes sistemas en función del parámetro *m*.

a) $\begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + mz = 0 \\ x + my = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - my + 2z = 2 \\ 2x + y + mz = 0 \\ -x + my + z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + y - mz = 0 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} m & 2 & m+1 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix}$, con rango máximo 2.

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = -2, m = 2$$

- Para $m \neq -2$ y $m \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & 2 \\ 3 & m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 + m - 6}{m^2 - 4} = \frac{m+3}{m+2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} m & m+1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m-2}{m^2-4} = \frac{1}{m+2}$$

- Para $m = -2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

  Como las filas de *A* son proporcionales, $\text{rg}(A) = 1$. En cambio, las filas de A^* no son proporcionales, con lo que $\text{rg}(A^*) = 2$. Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $m = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

  Como las filas de *A* son iguales, $\text{rg}(A) = 1$. También las filas de A^* son iguales, con lo que $\text{rg}(A^*) = 1$. Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Para resolverlo eliminamos una de las dos ecuaciones y hacemos $y = \lambda$, con lo que obtenemos $2x = 3 - 2\lambda \Rightarrow x = \frac{3 - 2\lambda}{2}$.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & m & 0 \\ 1 & m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow 3m - m^2 = 0 \Rightarrow m = 0, m = 3$$

- Para $m \neq 0$ y $m \neq 3$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m}{3m - m^2} = \frac{1}{3-m} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & m \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2-m}{m^2 - 3m} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{3m - m^2}$$

- Para $m = 0$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $m = 3$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 2 \\ 2 & 1 & m \\ -1 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -m & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m & 0 \\ -1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow 6m + 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

- Para $m \neq -\frac{1}{2}$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -m & 2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3m^2}{6m+3} = \frac{-m^2}{2m+1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & m \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3m}{6m+3} = \frac{-m}{2m+1} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & m & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6m+3}{6m+3} = 1$$

- Para $m = -\frac{1}{2}$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

d) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & 1 & -m & 0 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -5m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{5}$$

- Para $m \neq \frac{1}{5}$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 1 & m \\ 0 & 1 & -m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-m^2 - m}{-5m + 1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & m \\ 1 & 0 & -m \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-m^2 + 2m}{-5m + 1} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2m + 1}{-5m + 1}$$

- Para $m = \frac{1}{5}$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{5} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

Clasificación de sistemas

62. **Clasifica y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones.**

a) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 2x+2y+z=1 \\ 4x+5y+2z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+z=2 \\ x+y=3 \\ 2x-z=-2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 3y+t=4 \\ -x+y-t=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-7y=1 \\ x+2y=2 \\ -x+y=-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1+x_2=5 \\ 3x_1+2x_2+x_3=0 \\ -2x_1+3x_3=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=-3 \\ x-y=-3 \\ -x+2y=4 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Como las dos últimas columnas de A^* son iguales los rangos de A y A^* coinciden, es decir, el sistema es compatible. Como $|A|=0$ y el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

Para resolver el sistema eliminamos la tercera ecuación y hacemos $z=\lambda$, obteniendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y=1-\lambda \\ 2x+2y=1-\lambda \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1-\lambda}{2},\ y=0,\ z=\lambda$$

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*|=-2\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A^*)=3$. Además, $\text{rg}(A)\leq 2$, con lo que $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*| \underset{\substack{F_3\to F_3-F_1 \\ F_4\to F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{vmatrix} \underset{F_2=F_3}{=} 0$, tenemos $\text{rg}(A^*)<4$. Como el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$, tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer al sistema que se obtiene eliminando la primera ecuación:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-3}{-3}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-6}{-3}=2 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-12}{-3}=4$$

d) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}5&1&0\\3&2&1\\-2&0&3\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}5&1&0&5\\3&2&1&0\\-2&0&3&1\end{pmatrix}$.

Como $|A|=19\neq 0$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}5&1&0\\0&2&1\\1&0&3\end{vmatrix}}{19}=\frac{31}{19}\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}5&5&0\\3&0&1\\-2&1&3\end{vmatrix}}{19}=-\frac{60}{19}\qquad x_3=\frac{\begin{vmatrix}5&1&5\\3&2&0\\-2&0&1\end{vmatrix}}{19}=\frac{27}{19}$$

e) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}2&0&-1&0\\1&2&-1&0\\0&3&0&1\\-1&1&0&-1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2&0&-1&0&1\\1&2&-1&0&2\\0&3&0&1&4\\-1&1&0&-1&-1\end{pmatrix}$.

Como $|A|=\begin{vmatrix}2&0&-1&0\\1&2&-1&0\\0&3&0&1\\-1&1&0&-1\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&-1&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&0&-1\\1&2&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=4$ y el sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&0&-1&0\\2&2&-1&0\\4&3&0&1\\-1&1&0&-1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2&1&-1&0\\1&2&-1&0\\0&4&0&1\\-1&-1&0&-1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&0&1&0\\1&2&2&0\\0&3&4&1\\-1&1&-1&-1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1\qquad t=\frac{\begin{vmatrix}2&0&-1&1\\1&2&-1&2\\0&3&0&4\\-1&1&0&-1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

f) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&1&-3\\1&-1&-3\\-1&2&4\end{pmatrix}$.

El menor $\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Los dos posibles menores de orden 3 que se pueden considerar en A^* ampliando este menor son nulos:

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\1&-1&-3\\-1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-3\\1&-1&-3\\-1&2&4\end{vmatrix}=0$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible determinado.

Teniendo en cuenta el menor de orden 2 considerado, resolvemos el sistema reduciéndolo a un sistema 2 x 2 eliminando las dos primeras ecuaciones: $\begin{cases}x-y=-3\\-x+2y=4\end{cases}\Rightarrow x=-2,\ y=1$

63. Estudia cuántas soluciones tienen los siguientes sistemas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}y + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}z = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*| = 1 \neq 0$, tenemos $\text{rg}(A^*) = 3$. Además, $\text{rg}(A) \leq 2$, con lo que $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible, es decir, no tiene ninguna solución.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = 27 \neq 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

Discusión y resolución de sistemas con parámetros

64. Discute los siguientes sistemas para los distintos valores del parámetro y resuélvelos cuando sea posible.

a) $\begin{cases} mx - y = m \\ 3x + (m-4)y = m+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax - y = 1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = a \\ (1-a)x - y = 1 \\ ax + y = a \end{cases}$

d) $\begin{cases} kx - 2y = k \\ -6x + (k-1)y = -k-2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \end{cases}$

f) $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m \\ 2mx + 2y = m+1 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{pmatrix}$, con rango máximo 2.

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = 1, m = 3$$

- Para $m \neq 1$ y $m \neq 3$ tenemos $|A| \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ m+2 & m-4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 - 3m + 2}{m^2 - 4m + 3} = \frac{m-2}{m-3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 - m}{m^2 - 4m + 3} = \frac{m}{m-3}$$

- Para $m = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

  Tanto las filas de A como las de A^* son proporcionales, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Para resolverlo eliminamos una de las dos ecuaciones y hacemos $y = \lambda$, con lo que obtenemos $x = 1 + \lambda$.

- Para $m = 3$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

  Las filas de A son proporcionales, con lo que $\text{rg}(A) = 1$. En cambio, las filas de A^* no son proporcionales, con lo que $\text{rg}(A^*) = 2$. Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & 2 \end{pmatrix}$, con rango máximo 2.

$$|A|=0\Rightarrow a^2-a+1=0\Rightarrow \text{Sin solución}$$

Por tanto, para cualquier valor de *a* tenemos $|A|\neq 0$, es decir, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a+1}{a^2-a+1} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a-1}{a^2-a+1}$$

c) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1-a & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1-a & -1 & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$, con rango máximo 2 y 3 respectivamente.

$$|A^*|=0\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=-1,\ a=2$$

- Para $a\neq -1$ y $a\neq 2$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=3$. Como $\text{rg}(A)\leq 2$ tenemos $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=-1$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible determinado. Además, lo podemos resolver eliminando la primera ecuación: $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -x+y=-1 \end{cases}\Rightarrow x=0,\ y=-1$

- Para $a=2$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible determinado. Además, lo podemos resolver eliminando la tercera ecuación: $\begin{cases} 2x+y=2 \\ -x-y=1 \end{cases}\Rightarrow x=3,\ y=-4$

d) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} k & -2 \\ -6 & k-1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} k & -2 & k \\ -6 & k-1 & -k-2 \end{pmatrix}$, con rango máximo 2.

$$|A|=0\Rightarrow k^2-k-12=0\Rightarrow k=-3,\ k=4$$

- Para $k\neq -3$ y $k\neq 4$ tenemos $|A|\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} k & -2 \\ -k-2 & k-1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{k^2-3k-4}{k^2-k-12}=\frac{k+1}{k+3} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} k & k \\ -6 & -k-2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-k^2+4k}{k^2-k-12}=\frac{-k}{k+3}$$

- Para $k=-3$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

  Las filas de *A* son proporcionales, con lo que $\text{rg}(A)=1$. En cambio, las filas de A^* no son proporcionales, con lo que $\text{rg}(A^*)=2$. Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k=4$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

  Tanto las filas de *A* como las de A^* son proporcionales, por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Para resolverlo eliminamos una de las dos ecuaciones y hacemos $x=\lambda$, con lo que obtenemos $y=-2+2\lambda$.

e) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & a\\ 5 & 3a-1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & a & 2\\ 5 & 3a-1 & 6-a\end{pmatrix}$, con rango máximo 2 y 3 respectivamente.

$$|A^*|=0\Rightarrow -a^2+3a-2=0\Rightarrow a=1,\ a=2$$

- Para $a\neq 1$ y $a\neq 2$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=3$. Como $\text{rg}(A)\leq 2$ tenemos $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=1$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 5 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible determinado. Además, lo podemos resolver eliminando la tercera ecuación: $\begin{cases}x+y=1\\ 2x+y=2\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=0$

- Para $a=2$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 5 & 5\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

  Las columnas de A son proporcionales, con lo que $\text{rg}(A)=1$. En cambio, las columnas de A^* no son proporcionales, por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=2$. Por tanto, $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

f) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}m & 1\\ 1 & m\\ 2m & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & m\\ 2m & 2 & m+1\end{pmatrix}$, con rango máximo 2 y 3, respectivamente.

$$|A^*|=0\Rightarrow m^3-m^2-m+1=0\Rightarrow m=-1,\ m=1$$

- Para $m\neq -1$ y $m\neq 1$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=3$. Como $\text{rg}(A)\leq 2$ tenemos $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $m=-1$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

  Las columnas de A son proporcionales, con lo que $\text{rg}(A)=1$. En cambio, las columnas de A^* no son proporcionales, por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=2$. Por tanto, $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $m=1$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

  Tanto las columnas de A como las de A^* son proporcionales, por tanto, tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=1<\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1. Además, lo podemos resolver eliminando dos ecuaciones y haciendo $y=\lambda$, obteniendo $x=1-\lambda$.

