Actividades

1. Enuncia la segunda ley de Kepler. Explica en qué posiciones de la órbita elíptica la velocidad del planeta es máxima y en cuáles es mínima.

Según esta ley, la velocidad areolar del planeta es constante. El área barrida depende del radio vector (distancia del Sol al planeta) y del árco de órbita recorrido: son inversamente proporcionales. En una órbita elíptica el radio vector es mínimo cuando el planeta se encuentra en perihelio. En esa posición el arco recorrido es máximo, para un tiempo determinado. Por tanto, en esa posición la velocidad orbital es máxima. Por la misma razón, la velocidad será mínima cuando el planeta se encuentra en afelio.

$$A_1 = A_2 \ ; \ v_{\text{perihelio}} \cdot d_p = v_{\text{afelio}} \cdot d_a$$

En una órbita elíptica se cumple $d_p < d_a \Rightarrow v_p > v_a$

2. Enuncia la tercera ley de Kepler. Deduce la expresión de la constante de esta ley en el caso de órbitas circulares.

La tercera ley de Kepler dice que en una órbita elíptica el cuadrado del periodo es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de dicha órbita:

$$T^2 = KR^3$$

Según la 3.ª ley de Kepler se cumple

$$\frac{T^2}{R^3} = k$$

Si la órbita es circular, la velocidad orbital es constante y se cumple que la fuerza gravitatoria es igual a la fuerza centrípeta:

$$\frac{GM_s m_p}{R^2} = m_p \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_s}{R}$$

También sabemos que en un movimiento circular se cumple

$$T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_s}$$

De donde se deduce el valor de la constante *k:*

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = k$$

3. Aplica la tercera ley de Kepler para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular, con un radio medio de 1,49 · 10⁸ km. Dato: constante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

La 3.ª ley de Kepler permite calcular la masa del Sol. De

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

se obtiene

$$M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} =$$

$$= \frac{4 \,.\, 3{,}14^2 \,.\, (1{,}49 \,.\, 10^{11}\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot \text{kg}^{-2}\ (365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s})^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

4. La distancia media del Sol a Júpiter es 5,2 veces mayor que la distancia entre el Sol y la Tierra. ¿Cuál es el periodo de la órbita de Júpiter alrededor del Sol?

El periodo de cualquier planeta en función del radio de su órbita viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_o^3}{GM_s}}$$

Esta ecuación la aplicamos a Júpiter y a la Tierra:

$$\Rightarrow \frac{T_J}{T_T} = \sqrt{\frac{R_{oJ}^3}{R_{oT}^3}} = \sqrt{5{,}2^3}$$

$$T_J = \sqrt{5{,}2^3}\,T_T = 11{,}85 \cdot T_T = 11{,}85 \text{ años}$$

5. De acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad areolar es siempre constante para cualquier planeta. ¿Es constante siempre la velocidad orbital? ¿En qué condiciones lo es? ¿Qué relación existiría entre ambas velocidades en el caso de que la órbita fuera circular?

La velocidad orbital depende de la distancia entre el Sol y el planeta. La velocidad orbital solamente será constante cuando se mantenga constante la distancia entre el Sol y el planeta. Esto ocurre si la órbita es circular.

Si la órbita es circular ambas velocidades están relacionadas:

$$v_a = \frac{\pi R_o^2}{T} \ ; \ v_0 = \frac{2\pi R_o}{T} \Rightarrow \frac{v_a}{v_o} = \frac{R_o}{2}$$

6. Calcula la velocidad areolar del planeta Urano, sabiendo que recorre una órbita circular de radio R = 2,87 · 10¹² m en un tiempo de T = 2,66 · 10⁹ s.

$$v_a = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{3{,}14 \cdot (2{,}87 \,.\, 10^{12}\ \text{m})^2}{2{,}66 \cdot 10^9\ \text{s}} = 9{,}7 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

7. Aplicando las leyes de Kepler, calcula el periodo orbital de Urano si el radio orbital de la Tierra es 1,50 · 10¹¹ m y el de Urano 2,87 · 10¹² m.

$$\frac{T_U^2}{R_{oU}^3} = \frac{T_T^2}{R_{oT}^3} \ ; \ T_U^2 = \frac{T_T^2 \cdot R_{oU}^3}{R_{oT}^3} = \frac{T_T^2 \,.\, (2{,}87 \cdot 10^{12}\ \text{m})^3}{(1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3}$$

De donde

$$T_U = T_T \sqrt{(19{,}13)^3} = 83{,}68\ T_T$$

$$T_U = 83{,}\ 68 \text{ años} = 2{,}64 \cdot 10^9\ \text{s}$$

8. Calcula la velocidad orbital y la velocidad areolar de la Tierra sabiendo que nuestro planeta gira en torno al Sol siguiendo una órbita circular de radio 1,5 · 10¹¹ m.

$$v_o = \frac{2\pi R}{T} = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s}} = 2{,}93 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

$$v_a = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{7{,}06 \cdot 10^{22}\ \text{m}^2}{3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s}} = 2{,}24 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

9. Indica las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. Luego, explica en qué punto, entre dos masas puntuales, puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual, y cuál sería su energía potencial.

- Es universal: existe para todos los cuerpos y no depende del medio en que se encuentren.

- La fuerza de interacción es central, de atracción y conservativa: está dirigida hacia el punto donde se encuentra la masa que la origina y solamente depende de la distancia.

Si las masas puntuales son iguales, el punto de equilibrio estaría situado en el punto medio del segmento que las une. Si las masas son distintas y están separadas una distancia *d,* el punto de equilibrio estaría a una distancia *r* de la masa mayor *M* tal que la fuerza de atracción resultante sobre la masa de prueba sea cero. Es decir, se cumple:

$$\frac{GMm'}{r^2} = \frac{GMm'}{(d-r)^2} = \frac{r^2}{(d-r)^2} = \frac{M}{m}$$

donde *r* es la distancia del punto de equilibrio a la masa mayor *M*. La energía potencial asociada al sistema *Mm* de dos partículas viene dada por:

$$-\frac{GMm}{d}$$

donde *d* es la distancia relativa entre ellas.

10. La velocidad orbital de un planeta depende del radio de la órbita que describe en torno al Sol.

Calcula la relación que existe entre las velocidades orbitales de la Tierra y Marte, sabiendo que los radios de las órbitas respectivas son: $r_T = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m; $r_M = 2{,}28 \cdot 10^{11}$ m.

La velocidad orbital se obtiene teniendo presente que la fuerza centrípeta a que está sometido un planeta es originada por la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol sobre dicho planeta.

$$\frac{GMs \cdot m_T}{R^2_{oT}} = \frac{m_T v^2{}_T}{R_{oT}} \Rightarrow V^2_T = \frac{GM_s}{R_{oT}}$$

De la misma forma la velocidad de Marte sería:

$$v^2_M = \frac{GM_s}{R_{oM}}$$

Relación entre las velocidades de ambos planetas:

$$\frac{v^2_M}{v^2_T} = \frac{R_{oT}}{R_{oM}} = \frac{1{,}49 \cdot 10^{11}}{2{,}28 \cdot 10^{11}} \Rightarrow v_M = 0{,}81\ v_T$$

11. Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un periodo de 2 h. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? (Toma como radio de la Tierra el valor de 6 400 km).

$$\frac{GM_T}{R_o} = v_2 = \frac{4\pi^2 R_o^2}{T^2}\ ;\ R_o^3 = \frac{GM_T T_2}{4\pi^2}$$

$$R_o^3 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot (2 \cdot 3\,600\ \text{s})^2}{4\pi^2} = 5{,}25 \cdot 10^{20}\ \text{m}^3$$

$$R_o = \sqrt[3]{524 \cdot 10^{18}} = 8{,}07 \cdot 10^6\ \text{m} = 8\,070\ \text{km}$$

$$h = R_o - R_T = 8\,070\ \text{km} - 6\,400\ \text{km} = 1\,670\ \text{km}$$

12. En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determina:

a) **La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite, de la Tierra y del radio de la órbita.**