65. Discute los siguientes sistemas para los distintos valores del parámetro y resuélvelos cuando sea posible.

a) $\begin{cases}(a+2)x+(a+1)y=-6\\ x+5y=a\\ x+y=-5\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y+z=2\\ x+ay+a^2z=-1\\ ax+a^2y+a^3z=2\end{cases}$

c) $\begin{cases}x-y+2z=a\\ -x+y-az=1\\ x+ay+(1+a)z=-1\end{cases}$

d) $\begin{cases}x+y+z=2\alpha-1\\ 2x+y+\alpha z=\alpha\\ x+\alpha y+z=1\end{cases}$

e) $\begin{cases}kx+2y+z=1\\ 2x+ky+z=k\\ 5x+2y+z=1\end{cases}$

f) $\begin{cases}x+(k+1)y+2z=-1\\ kx+y+z=k\\ (k-1)x-2y-z=k+1\end{cases}$

g) $\begin{cases}x+ky+z=k+2\\ kx+y+z=k\\ x+y+kz=-2(k+1)\end{cases}$

h) $\begin{cases}(m-1)x+y+z=m\\ x+(m-1)y+z=0\\ y+z=1\end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}a+2 & a+1\\ 1 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}a+2 & a+1 & -6\\ 1 & 5 & a\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix}$, con rango máximo 2 y 3, respectivamente.

$$|A^*|=0\Rightarrow -21a-21=0\Rightarrow a=-1$$

- Para $a\neq -1$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=3$. Como $\text{rg}(A)\leq 2$ tenemos $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.
- Para $a=-1$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -6\\ 1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 5\end{vmatrix}=5\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=2$ y el sistema es compatible determinado. Además, lo podemos resolver eliminando la tercera ecuación: $\begin{cases}x=-6\\ x+5y=-1\end{cases}\Rightarrow x=-6,\ y=1$

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ a & a^2 & a^3\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & a & a^2 & -1\\ a & a^2 & a^3 & 2\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

El determinante de A es 0 para cualquier valor de a, con lo que el sistema nunca es compatible determinado.

El menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{vmatrix}=a-1$ se anula si $a=1$, ampliando este menor con la columna de términos independientes tenemos $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & a & -1\\ a & a^2 & 2\end{vmatrix}=a^2+a-2$, que se anula si $a=-2$ o $a=1$.

- Para $a\neq 1$ y $a\neq -2$, tenemos $\text{rg}(A)=2$ y $\text{rg}(A^*)=3$, con lo que el sistema es incompatible.
- Para $a=-2$, tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1. Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la tercera ecuación y tomando $z=\lambda$:

$$\begin{cases}x+y=2-\lambda\\ x+ay=-1-a^2\lambda\end{cases}\Rightarrow x=\frac{(2a+1)+a(a-1)\lambda}{a-1},\ y=-\frac{3+(a^2-1)\lambda}{a-1},\ z=\lambda$$

- Para $a=1$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=1$ y $\text{rg}(A^*)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=2$, con lo que el sistema es incompatible.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -a\\ 1 & a & 1+a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & a\\ -1 & 1 & -a & 1\\ 1 & a & 1+a & -1\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=-1, a=2$$

- Para $a\neq -1$ y $a\neq 2$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}a & -1 & 2\\ 1 & 1 & -a\\ -1 & a & 1+a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a^2+3}{a-2}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ -1 & 1 & -a\\ 1 & -1 & 1+a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{1}{a-2}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & a & -1\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{a+1}{a-2}$$

- Para $a=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la primera ecuación y tomando $x=\lambda$:

$$\begin{cases}y+z=1+\lambda\\ -y=-1-\lambda\end{cases} \Rightarrow x=\lambda,\ y=1+\lambda,\ z=0$$

- Para $a=2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 2\\ -1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-9\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

d) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\alpha-1 \\ 2 & 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = 2$$

- Para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\alpha-1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(\alpha^2-1)}{\alpha-2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\alpha-1 & 1 \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\alpha-1 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3\alpha}{\alpha-2}$$

- Para $\alpha = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  Tanto en A como en A^* la primera y tercera fila coinciden, así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Para resolverlo observemos que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, con lo que podemos eliminar la tercera ecuación y tomar $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ 2x + y = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1 - \lambda, z = 0$$

- Para $\alpha = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

e) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 & k \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - 7k + 10 = 0 \Rightarrow k = 2, k = 5$$

- Para $k \neq 2$ y $k \neq 5$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k-1}{k-2} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & k \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k}{k-2}$$

- Para $k = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k = 5$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la primera ecuación y tomando $x = \lambda$:

  $$\begin{cases} 5y + z = 5 - 2\lambda \\ 2y + z = 1 - 5\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = \frac{4 + 3\lambda}{3},\ z = \frac{-5 - 21\lambda}{3}$$

f) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ k-1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2},\ k = 2$$

- Para $k \neq \frac{1}{2}$ y $k \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) =$ nº de incógnitas $= 3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k+1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2k+1}{2k-1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & k & 1 \\ k-1 & k+1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k+1 & -1 \\ k & 1 & k \\ k-1 & -2 & k+1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2k}{2k-1}$$

- Para $k = \frac{1}{2}$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la tercera ecuación y tomando $x = \lambda$:

$$\begin{cases} 3y + 2z = -1 - \lambda \\ y + z = 2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = -5 + 3\lambda,\ z = 7 - 5\lambda$$

g) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^3 + 3k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2,\ k = 1$$

- Para $k \neq -2$ y $k \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k+2 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ -2(k+1) & 1 & k \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k}{k-1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k+2 & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & -2(k+1) & k \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k+2}{k-1} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & k+2 \\ k & 1 & k \\ 1 & 1 & -2(k+1) \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2(k+1)}{k-1}$$

- Para $k=-2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la tercera ecuación y tomando $z=\lambda$:

  $$\begin{cases}x-2y=-\lambda\\ -2x+y=-2-\lambda\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4+3\lambda}{3},\ y=\frac{2+3\lambda}{3},\ z=\lambda$$

- Para $k=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

  Todas las filas de *A* coinciden, por tanto $\text{rg}(A)=1$.

  Las tres primeras columnas de A^* son iguales, por tanto $\text{rg}(A^*)=\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\\ 1 & -4\end{pmatrix}=2$.

  Así, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

h) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}m-1 & 1 & 1\\ 1 & m-1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}m-1 & 1 & 1 & m\\ 1 & m-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow m^2-3m+2=0\Rightarrow m=1,\ m=2$$

- Para $m\neq 1$ y $m\neq 2$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

  $$x=\frac{\begin{vmatrix}m & 1 & 1\\ 0 & m-1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=1\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}m-1 & m & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2}{m-2}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}m-1 & 1 & m\\ 1 & m-1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{m}{m-2}$$

- Para $m=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la tercera ecuación y tomando $z=\lambda$:

  $$\begin{cases}y=1-\lambda\\ x=-\lambda\end{cases}\Rightarrow x=-\lambda,\ y=1-\lambda,\ z=\lambda$$

- Para $m = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

66. Discute los siguientes sistemas para los distintos valores del parámetro y resuélvelos cuando sea posible.

a) $\begin{cases} x + ky + 2z = 1 \\ x + (2k-1)y + 3z = 1 \\ x + ky + (k+3)z = 2k-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + (2a+1)y + (1-a)z = 0 \\ 3ax + az = a \\ ax + ay + (1-a)z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} ax + y + z = (a-1)(a+2) \\ x + ay + z = (a-1)^2(a+2) \\ x + y + az = (a-1)^3(a+2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} (a+1)x + y + z = -1 \\ (-a-1)x - 2z = 2 \\ y + (a^2 - a - 1)z = -a + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + (4 + m - m^2)z = 3 \\ 2x + 4y + 3(m+2)z = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (a^2 + a)x + 2y = 2 \\ (a^2 + a)x + (a^2 - a)y = 4 \\ (a^2 - a - 2)x + (a^2 - a - 2)z = 2 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2k-1 & 3 \\ 1 & k & k+3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 2k-1 & 3 & 1 \\ 1 & k & k+3 & 2k-1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 1$$

- Para $k \neq -1$ y $k \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 1 & 2k-1 & 3 \\ 2k-1 & k & k+3 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{k-5}{k+1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2k-1 & k+3 \end{vmatrix}}{|A|} = -\frac{2}{k+1} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 2k-1 & 1 \\ 1 & k & 2k-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(k-1)}{k+1}$$

- Para $k = -1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&3\\1&1&4\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&3&1\\1&1&4&1\end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&1\\1&4&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la tercera ecuación y tomando $x=\lambda$:

$$\begin{cases}y+2z=1-\lambda\\y+3z=1-\lambda\end{cases}\Rightarrow x=\lambda,\ y=1-\lambda,\ z=0$$

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}a+1&1&1\\-a-1&0&-2\\0&1&a^2-a-1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}a+1&1&1&-1\\-a-1&0&-2&2\\0&1&a^2-a-1&-a+2\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow a^3-a=0\Rightarrow a=-1,\ a=0,\ a=1$$

- Para $a\neq -1$, $a\neq 0$ y $a\neq 1$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&0&-2\\-a+2&1&a^2-a-1\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{2(a-1)}{a(a+1)}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a+1&-1&1\\-a-1&2&-2\\0&-a+2&a^2-a-1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a-1}{a}\quad z=\frac{\begin{vmatrix}a+1&1&-1\\-a-1&0&2\\0&1&-a+2\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{1}{a}$$

- Para $a=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\0&0&-2&2\\0&1&1&3\end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix}1&1\\0&-2\end{vmatrix}=-2\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&-2&2\\1&1&3\end{vmatrix}=-8\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\-1&0&-2&2\\0&1&-1&2\end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&0&2\\0&1&2\end{vmatrix}=1\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\-2&0&-2&2\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix}2&1\\-2&0\end{vmatrix}=2\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}2&1&-1\\-2&0&2\\0&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la tercera ecuación y tomando $z=\lambda$:

$$\begin{cases}2x+y=-1-\lambda\\-2x=2+2\lambda\end{cases}\Rightarrow x=-1-\lambda,\ y=1+\lambda,\ z=\lambda$$

c) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}a&2a+1&1-a\\3a&0&a\\a&a&1-a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}a&2a+1&1-a&0\\3a&0&a&a\\a&a&1-a&0\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow 4a^3+a^2-3a=0\Rightarrow a=-1,\ a=0,\ a=\frac{3}{4}$$

- Para $a\neq -1$, $a\neq 0$ y $a\neq\frac{3}{4}$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&2a+1&1-a\\a&0&a\\0&a&1-a\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a-1}{4a-3}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a&0&1-a\\3a&a&a\\a&0&1-a\end{vmatrix}}{|A|}=0\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}a&2a+1&0\\3a&0&a\\a&a&0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a}{4a-3}$$

- Para $a=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-3&0&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}-1&-1&2&0\\-3&0&-1&-1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix}-1&2\\0&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}-1&2&0\\0&-1&-1\\-1&2&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la tercera ecuación y tomando $x=\lambda$:

$$\begin{cases}-y+2z=\lambda\\-z=-1+3\lambda\end{cases}\Rightarrow x=\lambda,\ y=2-7\lambda,\ z=1-3\lambda$$

- Para $a=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. Como el sistema es homogéneo y $|A|=0$, será compatible indeterminado. Además, obviamente podemos eliminar la segunda ecuación, obteniendo:

$$\begin{cases}y+z=0\\z=0\end{cases}\Rightarrow x=\lambda,\ y=0,\ z=0$$

- Para $a=\frac{3}{4}$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{2}\\ \frac{9}{4} & 0\end{vmatrix}=-\frac{45}{8}\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & 0\\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0\end{vmatrix}=\frac{63}{64}\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

d) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m+3\\ 1 & 1 & 4+m-m^2\\ 2 & 4 & 3(m+2)\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & m+3 & 3\\ 1 & 1 & 4+m-m^2 & 3\\ 2 & 4 & 3(m+2) & 8\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow -m=0\Rightarrow m=0$$

- Para $m\neq 0$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & m+3\\ 3 & 1 & 4+m-m^2\\ 8 & 4 & 3(m+2)\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4m^2+m-10}{m}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & m+3\\ 1 & 3 & 4+m-m^2\\ 2 & 8 & 3(m+2)\end{vmatrix}}{|A|}=-\frac{2m^2-2}{m}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 8\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2}{m}$$

- Para $m=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 8\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

e) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & (a-1)(a+2)\\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2)\\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2)\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow a^3-3a+2=0\Rightarrow a=-2,\ a=1$$

- Para $a\neq -2$ y $a\neq 1$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}(a-1)(a+2) & 1 & 1\\ (a-1)^2(a+2) & a & 1\\ (a-1)^3(a+2) & 1 & a\end{vmatrix}}{|A|}=-a^2+2a+1\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a & (a-1)(a+2) & 1\\ 1 & (a-1)^2(a+2) & 1\\ 1 & (a-1)^3(a+2) & a\end{vmatrix}}{|A|}=2a-3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a & 1 & (a-1)(a+2)\\ 1 & a & (a-1)^2(a+2)\\ 1 & 1 & (a-1)^3(a+2)\end{vmatrix}}{|A|}=a^3-a^2-2a+1$$

- Para $a=-2$ o $a=1$ el sistema resulta ser homogéneo con $|A|=0$, por lo que es compatible indeterminado en ambos casos.

  Para $a=-2$ tenemos $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ con el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, por lo que podemos resolver el sistema eliminando la tercera ecuación y tomando $x=\lambda$:

$$\begin{cases} y+z=2\lambda \\ -2y+z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow x=\lambda,\ z=\lambda,\ z=\lambda$$

  Para $a=1$ las tres ecuaciones coinciden, por lo que el sistema se reduce a:

$$x+y+z=0 \Rightarrow x=-\mu-\lambda,\ y=\mu,\ z=\lambda$$

f) Las matrices asociadas al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} a^2+a & 2 & 0\\ a^2+a & a^2-a & 0\\ a^2-a-2 & 0 & a^2-a-2\end{pmatrix} \text{ y } A^*=\begin{pmatrix} a^2+a & 2 & 0 & 2\\ a^2+a & a^2-a & 0 & 4\\ a^2-a-2 & 0 & a^2-a-2 & 2\end{pmatrix}, \text{ con rango máximo 3.}$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^6-a^5-5a^4+a^3+8a^2+4a=0 \Rightarrow a=-1,\ a=0,\ a=2$$

- Para $a\neq -1$, $a\neq 0$ y $a\neq 2$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & 0\\ 4 & a^2-a & 0\\ 2 & 0 & a^2-a-2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2(a^2-a-4)}{a(a-2)(a+1)^2} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a^2+a & 2 & 0\\ a^2+a & 4 & 0\\ a^2-a-2 & 2 & a^2-a-2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2}{(a-2)(a+1)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a^2+a & 2 & 2\\ a^2+a & a^2-a & 4\\ a^2-a-2 & 0 & 2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4(a+2)}{(a-2)(a+1)^2}$$

- Para $a=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}0&2&0&2\\0&2&0&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ y el sistema es incompatible, ya que la tercera ecuación es $0=2$.

- Para $a=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}0&2&0&2\\0&0&0&4\\-2&0&-2&2\end{pmatrix}$ y el sistema es incompatible, ya que la segunda ecuación es $0=4$.

- Para $a=2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}6&2&0\\6&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}6&2&0&2\\6&2&0&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ y el sistema es incompatible, ya que la tercera ecuación es $0=2$.

67. Discute los siguientes sistemas para los distintos valores del parámetro y resuélvelos cuando sea posible.

a) $\begin{cases} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y=\lambda \\ y+3z=\lambda \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} kx+ky-z=2 \\ 3x-ky=0 \\ 5x+ky=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+3y-az=4 \\ -ax+y+az=0 \\ -x+2ay=a+2 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{pmatrix}$, con rango máximo 3 y 4, respectivamente.

$$|A^*|=0 \Rightarrow -4a^2+16a-16=0 \Rightarrow a=2$$

- Para $a\neq 2$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=4$. Como $\text{rg}(A)\leq 3$ tenemos $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=2$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=10\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado.

  Lo resolvemos eliminando la cuarta ecuación y aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{10}=\frac{10}{10}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{10}=\frac{10}{10}=1 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{10}=\frac{10}{10}=1$$

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3 y 4, respectivamente.

$$|A^*|=0 \Rightarrow -40k=0 \Rightarrow k=0$$

- Para $k\neq 0$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=4$. Como $\text{rg}(A)\leq 3$ tenemos $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k=0$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

  Observemos que $\text{rg}(A)=2$, en cambio $\text{rg}(A^*)=3$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=15\neq 0$.

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\0&1&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&-1&0&\lambda\\0&1&3&\lambda\\1&-1&2&0\end{pmatrix}$, con rango máximo 3 y 4, respectivamente.

$$|A^*|=0\Rightarrow 14\lambda-14=0\Rightarrow\lambda=1$$

- Para $\lambda\neq 1$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=4$. Como $\text{rg}(A)\leq 3$ tenemos $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.
- Para $\lambda=1$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\0&1&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&-1&0&1\\0&1&3&1\\1&-1&2&0\end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\0&1&3\end{vmatrix}=-7\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado.

  Lo resolvemos eliminando la cuarta ecuación y aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&-1&0\\1&1&3\end{vmatrix}}{-7}=\frac{-7}{-7}=1\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&0\\0&1&3\end{vmatrix}}{-7}=\frac{-7}{-7}=1\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\2&-1&1\\0&1&1\end{vmatrix}}{-7}=\frac{0}{-7}=0$$

d) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1&3&-a\\-a&1&a\\-1&2a&0\\2&-1&-2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&3&-a&4\\-a&1&a&0\\-1&2a&0&a+2\\2&-1&-2&0\end{pmatrix}$, con rango máximo 3 y 4, respectivamente.

$$|A^*|=0\Rightarrow a^3-a^2-8a+12=0\Rightarrow a=-3,\ a=2$$

- Para $a\neq -3$ y $a\neq 2$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=4$. Como $\text{rg}(A)\leq 3$ tenemos $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.
- Para $a=-3$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\3&1&-3\\-1&-6&0\\2&-1&-2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&3&3&4\\3&1&-3&0\\-1&-6&0&-1\\2&-1&-2&0\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1&3&3\\3&1&-3\\-1&-6&0\end{vmatrix}=-60\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado.

  Lo resolvemos eliminando la cuarta ecuación y aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4&3&3\\0&1&-3\\-1&-6&0\end{vmatrix}}{-60}=\frac{-60}{-60}=1\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&4&3\\3&0&-3\\-1&-1&0\end{vmatrix}}{-60}=\frac{0}{-60}=0\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&3&4\\3&1&0\\-1&-6&-1\end{vmatrix}}{-60}=\frac{-60}{-60}=1$$

- Para $a=2$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-2&1&2\\-1&4&0\\2&-1&-2\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\-2&1&2&0\\-1&4&0&4\\2&-1&-2&0\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1&3\\-2&1\end{vmatrix}=7\neq 0$, pero cualquier ampliación a un menor de orden 3 es nulo, tanto en A como en A^*. Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, eliminamos la tercera y cuarta ecuación y tomamos $z=\lambda$:

$$\begin{cases}x+3y=4+2\lambda\\-2x+y=-2\lambda\end{cases}\Rightarrow x=\frac{4+8\lambda}{7},\ y=\frac{8+2\lambda}{7},\ z=\lambda$$

68. Discute el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z=m-2 \\ 3x+(m+3)y+4z=m-2 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & m+1 & m-1 \\ 3 & m+3 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3 y 4, respectivamente.

$$|A^*|=0 \Rightarrow 2m^2-8m+8=0 \Rightarrow m=2$$

- Para $m\neq 2$ tenemos $|A^*|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A^*)=4$. Como $\text{rg}(A)\leq 3$ tenemos $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.
- Para $m=2$ tenemos $|A^*|=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Como el sistema es homogéneo, será compatible. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado.

69. Discute el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro y halla todas sus soluciones cuando $\alpha=1$.

$$\begin{cases} (1-\alpha)x+(2\alpha+1)y+(2\alpha+2)z=\alpha \\ \alpha x+\alpha y=2\alpha+2 \\ 2x+(\alpha+1)y+(\alpha-1)z=\alpha^2-2\alpha+9 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha+2 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 & \alpha^2-2\alpha+9 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0 \Rightarrow -\alpha^3+3\alpha^2-2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0,\ \alpha=1,\ \alpha=2$$

- Para $\alpha\neq 0, \alpha\neq 1 \text{ y } \alpha\neq 2$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado.
- Para $\alpha=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, con lo que la segunda ecuación es $0=2$, siendo, por tanto, el sistema incompatible.
- Para $\alpha=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1. Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, lo podemos resolver eliminado la tercera ecuación y tomando $z=\lambda$:

$$\begin{cases} 3y=1-4\lambda \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{11+4\lambda}{3},\ y=\frac{1-4\lambda}{3},\ z=\lambda$$

- Para $\alpha = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -26 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

70. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de un sistema lineal. Halla razonadamente los valores de *m* para los que el sistema es compatible determinado.

El sistema será compatible determinado si $|B|$ es no nulo. Tenemos:

$$|B| = 0 \Rightarrow 4m - 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{4}$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado si $m \neq \frac{9}{4}$.

71. Dado el sistema $\begin{cases} x - 3z = -1 \\ y - t = 2 \\ -3x + 2z = 0 \\ -4x + \lambda t = -5 \end{cases}$.

a) Discute su compatibilidad según los distintos valores de λ.

b) Resuélvelo para $\lambda = 7$.