b) **La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.**

a) La velocidad orbital viene dada por:

$$v_2 = \frac{GM_T}{R_o}$$

Obtenida igualando la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite con la fuerza centrípeta del satélite. La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v^2 = \frac{1}{2} m_s \frac{GM_T}{R_o} = \frac{1}{2} G \frac{M_T m_s}{R_o}$$

b) Energía potencial gravitatoria asociada al sistema $M_T\ m_s$:

$$E_p = -\frac{GM_T m_s}{R_o}$$

Energía mecánica:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{R_o} + \left(-\frac{GM_T m_s}{R_o}\right) = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{R_o} = \frac{1}{2} E_p$$

13. Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un periodo de 2 h. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? (Toma como radio de la Tierra el valor de 6 400 km.)

Si el satélite tiene una órbita estable, se cumple que:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$

de donde se deduce que el radio de la órbita vale:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{GM}{v^2} \\ v &= \frac{2\pi R}{T} \end{aligned}\right\}\quad R^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (2 \cdot 3\,600\ \text{s})^2}{4 \cdot 9{,}85}} =$$

$= 7{,}9 \cdot 10^6$ m $= 7\,900$ km

Luego la altura será $h = 7\,900$ km $- 6\,400$ km $= 1\,500$ km.

14. Se coloca un satélite meteorológico de 1 000 kg en órbita circular a 300 km sobre la superficie terrestre. Determina:

a) **La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo en la órbita.**

b) **El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.**

Datos: Radio medio de la Tierra, 6 370 km; $g_0 = 9{,}80$ m/s².

a) La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra origina la fuerza centrípeta necesaria para que el satélite describa una órbita circular:

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

De donde se obtiene la velocidad lineal:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 0{,}3 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 7\,721{,}3\ \text{m/s}$$

La aceleración centrípeta viene determinada por:

$$a = \frac{v^2}{R+h} = \frac{5{,}93 \cdot 10^7\ \text{m}^2/\text{s}^2}{6{,}67 \cdot 10^6\ \text{m}} = 8{,}94\ \text{m/s}^2$$

15. La nave espacial *Discovery*, lanzada en octubre de 1998, describía en torno a la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7,62 km/s.

***a)* ¿A qué altura se encontraba?**

***b)* ¿Cuál era su periodo? ¿Cuántos amaneceres contemplaban cada 24 h los astronautas que viajaban en el interior de la nave?**

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,370$ km.

a) La velocidad de la nave en función de la altura viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}; \qquad R + h = \frac{GM}{v^2}$$

$$h = \frac{GM}{v^2} - R =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(7{,}62 \cdot 10^3)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} =$$

$$= 5{,}0 \cdot 10^5\ \text{m}$$

b) El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi\,(R+h)}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 6{,}87 \cdot 10^6\ \text{m}}{7{,}62 \cdot 10^3\ \text{m/s}} = 5{,}66 \cdot 10^3\ \text{s} = 1{,}57\ \text{h}$$

En un día dan 15 vueltas a la Tierra:

$$n = \frac{24}{1{,}57} \simeq 15$$

16. Resuelve las siguientes cuestiones:

***a)* Explica qué se entiende por velocidad de escape y deduce razonadamente su expresión matemática.**

***b)* Razona qué energía habría que comunicar a un objeto de masa *M,* situado a una altura *h* sobre la superficie de la Tierra, para que se alejase indefinidamente de ella.**

***c)* Si la masa de la Tierra se cuadruplica, manteniendo el radio, ¿cómo se modificaría la velocidad de escape?**

a) Velocidad de escape es la velocidad mínima con que se debe lanzar un cuerpo desde la superficie de la Tierra (o de cualquier planeta) para que «escape» de la atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el cuerpo.

Supongamos que queremos lanzar al espacio un cohete desde la superficie terrestre. Se debe cumplir el principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 + \left(-\frac{GM_T m}{R_T}\right) = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\,GM_T}{R_T}}$$

b) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2} m v_e^2 + \left(-\frac{GM_T m}{R_T + h}\right) = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\,GM_T}{R_T + h}}$$

c) De acuerdo con la fórmula deducida en el apartado *a),* la velocidad de escape depende de la masa de la Tierra. Si la masa de la Tierra se cuadruplica, la velocidad de escape se duplica.