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & \lambda & -5 \end{pmatrix}$, con rango máximo 4.

$$|A| = 0 \Rightarrow -7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

- Para $\lambda \neq 0$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 4$ y el sistema es compatible determinado.
- Para $\lambda = 0$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 3$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 27 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 4$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Según el apartado anterior, si $\lambda = 7$ el sistema es compatible determinado y lo podemos resolver con la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-14}{-49} = \frac{2}{7} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & \lambda \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-71}{-49} = \frac{71}{49}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-21}{-49} = \frac{3}{7} \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{27}{-49} = -\frac{27}{49}$$

72. Discute los siguientes sistemas para los distintos valores de los parámetros *a* y *b*.

a) $\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - 2z = b \\ x + y + z = 5 \\ 4x - 5y + az = -10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + (2a+1)y - az = 1 \\ ax + y - az = -2b \\ ax + (1-a)z = b \end{cases}$

d) $\begin{cases} ax + y + z = b + 1 \\ ax + y + a^2 z = 2 \\ x + y + az = 2b \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a + 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

- Para $a \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de *b*.
- Para $a = 2$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & b \end{vmatrix} = -5b + 25 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \text{ si } b \neq 5 \text{ y } \text{rg}(A^*) = 2 \text{ si } b = 5$$

Por tanto, el sistema es incompatible si $a = 2$ y $b \neq 5$, y compatible indeterminado si $a = 2$ y $b = 5$.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & a \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & a & -10 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a + 24 = 0 \Rightarrow a = -8$$

- Para $a \neq -8$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de *b*.
- Para $a = -8$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & b \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -10 \end{vmatrix} = -9b \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \text{ si } b \neq 0 \text{ y } \text{rg}(A^*) = 2 \text{ si } b = 0$$

Por tanto, el sistema es incompatible si $a = -8$ y $b \neq 0$, y compatible indeterminado si $a = -8$ y $b = 0$.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & -a \\ a & 1 & -a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & 2a+1 & -a & 1 \\ a & 1 & -a & -2b \\ a & 0 & 1-a & b \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2=0 \Rightarrow a=0$$

- Para $a \neq 0$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de *b*.
- Para $a=0$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix}=2b+1 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3 \text{ si } b\neq -\frac{1}{2} \text{ y } \text{rg}(A^*)=2 \text{ si } b=-\frac{1}{2}$$

  Por tanto, el sistema es incompatible si $a=0$ y $b\neq -\frac{1}{2}$, y compatible indeterminado si $a=0$ y $b=-\frac{1}{2}$.

d) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b+1 \\ a & 1 & a^2 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2b \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0 \Rightarrow -a^3+a^2+a-1=0 \Rightarrow a=-1,\ a=1$$

- Para $a\neq -1$ y $a\neq 1$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de *b*.
- Para $a=-1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & b+1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2b \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b+1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2b \end{vmatrix}=-2b+2 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3 \text{ si } b\neq 1 \text{ y } \text{rg}(A^*)=2 \text{ si } b=1$$

  Por tanto, el sistema es incompatible si $a=-1$ y $b\neq 1$, y compatible indeterminado si $a=-1$ y $b=1$.
- Para $a=1$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2b \end{pmatrix}$.

  Observemos que $\text{rg}(A)=1$, $\text{rg}(A^*)=2$ si $b\neq 1$ y $\text{rg}(A^*)=1$ si $b=1$.

  Por tanto, el sistema es incompatible si $a=1$ y $b\neq 1$, y compatible indeterminado si $a=1$ y $b=1$.

Sistemas homogéneos

73. Determina para qué valores del parámetro *k* cada uno de los siguientes sistemas tienen soluciones distintas de la trivial y resuélvelo en tales casos.

a) $\begin{cases} x+ky-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \\ x-4y+kz=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+ky-z=0 \\ kx-y+z=0 \\ (k+1)x+y=0 \end{cases}$

Al tratarse de sistemas homogéneos, tendrán soluciones distintas de la trivial si el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas, es decir, si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2k^2 + k + 15 = 0 \Rightarrow k = -\frac{5}{2},\ k = 3$

Por tanto, el sistema tiene soluciones distintas de la trivial si $k = -\frac{5}{2}$ o $k = 3$.

- Para $k = -\frac{5}{2}$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$, el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, por lo que podemos resolver el sistema eliminando la tercera ecuación y tomando $y = \lambda$:

$$\begin{cases} x - z = \frac{5}{2}\lambda \\ 2x + 2z = \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3\lambda}{2},\ y = \lambda,\ z = -\lambda$$

- Para $k = 3$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, por lo que podemos resolver el sistema eliminando la tercera ecuación y tomando $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + 3y = \lambda \\ 2x - y = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{5\lambda}{7},\ y = \frac{4\lambda}{7},\ z = \lambda$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = -1,\ k = 2$

Por tanto, el sistema tiene soluciones distintas de la trivial si $k = -1$ o $k = 2$.

- Para $k = -1$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, el menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo que podemos resolver el sistema eliminando la primera ecuación y tomando $z = \lambda$:

$$\begin{cases} -x - y = -\lambda \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$$

- Para $k = 2$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo que podemos resolver el sistema eliminando la primera ecuación y tomando $x = \lambda$:

$$\begin{cases} -y + z = -2\lambda \\ y = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = -3\lambda,\ z = -5\lambda$$

74. Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ mx + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$

Al tratarse de sistemas homogéneos serán siempre compatibles. Serán compatibles determinados si el rango de la matriz de coeficientes en igual al número de incógnitas, es decir, si el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo.

a) $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 5$

- Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 5$ tenemos $|A| \neq 0$ y, por tanto, el sistema es compatible determinado.

  Su única solución es la trivial, $x = y = z = 0$.

- Para $\lambda = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, podemos resolverlo eliminando la tercera ecuación y tomando $z = \mu$:

$$\begin{cases} x + 2y = -\mu \\ x - y = -2\mu \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{5\mu}{3},\ y = \frac{\mu}{3},\ z = \mu$$

- Para $\lambda = 5$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, podemos resolverlo eliminando la tercera ecuación y tomando $x = \mu$:

$$\begin{cases} 2y + z = -5\mu \\ -y + 2z = -5\mu \end{cases} \Rightarrow x = \mu,\ y = -\mu,\ z = -3\mu$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ m & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7m + 63 = 0 \Rightarrow m = -9$

- Para $m \neq -9$ tenemos $|A| \neq 0$ y, por tanto, el sistema es compatible determinado.

  Su única solución es la trivial, $x = y = z = 0$.

- Para $m = -9$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -9 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ y el sistema es compatible indeterminado.

  Como el menor $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, podemos resolverlo eliminando la tercera ecuación y tomando $x = \lambda$:

$$\begin{cases} -y - 2z = -3\lambda \\ 3y - z = 9\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = 3\lambda,\ z = 0$$

75. **La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es:**

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

Discútelo y resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones.

Al ser un sistema homogéneo, es siempre compatible. Será determinado si el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 4a - 16 \Rightarrow a = -4, a = 2$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado si $a \neq -4$ y $a \neq 2$, y es compatible indeterminado si $a = -4$ o $a = 2$. De este modo, debemos resolver el sistema si $a = -4$ o $a = 2$.

- Para $a = -4$ el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$, con lo que podemos resolver el sistema eliminando la tercera ecuación y tomando $x = \lambda$: $\begin{cases} 2y + 3z = \lambda \\ 5y = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = -\dfrac{2\lambda}{5},\ z = \dfrac{3\lambda}{5}$
- Para $a = 2$ el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, con lo que podemos resolver el sistema eliminando la tercera ecuación y tomando $x = \lambda$: $\begin{cases} 2y + 3z = \lambda \\ -y = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = 2\lambda,\ z = -\lambda$

76. **Discute el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro y resuélvelo para $m = 0$.**

$$\begin{cases} 3x - y + mz = 0 \\ x + y = m \\ mx - 3y + mz = -2m \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & m \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -3 & m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \\ m & -3 & m & -2m \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 + m = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$$

- Para $m \neq 0$ y $m \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$ con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- Para $m = 0$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como el sistema es homogéneo, es compatible indeterminado. Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, lo podemos resolver eliminando la primera ecuación y tomando $z = \lambda$: $\begin{cases} x + y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 0,\ z = \lambda$
- Para $m = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Tomando $x = \lambda$: $\begin{cases} -y + z = -3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \lambda,\ y = 1 - \lambda,\ z = 1 - 4\lambda$

Síntesis

77. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + my = -1} \\ \boldsymbol{(1-2m)x - y = m} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.

b) Resuelve el sistema en los casos en que la solución no sea única.

c) Calcula los valores de *m* para que (–3, 2) sea solución.

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1-2m & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 1-2m & -1 & m \end{pmatrix}$ con rango máximo 2.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, m = 1$$

- Para $m \neq -\frac{1}{2}$ y $m \neq 1$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $m = -\frac{1}{2}$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

  Las filas de *A* son proporcionales, pero las de A^* no lo son, por tanto, $\text{rg}(A) = 1$, $\text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es incompatible.

- Para $m = 1$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

  Tanto las filas de *A* como las de A^* son proporcionales, por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

b) Según el apartado anterior, tenemos que resolver el sistema para $m = 1$. Para ello, podemos eliminar la segunda ecuación y tomar $y = \lambda$, obteniendo $x = -1 - \lambda$.

c) $\begin{cases} -3 + 2m = -1 \\ -3(1-2m) - 2 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Para $m = 1$ es solución el punto (–3, 2).

78. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + (m+1)y + 2z = -1} \\ \boldsymbol{mx + y + z = m} \\ \boldsymbol{(1-m)x + 2y + z = -m - 1} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.

b) Resuelve el sistema para $m = 2$. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

a) Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2 + 5m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}, m = 2$$

- Para $m \neq \frac{1}{2}$ y $m \neq 2$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{n.º de incógnitas} = 3$ y el sistema es compatible determinado.

- Para $m=\frac{1}{2}$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 2\\ \frac{1}{2} & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 2 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 2 & -1\\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & 2 & -1\\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1 & -\frac{3}{2}\end{vmatrix}=3\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $m=2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

b) Según el apartado anterior, si $m=2$ el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2 considerado en dicho apartado, lo podemos resolver eliminando la primera ecuación y tomando $x=\lambda$:

$$\begin{cases}y+z=2-2\lambda\\ 2y+z=-3+\lambda\end{cases}\Rightarrow x=\lambda,\ y=-5+3\lambda,\ z=7-5\lambda$$

Para encontrar una solución en la que $z=2$ observemos que $z=2\Rightarrow 7-5\lambda=2\Rightarrow\lambda=1$, por tanto, la solución buscada es $x=1,\ y=-2,\ z=2$.

79. **Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales**

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ x - 5y + az = 4 \end{cases}, \ a \in \mathbb{R}$$

es compatible indeterminado.

a) Calcula a y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de a encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x = y$.

a) Para que el sistema sea compatible indeterminado el determinante de la matriz de coeficientes debe ser nulo:

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a - 24 = 0 \Rightarrow a = 8$$

Para $a = 8$ tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

Como sabemos que el sistema es compatible indeterminado, no es necesario determinar $\text{rg}(A^*)$, sabemos que debe ser $\text{rg}(A^*) = 2$. Además, para resolver el sistema, teniendo en cuenta el menor de orden 2 anterior, podemos eliminar la tercera ecuación y tomar $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 - 3\lambda \\ 2x - y = 8 - \lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{12+\lambda}{3},\ y = \frac{5\lambda}{3},\ z = \lambda$$

b) Tenemos $x = y \Rightarrow \frac{12+\lambda}{3} = \frac{5\lambda}{3} \Rightarrow \lambda = 3$, por tanto, la solución buscada es $x = 5,\ y = 5,\ z = 3$.

80. **Se sabe que el vector (2, 1, –1) es solución del sistema:**

$$\begin{cases} ax + by + cz = a + c \\ bx - y + bz = a - b - c \\ cx - by + 2z = b \end{cases}$$

Calcula el valor de los parámetros *a*, *b* y *c*.