17. Considera dos satélites de masas iguales en órbitas circulares alrededor de la Tierra. Uno de ellos gira en una órbita de radio *r* y el otro en una órbita 2*r*. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

***a)* ¿Cuál de los dos se desplaza con mayor velocidad?**

***b)* ¿Cuál de los dos tiene mayor energía potencial?**

***c)* ¿Cuál de ellos tiene mayor energía mecánica?**

a) La velocidad orbital depende del radio de la órbita, como se deduce igualando la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre los satélites con la fuerza centrípeta que actúa sobre éstos en su movimiento circular:

$$\frac{GM_T m}{R_o^2} = m\,\frac{v_0^2}{R_o} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{GM_T}{R_o}}$$

Aplicamos esta expresión a los dos satélites:

Satélite 1 y 2:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{o1}}}\ ;\ v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{2R_{o1}}}$$

De donde se deduce:

$$v_1 = \sqrt{2}\,v_2$$

b) La energía potencial también depende del radio de la órbita:

$$E_p = -\frac{GM_T m}{R_o}$$

Energía potencial del primer satélite:

$$E_{p1} = -\frac{GM_T m}{R_o}$$

Energía potencial del segundo satélite:

$$E_{p2} = -\frac{GM_T m}{2R_o}$$

De donde se deduce la relación: $E_{p1} = 2\,E_{p2}$

c) Aplicando las relaciones anteriores obtenemos la relación de la energía mecánica:

$$E_{m1} = \frac{1}{2} m v_1^2 + E_{p1} = \frac{1}{2} m(\sqrt{2}\,v_2)^2 + 2E_{p2} = 2\left(\frac{1}{2} m v_1^2 + E_{p2}\right) = E_{m2}$$

18. En un instante t_1 la energía cinética de una partícula es 30 J y su energía potencial, 12 J. En un instante posterior, t_2, la energía cinética de la partícula es 18 J.

***a)* Si únicamente actúan fuerzas conservativas sobre la partícula, ¿cuál es su energía potencial en el instante t_2?**

***b)* Si la energía potencial en el instante t_2 fuese 6 J, ¿actuarían fuerzas no conservativas sobre la partícula?**

a) Si solamente actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica permanece constante:

$$E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow 42\ \text{J} = 18\ \text{J} + E_p \Rightarrow E_p = 24\ \text{J}$$

b) Si la energía potencial en t_2 fuese 6 J no se cumple el principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_{mo} \neq E_{mf}\ ;\ 42\ \text{J} > 18\ \text{J} + 6\ \text{J}$$

La disminución de la energía mecánica se ha empleado en vencer las fuerzas no conservativas.

19. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

***a)* ¿A qué altura se encuentra el satélite?**

***b)* ¿Se trata de un satélite estacionario?**

a) La velocidad de escape se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, ya que la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite es conservativa.

Así, la velocidad de escape desde la superficie terrestre se obtiene igualando la energía mecánica inicial en la superficie a la final, en el infinito.

$$\frac{1}{2}\,m\,v_T^2 + \left(-G\,\frac{M_T m}{R_T}\right) = 0$$

Es decir:

$$v_T = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}}$$

La velocidad de escape desde la órbita a una altura *h* sobre la superficie terrestre es análogamente:

$$v_h = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T + h}}$$

Como la relación entre las velocidades de escape es $v_h = 1/2 v_T$, resulta que:

$$v_h = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T + h}} = \frac{1}{2}\,v_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}}$$

de donde podemos hallar la altura a la que está el satélite:

$$\frac{2\,G\,M_T}{R_T + h} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\,G\,M_T}{R_T} \;\Rightarrow\; h = 3\,R_T$$

b) No, porque el periodo de rotación del satélite es distinto que el de rotación terrestre.

20. El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre, y su masa la mitad. Calcula la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta en función de sus correspondientes valores terrestres.

La intensidad del campo gravitatorio con la distancia se obtiene aplicando la Ley de la Dinámica.

El caso general para un cuerpo esférico uniforme de masa *M* y radio *R* la intensidad de campo gravitatorio en su superficie es:

$$g_P = G\,\frac{M_p}{R_P^2}$$

Según los datos del problema, $R_P = \frac{1}{3}\,R_T$ y $M_P = \frac{1}{2}\,M_T$, así que sustituyendo resulta:

$$g_P = G\,\frac{M_P}{R_P^2} = G\,\frac{\frac{1}{2}\,M_T}{\left(\frac{1}{3}\,R_T\right)^2} = \frac{9}{2}\,G\,\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{9}{2}\,g_0$$

La velocidad de escape se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, de donde se obtiene:

$$v_P = \sqrt{\frac{2\,G\,M_P}{R_P}}$$

Sustituyendo la masa del planeta y su radio en función de los de la Tierra, la velocidad de escape es:

$$v_P = \sqrt{\frac{2\,G\,\frac{1}{2}\,M_T}{\frac{1}{3}\,R_T}} = \sqrt{\frac{3\,G\,M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\;v_T$$

21. Dejamos caer un objeto desde la terraza de un edificio. Se trata de sistema dinámico.

***a)* Explica por qué es dinámico.**

***b)* ¿Es estable o inestable? Razona la respuesta.**

***c)* ¿Qué ley rige el proceso?**

***d)* Si el objeto es más pesado y lo dejamos caer desde una altura mayor ¿se modifica el estado final de equilibrio?**

a) Se trata de un sistema dinámico porque su estado evoluciona con el tiempo. El valor de las variables que definen el sistema (posición, velocidad, etc.) depende del tiempo.

b) Es un sistema dinámico estable porque pequeños cambios en las condiciones iniciales no producen grandes cambios en el proceso: no influyen significativamente en el estado final del sistema. Se puede predecir la evolución del sistema porque se realiza con una ley bien definida.

c) La ley de la dinámica de Newton.

d) No. El estado final será el mismo.

22. Cita ejemplos de sistemas dinámicos que evolucionan de forma caótica.

La velocidad del agua en un río. La trayectoria del humo que sale de una chimenea. Los atascos de coches en una carretera.

Ciencia, tecnología y sociedad

1. La hipótesis de la materia oscura, ¿confirma, contradice o no tiene nada que ver con la ley de la gravitación universal?

La hipótesis de la materia oscura se concibe para confirmar la ley de la gravitación universal.

2. ¿Es adecuado el calificativo de universal con que se conoce la ley de gravitación de Newton?

Sí. Por ahora la ley de Newton explica el movimiento de todos los cuerpos celestes del Universo.

3. ¿En qué consiste la materia oscura?

Es materia cuya existencia no se detecta porque no emite radiación electromagnética suficiente.

4. ¿Qué problema resuelve la existencia de la materia oscura?

La rotación de las galaxias.

5. Realiza un informe, junto con cuatro compañeros de clase, sobre el proyecto español «Método de multimensajeros para la detección de materia oscura». Utiliza Internet como fuente de información.

Actividad abierta.

6. Realiza un estudio comparativo entre materia oscura y antimateria.

Actividad abierta.

Problemas resueltos

Leyes de Kepler. Ley de gravitación universal

1. Si la Tierra describe una órbita de $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m de radio, calcula la velocidad areolar (área barrida en un segundo) en m^2/s del radio vector trazado desde el Sol a la Tierra.

La velocidad areolar, por definición, se obtiene de:

$$v_a = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2}{365 \cdot 86\,400\ \text{s}} = 2{,}2 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

2. Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas órbitas tienen radios de 9 400 y 23 000 km, respectivamente. Fobos tarda 7,7 h en dar una vuelta alrededor del planeta. Aplicando las leyes de Kepler, halla el periodo de Deimos.