Sustituyendo las coordenadas del vector tenemos:

$$\begin{cases} 2a + b - c = a + c \\ 2b - 1 - b = a - b - c \\ 2c - b - 2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ -a + 2b + c = 1 \\ -2b + 2c = 2 \end{cases} \underset{E_1 \to E_1 + E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ 3b - c = 1 \\ -2b + 2c = 2 \end{cases} \underset{E_3 \to 3E_3 + 2E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ 3b - c = 1 \\ 4c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

81. **Se consideran las matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación $\det(A - xI_3) = 0$.

b) Discute el sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz es $A - xI_3$ según los valores del número real x.

c) Resuélvelo en aquellos casos en que el sistema sea compatible indeterminado.

a) $\det(A - xI_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-x & -1 & 0 \\ -1 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x^3 + 8x^2 - 20x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = 4$

b) Según el apartado anterior, el sistema será compatible determinado si $x \neq 2$ y $x \neq 4$, y será compatible indeterminado si $x = 2$ o $x = 4$.

c) Si $x = 2$ tenemos $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, por lo que el sistema se reduce a una ecuación, $x - y = 0$, con solución $x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = \mu$.

Si $x = 4$ tenemos $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$, por lo que el sistema se reduce a $\begin{cases} -x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, con solución $x = -\lambda,\ y = \lambda,\ z = 0$.

82. Dado el sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$**:**

a) Calcula el valor del parámetro α para que al añadirle la ecuación $\alpha x + 3y + z = 9$, resulte un sistema compatible indeterminado. Resuélvelo, si es posible, para $\alpha = 0$.

b) ¿Existe algún valor de α para el que el sistema con estas 3 ecuaciones no tenga solución?

a) Añadiendo la ecuación, las matrices asociadas al sistema serán $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ \alpha & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ \alpha & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible indeterminado los rangos de A y A^* deben coincidir y ser menores que el número de incógnitas, es decir, que 3.

Observemos que para cualquier valor de α, $\text{rg}(A) \geq 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por tanto, para que el sistema sea compatible indeterminado debe ser $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$.

Para que $\text{rg}(A) = 2$, $|A|$ debe ser nulo:

$$|A| = 0 \Rightarrow 5\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{5}$$

Además, para este valor de α, $\text{rg}(A^*) = 2$, ya que ampliando el menor de orden 2 anterior con la columna de términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado si $\alpha = -\frac{2}{5}$.

Para $\alpha = 0$ tenemos $|A| = 2 \neq 0$, con lo que el sistema es compatible determinado y lo podemos resolver por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{2} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{2} = 2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

b) Según el apartado anterior no existe ningún valor de α para el que el sistema sea incompatible, si $\alpha \neq -\frac{2}{5}$ es compatible determinado y si $\alpha = -\frac{2}{5}$ es compatible indeterminado.

83. Se considera el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros *a*, *b* y *c*:

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2y - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

a) Justifica razonadamente que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$ el sistema es incompatible.

b) Determina razonadamente los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*, para los que se verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema.

c) Justifica si la solución $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ del sistema del apartado b) es, o no, única.

a) Si $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$ las matrices asociadas al sistema son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenemos $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, por lo que $\text{rg}(A) = 2$.

Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Sustituyendo los valores de *x*, *y*, *z* tenemos:

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4 - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 6c = 1 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases} \underset{E_1 \leftrightarrow E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} -a - 6c = 1 \\ 2a + 2b - 3c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases} \underset{\substack{E_2 \to E_2 + 2E_1 \\ E_3 \to E_3 + 5E_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} -a - 6c = 1 \\ 2b - 15c = -1 \\ 4b - 27c = 9 \end{cases} \underset{E_3 \to E_3 - 2E_2}{\Rightarrow} \begin{cases} -a - 6c = 1 \\ 2b - 15c = -1 \\ 3c = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = -23,\ b = 27,\ c = \frac{11}{3}$$

NOTA: El sistema obtenido con incógnitas *a*, *b* y *c* es de Cramer, ya que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo, por lo que podríamos haber usado la regla de Cramer para resolverlo.

c) Según el aparatado anterior, si $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución tenemos $a = -23, b = 27$ y $c = \frac{11}{3}$.

Para estos valores de los parámetros el determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$\begin{vmatrix} -46 & 27 & 1 \\ 3 & -2 & -\frac{22}{3} \\ -115 & -2 & \frac{11}{3} \end{vmatrix} = 23249 \neq 0$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado, con lo que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es la única solución.

84. Dado el sistema $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$, halla dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación $5x+y+\alpha z=\beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Añadiendo la ecuación, las matrices asociadas al sistema serán $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible indeterminado los rangos de A y A^* deben coincidir y ser menores que el número de incógnitas, es decir, que 3.

Observemos que para cualquier valor de α, $\text{rg}(A)\geq 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$, por tanto, para que el sistema sea compatible indeterminado debe ser $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2$.

Para que $\text{rg}(A)=2$, $|A|$ debe ser nulo:

$$|A|=0\Rightarrow 5\alpha+2=0\Rightarrow \alpha=-\frac{2}{5}$$

Para este valor de α, $\text{rg}(A^*)=2$ si el determinante obtenido ampliando el menor de orden 2 anterior con la columna de términos independientes es nulo:

$$\text{rg}(A^*)=2\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & \beta \end{vmatrix}=0\Rightarrow 5\beta-25=0\Rightarrow \beta=5$$

85. a) Considera la matriz y los vectores siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde x, y y z son números reales. Determina x, y y z para que el vector $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $MA=B$.

b) Sean ahora la matriz y los vectores siguientes:

$$N=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican $a\neq 0$, $c=a$ y $a+b=0$. Determina si el sistema $NX=B$ es compatible determinado.

a) $MA=B\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+y+2z=0 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases} \underset{\substack{F_2\to F_2-3F_1 \\ F_3\to F_3-2F_1}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -5y-7z=-3 \\ -y-5z=-1 \end{cases} \underset{F_3\to 5F_3-F_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -5y-7z=-3 \\ -18z=-2 \end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\frac{2}{9},\ y=\frac{4}{9},\ z=\frac{1}{9}$

b) El determinante de la matriz de coeficientes del sistema es:

$$|N|=\begin{vmatrix} a & -a & a \\ -a & a & a \\ a & a & -a \end{vmatrix}=-4a^3\neq 0$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado.

86. **El sistema $AX = B$ donde:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz *A*.

a) Determina, si existen, el valor o los valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) Si $a = 4$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \end{pmatrix}$, determina, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) Si $a = 4$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determina, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resuelve el sistema.

a) El sistema será compatible determinado si el determinante de A no es nulo, pero $|A| = 0$ para cualquier valor de a, por lo que no existe ningún valor de a para el que el sistema sea compatible determinado.

b) Si $a = 4$ tenemos $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$.

Para que el sistema sea incompatible, $\text{rg}(A^*)$ debe ser 3, es decir, el determinante que se obtiene ampliando el menor de orden 2 anterior con la columna de términos independientes no debe ser nulo. Tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -b \end{vmatrix} = -2b - 5$$

Por tanto, el sistema es incompatible si $b \neq -\dfrac{5}{2}$.

c) Como en el apartado anterior, si $a = 4$ tenemos $\text{rg}(A) = 2$.

Para que el sistema sea compatible indeterminado, $\text{rg}(A^*)$ debe ser también 2, es decir, el determinante que se obtiene ampliando el menor de orden 2 anterior con la columna de términos independientes debe ser nulo. Tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & c \\ 4 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 5c$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado (con grado de indeterminación 1) si $c = 4$.

Además, teniendo en cuenta el menor de orden 2, para resolver el sistema en este caso podemos eliminar la tercera ecuación y tomar $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -\lambda,\ y = 2,\ z = \lambda$$

CUESTIONES

87. Razona la veracidad de las siguientes afirmaciones.

a) Un sistema con más ecuaciones que incógnitas no puede ser indeterminado.

b) Un sistema con más incógnitas que ecuaciones puede ser compatible.

c) Un sistema con más incógnitas que ecuaciones puede ser compatible y determinado.

a) La afirmación es falsa, si partimos de un sistema indeterminado siempre podremos añadirle ecuaciones que sean combinación lineal de las originales y el sistema seguirá siendo indeterminado. Por ejemplo,

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

es un sistema con más ecuaciones que incógnitas e indeterminado.

b) La afirmación es correcta, el sistema podría ser compatible indeterminado, aunque no determinado.

En efecto, si el sistema tiene *n* ecuaciones y m incógnitas con $m > n$ y A es la matriz de coeficientes del sistema, tenemos $\mathrm{rg}(A) \le n < m$, por lo que es imposible que los rangos de las matrices asociadas al sistema coincidan con el número de incógnitas, es decir, es imposible que el sistema sea compatible determinado.

En cambio sí puede ser compatible indeterminado, por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.

c) La afirmación es falsa, como hemos probado en el apartado anterior.

88. Las columnas de la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones son C_1, C_2, C_3 y C_4. Y la matriz de los términos independientes es $B = C_2 + C_3$. Razona si el sistema es compatible o incompatible.

Si A y A^* son las matrices asociadas al sistema, tenemos $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$, ya que la columna que se añade a A para formar A^*, formada por los elementos de B, es combinación lineal de las columnas de A.

Por tanto, el sistema debe ser compatible.

89. Sean *S* y *S'* dos sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de los coeficientes. Se pide:

a) Justificar con un ejemplo que uno de los dos sistemas puede ser compatible, y el otro, incompatible.

b) Si ambos sistemas son compatibles, ¿puede ser uno determinado y el otro indeterminado?

a) El sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ es compatible (indeterminado), con solución $x = y = \lambda$.

En cambio, el sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$ es incompatible.

b) No es posible, ambos sistemas comparten la matriz de coeficientes A, por tanto, si uno de los sistemas es determinado, tendremos $\mathrm{rg}(A) = \text{nº de incógnitas}$.

Además, para cualquier posible matriz ampliada A^* tendremos $\mathrm{rg}(A) \le \mathrm{rg}(A^*) \le \text{nº de incógnitas}$, de donde se deduce que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas}$, es decir, cualquier sistema con matriz de coeficientes A será compatible determinado.

90. **Se considera un sistema de ecuaciones *S* con *m* ecuaciones y *n* incógnitas y el sistema homogéneo *S*' en el que todos los coeficientes de las incógnitas coinciden con los de *S*. Prueba que si $(s_1, s_2, s_3, ...s_n)$ y $(t_1, t_2, t_3, ...t_n)$ son dos soluciones de *S*, entonces $(s_1 - t_1, s_2 - t_2, s_3 - t_3, ...s_n - t_n)$ es solución *S*'.**

Consideremos la forma matricial de los sistemas *S* y S':

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = B \qquad A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = 0$$

Tenemos $A_1(s_1 - t_1) + A_2(s_2 - t_2) + ... + A_n(s_n - t_n) = (A_1s_1 + A_2s_2 + ... + A_ns_n) - (A_1t_1 + A_2t_2 + ... + A_nt_n) = B - B = 0$, es decir, $(s_1 - t_1, s_2 - t_2, s_3 - t_3, ...s_n - t_n)$ es solución de *S*'.

91. **Considera el sistema compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 1} \\ \boldsymbol{x - y = 3} \end{cases}$$

cuya solución es el par (2, –1). Sea *S*' el sistema que se obtiene al añadir a *S* una tercera ecuación $\boldsymbol{ax + by = c}$. Contesta razonadamente las siguientes preguntas.

a) ¿Puede ser *S*' compatible determinado?

b) ¿Puede ser *S*' incompatible?

c) ¿Puede ser *S*' compatible indeterminado?

a) Sí, siempre que la nueva ecuación sea combinación lineal de las originales, el sistema seguirá siendo compatible determinado, ya que los rangos de las matrices asociadas no cambiarán. Por ejemplo, el sistema

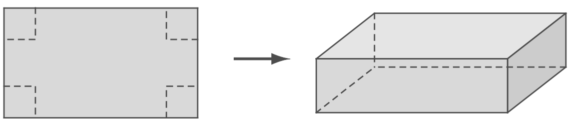
$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ sigue siendo compatible determinado.

b) Sí, basta que la ecuación añadida contradiga una de las originales. Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$ es indeterminado.

c) No, si hubiera infinitos pares que verificasen las tres ecuaciones del nuevo sistema, los habría que verifican las dos ecuaciones originales, lo que no es posible, ya que la única solución de éste es la dada en el enunciado.

PROBLEMAS

92. **Se tiene una pieza rectangular de cartón cuyo perímetro mide 148 cm. Para hacer una caja se corta un cuadrado en cada esquina y se dobla de modo que resulta la base de la caja con un perímetro de 100 cm y una de las caras laterales con un perímetro de 72 cm. Calcula las dimensiones de la caja.**



Sean *x*, *y* y *z* el largo, ancho y alto (en cm) de la caja respectivamente, es decir, de la pieza rectangular de dimensiones $x + 2z$ e $y + 2z$ recortamos un cuadrado de lado *z* en cada esquina.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2(x + 2z + y + 2z) = 148 \\ 2(x + y) = 100 \\ 2(y + z) = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 4z = 74 \\ x + y = 50 \\ y + z = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 6 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que las dimensiones de la caja son $y = 30$ cm de largo, $x = 20$ cm de ancho y $z = 6$ cm de alto.

93. En una tienda venden camisetas de calidades baja, media y alta, a 5, 10 y 15 €, respectivamente. En una semana se han vendido 150 camisetas, lo que ha supuesto unos ingresos de 1450 €. Si se hubieran vendido 5 camisetas más de calidad baja y 5 menos de calidad media, habría coincidido el número de camisetas vendidas de estas calidades. Calcula cuántas camisetas se han vendido de cada clase.

x: camisetas calidad baja *y*: camisetas calidad media *z*: camisetas calidad alta

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=150 \\ 5x+10y+15z=1450 \\ x+5=y-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=150 \\ x+2y+3z=290 \\ x-y=-10 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que se han vendido $x=50$ camisetas de calidad baja, $y=60$ de calidad media y $z=40$ de calidad alta.

94. Juan y Pedro invierten 2000 € cada uno. Juan coloca una cantidad *A* al 4 % de interés, una cantidad *B,* al 5 %, y el resto, al 6 %. Pedro invierte la misma cantidad *A* al 5 %, la *B,* al 6 %, y el resto, al 4 %.

Determina la cantidad *B*, sabiendo que Juan obtiene unos intereses de 105 € y Pedro de 95 €.

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} 0{,}04A+0{,}05B+0{,}06(2000-A-B)=105 \\ 0{,}05A+0{,}06B+0{,}04(2000-A-B)=95 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}02A+0{,}01B=15 \\ 0{,}01A+0{,}02B=15 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $B=500$ € (también $A=500$ €).

95. Las normas de un juego establecen que cuando un jugador pierde debe repartir entre el resto de los jugadores la mitad de lo que tiene. Tres jugadores empiezan a jugar con un total de 12 € y después de jugar dos veces, en las que pierde distinto jugador, acaban los tres con la misma cantidad.

¿Con cuánto dinero empezó a jugar cada uno de los jugadores?

Sean *A*, *B* y *C* los jugadores, siendo *A* el primero que pierde y *B* el segundo en perder. Sean *x*, *y* y *z* las cantidades con las que comienza cada jugador respectivamente. La siguiente tabla recoge las condiciones del enunciado:

	Jugador *A*	**Jugador *B***	**Jugador *C***
Inicio	x	Y	z
1.ª partida	$\frac{x}{2}$	$y+\frac{x}{4}$	$z+\frac{x}{4}$
2.ª partida	$\frac{x}{2}+\frac{y+\frac{x}{4}}{4}=\frac{9x}{16}+\frac{y}{4}$	$\frac{y+\frac{x}{4}}{2}=\frac{y}{2}+\frac{x}{8}$	$z+\frac{x}{4}+\frac{y+\frac{x}{4}}{4}=\frac{5x}{16}+\frac{y}{4}+z$

Obtenemos, por tanto:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ \frac{9x}{16}+\frac{y}{4}=\frac{y}{2}+\frac{x}{8} \\ \frac{9x}{16}+\frac{y}{4}=\frac{5x}{16}+\frac{y}{4}+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ 7x-4y=0 \\ x-4z=0 \end{cases} \Rightarrow x=4\text{ €},\ y=7\text{ €},\ z=1\text{ €}$$

NOTA: Este problema se resuelve de manera mucha más sencilla razonando “hacia atrás”. Como el total en juego, 12 €, no cambia, al final cada jugador acaba con 4 €. Así, el jugador que perdió la segunda partida tenía antes de jugarla 8 €, y los otros dos tenían 2 € cada uno. Por tanto, el jugador que perdió la primera partida tenía antes de jugarla 4 €, y los otros dos tenían 7 € y 1 €, respectivamente.

96. La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. El equipo campeón obtuvo 70 puntos en total, 3 puntos por cada partido ganado, 1 punto por los empatados y 0 puntos por los perdidos. Sin embargo, hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?

x: partidos ganados y: partidos perdidos z: partidos empatados

Observemos que cada equipo juega 40 partidos, 20 de ida y 20 de vuelta, por tanto, las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=40 \\ 3x+y=70 \\ 2x+y=50 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que el equipo ganador ha ganado $x=20$ partidos, ha empatado $y=10$ partidos y ha perdido $z=10$ partidos.

97. En una fábrica producen tres modelos de automóvil. La capacidad de producción es de 6000 unidades cada mes. La demanda del modelo *A* es el triple que la demanda del modelo *B* y la demanda del modelo *C* es la tercera parte de la demanda conjunta de los otros dos modelos. Calcula cuántas unidades de cada modelo debe producir la fábrica cada mes.

x: unidades modelo A y: unidades modelo B z: unidades modelo C

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=6000 \\ x=3y \\ z=\dfrac{x+y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6000 \\ x-3y=0 \\ -x-y+3z=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos que se deben producir $x=3375$ unidades de A, $y=1125$ de B y $z=1500$ de C.

98. La suma de las tres cifras de un número es 16 y la suma de la primera y la tercera cifras es *k* veces la segunda. Permutando entre sí la primera y la tercera cifras se obtiene un número que supera en 198 unidades al número dado.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita hallar el número dado.

b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución.

c) Para $k=1$, determina el número de tres cifras que cumple las condiciones del enunciado.

a) Si el número buscado es $N=100x+10y+z$, las condiciones del enunciado nos llevan al sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z=16 \\ x+z=ky \\ 100z+10y+x=100x+10y+z+198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=16 \\ x-ky+z=0 \\ -x+z=2 \end{cases}$$

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -k & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 16\\ 1 & -k & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow -2k-2=0\Rightarrow k=-1$$

- Si $k\neq -1$ tenemos $|A|\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema será compatible determinado.
- Si $k=-1$, tenemos $|A|\neq 0$ y $\text{rg}(A)=2$, ya que el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$. En cambio, $\text{rg}(A)=3$, ya que al ampliar el menor de orden 2 anterior con la columna de términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 16\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=16\neq 0$$

Por tanto, el sistema es incompatible.

c) Si $k=1$, resolviendo el sistema lineal del apartado a mediante el método de Gauss o de Cramer, obtenemos $x=3,\ y=8$ y $z=5$, con lo que el número buscado es $N=385$.

99. Las edades (en años) de un niño, su padre y su abuelo verifican las siguientes condiciones: La edad del padre es α veces la del hijo. El doble de la edad del abuelo más la edad del niño y más la del padre es 182 años. El doble de la edad del niño más la del abuelo es 100.

a) Establece las edades de los tres suponiendo que $\alpha=2$.

b) Para $\alpha=3$, ¿qué ocurre con el problema planteado?

c) Siguiendo con $\alpha=3$, ¿qué ocurre si en la segunda condición la suma es 200 en vez de 182?

Sean *x*, *y* y *z* las edades respectivas del niño, el padre y el abuelo. Las condiciones del enunciado nos llevan al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}y=\alpha x\\ 2z+x+y=182\\ 2x+z=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\alpha x+y=0\\ x+y+2z=182\\ 2x+z=100\end{cases}$$

con matrices asociadas $A=\begin{pmatrix}-\alpha & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}-\alpha & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 182\\ 2 & 0 & 1 & 100\end{pmatrix}$ y $|A|=-\alpha+3$.

a) Si $\alpha=2$ tenemos $|A|=1\neq 0$, por lo que el sistema será compatible determinado y lo podemos resolver aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 182 & 1 & 2\\ 100 & 0 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=18\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 182 & 2\\ 2 & 100 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=36\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 182\\ 2 & 0 & 100\end{vmatrix}}{|A|}=64$$

Por tanto, el niño tiene 18 años, el padre, 36, y el abuelo, 64.

b) Si $\alpha=3$ tenemos $|A|=0$ y $\text{rg}(A)=2$, ya que el menor $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. En cambio, $\text{rg}(A)=3$, ya que al ampliar el menor de orden 2 anterior con la columna de términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 182\\ 0 & 1 & 100\end{vmatrix}=18\neq 0$$

Por tanto, el sistema es incompatible, el problema no tiene solución.

c) En este caso, $\text{rg}(A)$ sigue siendo 2, pero para determinar $\text{rg}(A^*)$ tenemos:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 200\\ 0 & 1 & 100\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=2$$

Por tanto, el sistema sería compatible indeterminado, el problema tendría infinitas soluciones. En concreto, las soluciones serían $x=\lambda,\ y=3\lambda,\ z=100-2\lambda$.

100. Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 €. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos el coste es de 14 €.

a) Expresa, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) Calcula lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

a) Sean x, y y z los precios respectivos de un cuaderno, un rotulador y un bolígrafo. Las condiciones del enunciado nos llevan al sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 22 \\ 2x + y + 6z = 14 \end{cases}.$$

Tomando el precio de un bolígrafo como parámetro obtenemos:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 22 - 3z \\ 2x + y = 14 - 6z \end{cases} \Rightarrow x = -6 + 9z,\ y = 26 - 24z$$

NOTA: Teniendo en cuenta que los precios deben ser positivos obtenemos además que $\frac{2}{3} < z < \frac{13}{12}$.

b) Ocho cuadernos y tres rotuladores costarán $8x + 3y = 8(-6 + 9z) + 3(26 - 24z) = 30$ €.

101. Se dispone de tres frascos que contienen una mezcla de tres sustancias *A*, *B* y *C*. El primero contiene 80 g de *A*, 20 de *B* y 50 de *C*, el segundo contiene 40 g de *A*, 10 de *B* y 50 de *C* y el tercero contiene 40 g de *A*, 50 de *B* y 70 de *C*. Se quiere tener una mezcla que contenga 60 g de *A*, 40 de *B* y 70 de *C*. Calcula qué parte de cada frasco se debe añadir a la mezcla.

Sean x, y y z la cantidad, en porcentaje, que hay que usar de cada uno de los tres frascos. Las condiciones del enunciado nos llevan al sistema:

$$\begin{cases} \text{Sustancia } A\text{: } \frac{80x}{100} + \frac{40y}{100} + \frac{40z}{100} = 60 \\ \text{Sustancia } B\text{: } \frac{20x}{100} + \frac{10y}{100} + \frac{50z}{100} = 40 \\ \text{Sustancia } C\text{: } \frac{50x}{100} + \frac{50y}{100} + \frac{70z}{100} = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y + 4z = 600 \\ 2x + y + 5z = 400 \\ 5x + 5y + 7z = 700 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $x = 35$ %, $y = 17{,}5$ % y $z = 62{,}5$ %.

PARA PROFUNDIZAR

102. Discute los siguientes sistemas para los valores posibles de los parámetros *a* y *b*.

a) $\begin{cases}(a+2)x+2y+2z=b\\ ax+y-z=b-5\\ -x+(a+1)z=5\end{cases}$

b) $\begin{cases}(a+1)x+5ay+az=a-b\\ y-az=a+b\\ 3ay+(2-a)z=b\end{cases}$

c) $\begin{cases}ax+y=1\\ 2x+(b+1)y+z=1\\ -x+by+z=b\end{cases}$

d) $\begin{cases}(a+1)x+y+bz=a\\ x+y=1\\ -x-3y+2z=1\end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix}a+2 & 2 & 2\\ a & 1 & -1\\ -1 & 0 & a+1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}a+2 & 2 & 2 & b\\ a & 1 & -1 & b-5\\ -1 & 0 & a+1 & 5\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+a+6=0\Rightarrow a=-2,\ a=3$$

- Para $a\neq -2$ y $a\neq 3$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=$ nº de incógnitas $=3$ y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de *b*.

- Para $a=-2$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2 & b\\ -2 & 1 & -1 & b-5\\ -1 & 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix}2 & 2 & b\\ 1 & -1 & b-5\\ 0 & -1 & 5\end{vmatrix}=b-30\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3 \text{ si } b\neq 30 \text{ y } \text{rg}(A^*)=2 \text{ si } b=30$$

  Por tanto, el sistema es incompatible si $a=-2$ y $b\neq 30$, y compatible indeterminado si $a=-2$ y $b=30$.

- Para $a=3$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2 & b\\ 3 & 1 & -1 & b-5\\ -1 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix}5 & 2 & b\\ 3 & 1 & b-5\\ -1 & 0 & 5\end{vmatrix}=-b+5\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3 \text{ si } b\neq 5 \text{ y } \text{rg}(A^*)=2 \text{ si } b=5$$

  Por tanto, el sistema es incompatible si $a=3$ y $b\neq 5$, y compatible indeterminado si $a=3$ y $b=5$.

b) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} a+1 & 5a & a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 3a & 2-a \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a+1 & 5a & a & a-b \\ 0 & 1 & -a & a+b \\ 0 & 3a & 2-a & b \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow 3a^3+2a^2+a+2=0\Rightarrow a=-1$$

- Para $a\neq -1$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de *b*.
- Para $a=-1$ tenemos $|A|\neq 0$, $A=\begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 & -1-b \\ 0 & 1 & 1 & -1+b \\ 0 & -3 & 3 & b \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=6\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} -5 & -1 & -1-b \\ 1 & 1 & -1+b \\ -3 & 3 & b \end{vmatrix}=8b-24\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3 \text{ si } b\neq 3 \text{ y } \text{rg}(A^*)=2 \text{ si } b=3$$

  Por tanto, el sistema es incompatible si $a=-1$ y $b\neq 3$, y compatible indeterminado si $a=-1$ y $b=3$.

c) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & b+1 & 1 \\ -1 & b & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 2 & b+1 & 1 & 1 \\ -1 & b & 1 & b \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow a-3=0\Rightarrow a=3$$

- Para $a\neq 3$ tenemos $|A|\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado para cualquier valor de *b*.
- Para $a=3$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & b+1 & 1 \\ -1 & b & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & b+1 & 1 & 1 \\ -1 & b & 1 & b \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & b \end{vmatrix}=3b\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3 \text{ si } b\neq 0 \text{ y } \text{rg}(A^*)=2 \text{ si } b=0$$

  Por tanto, el sistema es incompatible si $a=3$ y $b\neq 0$, y compatible indeterminado si $a=3$ y $b=0$.

d) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & b & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A|=0\Rightarrow 2(a-b)=0\Rightarrow a=b$$

- Para $a\neq b$ $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=3$ y el sistema es compatible determinado.
- Para $a=b$ tenemos $A^*=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0$, con lo que $\text{rg}(A)=2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

  $$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2a-2$$

  Por tanto, el sistema es incompatible si $a\neq -1$, y compatible determinado si $a=-1$.

103. Se llama "eliminación de parámetros" al proceso inverso a la resolución de un sistema indeterminado: al eliminar los parámetros se obtienen una o varias ecuaciones en las que solo aparecen las incógnitas.

Para eliminar los parámetros se busca la condición o condiciones que deben verificar las incógnitas para que existan valores de los parámetros que permitan obtenerlas. Es necesario entonces obligar a que el sistema cuyas incógnitas son los parámetros tenga solución.

a) Elimina los parámetros *s* y *t* en las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = -1 + 2s - t \end{cases}$$

b) Elimina los parámetros λ, μ y ν :

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \lambda + \mu \\ x_2 = 2\lambda - \nu \\ x_3 = -1 - \mu + \nu \\ x_4 = 2 - \lambda + \mu \end{cases}$$

a) $\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = -1 + 2s - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s + 2t = x - 2 \\ -s + t = y - 1 \\ 2s - t = z + 1 \end{cases}$.

La matriz ampliada asociada al sistema con incógnitas *s* y *t* y parámetros *x*, *y* y *z* es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x-2 \\ -1 & 1 & y-1 \\ 2 & -1 & z+1 \end{pmatrix},$$

Y para que este sistema tenga solución el determinante de A^* debe ser nulo, es decir, tenemos:

$$|A^*| = 0 \Rightarrow -x + 5y + 3z = 0$$

b) $\begin{cases} x_1 = 1 + \lambda + \mu \\ x_2 = 2\lambda - \nu \\ x_3 = -1 - \mu + \nu \\ x_4 = 2 - \lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = x_1 - 1 \\ 2\lambda - \nu = x_2 \\ -\mu + \nu = x_3 + 1 \\ -\lambda + \mu = x_4 - 2 \end{cases}$

La matriz ampliada asociada al sistema con incógnitas λ, μ y ν y parámetros x_1, x_2, x_3 y x_4 es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 2 & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & -1 & 1 & x_3 + 1 \\ -1 & 1 & 0 & x_4 - 2 \end{pmatrix},$$

Y para que este sistema tenga solución el determinante de A^* debe ser nulo, es decir, tenemos:

$$|A^*| = 0 \Rightarrow x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3 = 0$$

104. La ecuación general de una circunferencia en el plano se puede escribir como:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Se tienen los puntos: *A*(1, 2), *B*(–1, 1), *C*(*m*, 0) y *D*(0, *m*). Calcula el valor de *m* para que los cuatro puntos pertenezcan a una circunferencia.

Para que los puntos *A*, *B*, *C* y *D* pertenezcan a una circunferencia, el siguiente sistema con incógnitas *a*, *b* y *c* y parámetro *m* debe ser compatible, de hecho, compatible determinado, ya que 3 puntos distintos no pueden pertenecer a más de una circunferencia (hablamos de 3 puntos distintos debido a que *C* y *D* podrían coincidir si $m = 0$):

$$\begin{cases} 1+4+a+2b+c=0 \\ 1+1-a+b+c=0 \\ m^2+ma+c=0 \\ m^2+mb+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b+c=-5 \\ -a+b+c=-2 \\ ma+c=-m^2 \\ mb+c=-m^2 \end{cases}$$

Es decir, si las matrices asociadas al sistema son A y A^*, con rango máximo 3 y 4 respectivamente, debemos tener $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. En particular el determinante de A^* debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ m & 0 & 1 & -m^2 \\ 0 & m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m(2-m)(m+1) = 0$$

- Para $m = 0$ se tiene $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, para ello basta observar que el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

  Por tanto, los puntos *A*, *B*, *C* y *D* pertenecen a la misma circunferencia si $m = 0$. Además, resolviendo el sistema, según el menor de orden 3 anterior podemos eliminar la cuarta ecuación, podemos obtener la ecuación de dicha circunferencia:

$$\begin{cases} a+2b+c=-5 \\ -a+b+c=-2 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{3},\ b = -\frac{7}{3},\ c = 0 \Rightarrow \text{Ecuación de la circunferencia: } x^2 + y^2 - \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}y = 0$$

- Para $m = 2$ se tiene $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y resolviendo el sistema se obtiene la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{cases} a+2b+c=-5 \\ -a+b+c=-2 \\ 2a+c=-4 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = -1,\ c = -2 \Rightarrow \text{Ecuación de la circunferencia: } x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$$

- Para $m = -1$ se tiene $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y resolviendo el sistema se obtiene la ecuación de la circunferencia:

$$\begin{cases} a+2b+c=-5 \\ -a+b+c=-2 \\ -a+c=-1 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = -1,\ c = -2 \Rightarrow \text{Ecuación de la circunferencia: } x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$$

105. **Se considera el sistema:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + ky - 2z + t = 2} \\ \boldsymbol{2x - y + 2z = k} \\ \boldsymbol{kx + 2y + t = 5} \\ \boldsymbol{-x + y + kz - t = k} \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro k.

b) Resuélvelo cuando sea posible.

Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & k & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & k \\ k & 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & k & -1 & k \end{pmatrix}$, con rango máximo 4.

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 - k + 12 = 0 \Rightarrow k = -4,\ k = 3$$

- Para $k \neq -4$ y $k \neq 3$ tenemos $|A| \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 4$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k & -2 & 1 \\ k & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ k & 1 & k & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k^3 - 4k^2 - k + 12}{-k^2 - k + 12} = -\frac{k^2 - k - 4}{k + 4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & k & 2 & 0 \\ k & 5 & 0 & 1 \\ -1 & k & k & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{k^3 - 5k^2 - 2k + 24}{-k^2 - k + 12} = -\frac{k^2 - 2k - 8}{k + 4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 2 & -1 & k & 0 \\ k & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & k & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k^3 + k^2 + 6k}{-k^2 - k + 12} = \frac{k^2 + 2k}{k + 4}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & k \\ k & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & k & k \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-k^4 + 2k^3 + 6k^2 - 13k + 12}{-k^2 - k + 12} = \frac{k^3 + k^2 - 3k + 4}{k + 4}$$

- Para $k = -4$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 3$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 112 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 4$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $k = 3$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 3$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 < \text{nº de incógnitas} = 4$ y el sistema es compatible indeterminado con grado de indeterminación 1.

  Además, teniendo en cuenta el menor de orden 3 anterior, lo podemos resolver eliminado la primera ecuación, tomando $x = \lambda$ y aplicando la regla de Cramer al sistema resultante:

$$\begin{cases} -y + 2z = 3 - 2\lambda \\ 2y + t = 5 - 3\lambda \\ y + 3z - t = 3 + \lambda \end{cases}$$

$$x = \lambda \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3-2\lambda & 2 & 0 \\ 5-3\lambda & 0 & 1 \\ 3+\lambda & 3 & -1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{7+2\lambda}{9} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-2\lambda & 0 \\ 2 & 5-3\lambda & 1 \\ 1 & 3+\lambda & -1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{17-8\lambda}{9} \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3-2\lambda \\ 2 & 0 & 5-3\lambda \\ 1 & 3 & 3+\lambda \end{vmatrix}}{9} = \frac{31-31\lambda}{9}$$

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Estudia cuántas soluciones tiene el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ x - 3y = 2 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Como $|A^*| = -6 \neq 0$, tenemos $\text{rg}(A^*) = 3$. Como $\text{rg}(A) \leq 2$ tenemos $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible, es decir, no tienen ninguna solución.

2. **Aplica el método de Gauss para resolver los sistemas:**

a) $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ -x+2y=0 \\ 3y-2z=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-3y+5z=2 \\ 3x-4y+z=1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ -x+2y=0 \\ 3y-2z=-1 \end{cases} \xrightarrow[E_3\to E_3+E_1]{E_2\to E_2-2E_1} \begin{cases} x-2y+z=2 \\ 3y-3z=-3 \\ z=2 \\ 3y-2z=-1 \end{cases} \xrightarrow[E_4\to E_4-E_2]{} \begin{cases} x-2y+z=2 \\ 3y-3z=-3 \\ z=2 \\ z=2 \end{cases} \xrightarrow[E_4=E_3]{} \begin{cases} x-2y+z=2 \\ 3y-3z=-3 \\ z=2 \end{cases} \to \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y+5z=2 \\ 3x-4y+z=1 \end{cases} \xrightarrow[E_2\to 2E_2-3E_1]{} \begin{cases} 2x-3y+5z=2 \\ y-13z=-4 \end{cases} \to \begin{cases} x=-5+17\lambda \\ y=-4+13\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

3. **Discute los siguientes sistemas para los distintos valores del parámetro y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} -2x+2y+z=3 \\ ax+3y+2z=1 \\ x-y+(a+1)z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \lambda x-y+2z=0 \\ 2x+\lambda y-z=0 \\ x-\lambda y+2z=0 \end{cases}$

a) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ a & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2-9a-9=0 \Rightarrow a=-3,\ a=-\frac{3}{2}$$

- Para $a\neq -3$ y $a\neq -\frac{3}{2}$ tenemos $|A|\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$ y el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & a+1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{7a+12}{-2a^2-9a-9} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-3a^2-5a+3}{-2a^2-9a-9} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3}{2a+3}$$

- Para $a=-3$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-9\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*)=3$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq \text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

- Para $a=-\frac{3}{2}$ tenemos $|A|=0$, $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -\frac{3}{2} & 3 & 2\\ 1 & -1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1 & 3\\ -\frac{3}{2} & 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

  El menor $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A)=2$.

  Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}=\frac{3}{2}\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A^*)=3.$$

  Por tanto, $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ y el sistema es incompatible.

b) Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre será compatible.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 2\\ 2 & \lambda & -1\\ 1 & -\lambda & 2\end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A|=0\Rightarrow \lambda^2-6\lambda+5=0\Rightarrow \lambda=1, \lambda=5$$

- Para $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq 5$ tenemos $|A|\neq 0$, por tanto, el sistema es compatible determinado. Su única solución es la trivial $x=y=z=0$.

- Para $\lambda=1$ tenemos $|A|=0$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado y $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

  Para resolverlo observemos que el menor $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$, por lo que podemos eliminar la tercera ecuación y tomar $z=t$:

$$\begin{cases}x-y=-2t\\ 2x+y=t\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{t}{3},\ y=\frac{5t}{3},\ z=t$$

- Para $\lambda=5$ tenemos $|A|=0$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado y $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ 2 & 5 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

  Para resolverlo observemos que el menor $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-15\neq 0$, por lo que podemos eliminar la primera ecuación y tomar $z=t$:

$$\begin{cases}2x+5y=t\\ x-5y=-2t\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{t}{3},\ y=\frac{t}{3},\ z=t$$

4. Se tiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

a) Halla el valor que debe tener m para que al añadir la ecuación $x + my + 3z = -2$ resulte un sistema compatible indeterminado.

b) Añade una ecuación al primer sistema de modo que resulte un sistema compatible determinado.

a) Las matrices asociadas al nuevo sistema son $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & m & 3 & -2 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

Para que el sistema sea compatible indeterminado es necesario (pero no suficiente) que

$$|A| = 0 \Rightarrow 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Para este valor de m el sistema es compatible indeterminado, ya que el menor $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$, y ampliando este menor con la columna de términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

b) Para que el nuevo sistema sea compatible determinado debe ser $|A| \neq 0$, es decir, $m \neq 3$, por lo que, por ejemplo, se puede añadir la ecuación $x + 3z = -2$.

5. En una tienda de alimentación se vende carne de tres calidades a 10, 15 y 20 € euros el kilo. La semana pasada se vendieron 150 kilos, obteniéndose unos ingresos de 2150 €. Los ingresos obtenidos por la venta de carne de calidad superior han sido *k* veces los obtenido con la calidad inferior.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular cuánta carne se ha vendido de cada tipo.

b) Determina si hay algún valor de k para el que el sistema no tenga solución.

a) x: kg de carne de calidad superior y: kg de carne de calidad media z: kg de carne de calidad inferior

Las condiciones del enunciado nos llevan a plantear el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + z = 150 \\ 20x + 15y + 10z = 2150 \\ 20x = 10kz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 150 \\ 4x + 3y + 2z = 430 \\ 2x - kz = 0 \end{cases}$$

b) Para que el sistema no tenga solución es necesario (pero no suficiente) que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo:

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

Para este valor de k el sistema no tiene solución, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$, y ampliando este menor con la columna de términos independientes tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 4 & 3 & 430 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -40 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **El sistema de ecuaciones** $\begin{cases} \boldsymbol{x+2y-z=1} \\ \boldsymbol{2x-y+2z=0} \\ \boldsymbol{-x+ky-3z=1} \end{cases}$

A. Para $k \neq 2$ es incompatible.

B. Para $k = 3$ es incompatible.

C. Es siempre compatible.

D. Es siempre incompatible.

Las matrices asociadas al sistema son $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & k & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & k & -3 & 1 \end{pmatrix}$, con rango máximo 3.

$$|A| = 0 \Rightarrow -4k + 12 = 0 \Rightarrow k = 3$$

Para $k \neq 3$ tenemos $|A| \neq 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$ y el sistema será compatible determinado.

Para $k = 3$ tenemos $|A| = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, con lo que $\text{rg}(A) = 2$. Para determinar $\text{rg}(A^*)$ ampliamos este menor añadiendo la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$$

Por tanto, para $k = 3$ tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Es decir, la respuesta correcta es C.

2. **En un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas se sabe que el rango de la matriz ampliada es 3. Entonces:**

A. El sistema es compatible y determinado.

B. El sistema es compatible indeterminado.

C. El sistema es incompatible.

D. Si A es la matriz de los coeficientes $\text{rg}(A) = 2$ o $\text{rg}(A) = 3$.

Sabemos que $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A)$ o $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) + 1$, por tanto, D es correcta.

Además, si fuera $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A)$ el sistema sería compatible determinado y si fuera $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) + 1$ sería incompatible, por lo que B nunca se cumple, mientras que A y C no siempre se cumplen.

3. **Si a un sistema compatible y determinado se le añade una ecuación. El nuevo sistema:**

A. No puede ser compatible y determinado.

B. No puede ser incompatible.

C. No puede ser compatible indeterminado.

D. Necesariamente es compatible y determinado.

El nuevo sistema puede seguir siendo compatible y determinado, basta añadir una ecuación que sea combinación lineal de las originales. Por tanto, A es incorrecta.

También son incorrectas B y D, basta añadir una ecuación que contradiga a las originales para que el sistema sea incompatible.

En cambio C es correcta, si el nuevo sistema fuera compatible indeterminado, infinitas soluciones verificarían sus ecuaciones, en particular verificarían las ecuaciones originales, con lo que el sistema original sería compatible indeterminado.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Las soluciones del sistema** $\begin{cases} \mathbf{2x + y + z = 1} \\ \mathbf{x - y + 2z = 2} \end{cases}$ **pueden ser:**

A. $x = 1 - \lambda,\ y = -1 + \lambda,\ z = \lambda$

B. $x = \lambda,\ y = 1 + \lambda,\ z = 1 - \lambda$

C. $x = \lambda,\ y = -\lambda,\ z = 1 - \lambda$

D. Todas son ciertas.

Sustituyendo los valores dados de *x*, *y* y *z* en las ecuaciones del sistema verificamos que las respuestas correctas son A y C.

5. **Se tiene un sistema de ecuaciones *S* y el sistema homogéneo *S*' en el que los coeficientes de las incógnitas son iguales a los de *S*, ambos con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas:**

A. Si *S* es compatible y determinado, *S*' solo tiene la solución trivial.

B. Si *S* es incompatible, *S*' tiene soluciones distintas de la trivial.

C. Si *S* es compatible indeterminado, *S*' solo tiene la solución trivial.

D. Si *S*' tiene soluciones distintas de la trivial, *S* es compatible indeterminado.

Como ambos sistemas tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y comparten la matriz de coeficientes tenemos que *S* es compatible determinado si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo, es decir, si y solo si *S*' es compatible determinado, es decir, si y solo si *S*' solo tiene la solución trivial.

Por tanto, las respuestas correctas son A y B.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **En un sistema de ecuaciones:**

1. El sistema es compatible y determinado.

2. La matriz de los coeficientes es cuadrada y regular.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

Sean *A* y A^* las matrices asociadas al sistema.

Si la matriz de coeficientes, *A*, es cuadrada de orden *n* y regular, tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = n$ y, por tanto, el sistema es compatible determinado, es decir, $2 \Rightarrow 1$.

En cambio, si el sistema es compatible determinado tenemos $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas}$, pero esto no implica necesariamente que *A* sea cuadrada (ni, por tanto, regular), basta considerar como contraejemplo el sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas compatible determinado (con solución $x = y = 1$)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, la relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se tiene un sistema de ecuaciones con tres incógnitas en que la matriz de los coeficientes es *A* y la matriz ampliada es A^*. Se quiere saber si el sistema es compatible o no y si es determinado o no y se tiene la siguiente información:**

1. Tiene cuatro ecuaciones.

2. $\text{rg}(A) = 3$

3. $\text{rg}(A^*) = 3$

A. El dato 1 es innecesario.

B. El dato 2 es innecesario.

C. El dato 3 es innecesario.

D. Falta información para contestar.

De 2 y 3 se deduce que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3$, con lo que el sistema sería compatible determinado y el dato 1 sería innecesario.

En cambio, 1 y 2 no bastan para discutir el sistema, ya que podría ser $\text{rg}(A^*) = 3$ (compatible determinado) o $\text{rg}(A^*) = 4$ (incompatible).

Análogamente, 1 y 3 no bastan, ya que podría ser $\text{rg}(A) = 3$ (compatible determinado) o $\text{rg}(A) = 2$ (incompatible).

Por tanto, la respuesta correcta es A.