De la Tercera Ley de Kepler despejamos el periodo T_1:

$$T_1 = \sqrt{\frac{T_2^2 r_1^3}{r_2^3}} = \sqrt{\frac{(7{,}7\ \text{h})^2 \cdot (23\,000\ \text{km})^3}{(9\,400\ \text{km})^3}} = 29{,}4\ \text{h}$$

3. La masa de la Tierra es $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg y la masa de la Luna $7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg. Si la fuerza gravitatoria entre ellas es $1{,}9 \cdot 10^{20}$ N, ¿qué distancia hay entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna?

De la Ley de Newton despejamos la distancia:

$$r = \sqrt{\frac{GMm}{F}} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}9 \cdot 10^{20}\ \text{N}} = 3{,}9 \cdot 10^8\ \text{m}$$

4. Si la Ley de la Gravitación variara *a)* $\frac{1}{r}$, *b)* $\frac{1}{r^3}$ en lugar de $\frac{1}{r^2}$, ¿cómo afectaría esto al peso de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra?

El peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra vale:

$$P = mg, \qquad \text{siendo} \qquad g = \frac{GM}{R^2}$$

a) Si la Ley de la Gravitación dependiera de $\frac{1}{r}$, el valor de la gravedad y el peso serían:

$$g' = G\frac{M}{R}; \qquad P' = mg' = m\frac{GM}{R} = Rmg$$

Sería, por tanto, R veces mayor: $P' = RP$.

b) En este caso la gravedad y el peso serían:

$$g'' = G\frac{M}{R^3}; \qquad P'' = mg'' = \frac{1}{R}mg = \frac{P}{R}$$

El peso sería R veces menor.

5. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Expresa la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta en función de la masa de este, de su radio y de la constante de gravitación universal G.

b) Si la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre vale 9,81 m^{s-2}, calcula la aceleración de la gravedad a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra.

a) De acuerdo con la ley de la gravitación universal, podemos expresar la aceleración de la gravedad en función de la masa y del radio de la Tierra:

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}; \qquad g = \frac{GM}{R^2}$$

b) La gravedad en la superficie terrestre vale:

$$g_o = \frac{GM}{R_T^2} = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

y su valor a la altura $h = RT$ es:

$$g_h = \frac{GM}{(R_T + h)^2} = \frac{GM}{(R_T + R_T)^2} = \frac{GM}{4R_T^2} = \frac{1}{4}g_o = 2{,}45\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Fuerzas conservativas. Energía potencial gravitatoria

6. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s. Si el rozamiento con el aire es despreciable, calcula, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica, la altura máxima que alcanza. ¿Qué altura máxima alcanzará en el caso de que haya rozamiento y se pierda para vencerlo el 20 % de la energía de lanzamiento?

La energía mecánica en el suelo debe ser igual a la energía mecánica en el punto más alto.

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = mgh + 0$$

de donde se deduce que:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2\,500\ \text{m}^2/\text{s}^2}{19{,}6\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 128\ \text{m}$$

En el caso de que se pierda energía por causa del rozamiento:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + 0{,}2 \cdot \frac{1}{2}mv^2$$

$$h = \frac{v^2 - 0{,}2v^2}{2g} = \frac{2\,500\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 0{,}2 \cdot 2\,500\ \text{m}^2}{19{,}6\ \text{m}/\text{s}^2} = 102\ \text{m}$$

7. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4 000 m/s. Calcula la altura máxima que alcanzará. (Dato: R_T = 6 400 km.)

Para hallar la altura máxima alcanzada aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, puesto que el cuerpo se mueve bajo la acción de la gravedad, que es una fuerza conservativa.

$$-G\,\frac{Mm}{R_T} + \frac{1}{2}\,mv^2 = -G\,\frac{Mm}{R_T + h}$$

de donde:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{GMm}{R_T} - \frac{GMm}{R_T + h}$$

$$\frac{1}{2}\,v^2 = \frac{GM}{R_T}\cdot\frac{h}{R_T + h}$$

Como no nos han dado el dato de la masa de la Tierra, expresamos la igualdad anterior en función de la gravedad, que suponemos conocida:

$$g = \frac{GM}{R_T^2}$$

Luego:

$$\frac{1}{2}\,v^2 = R_T g\,\frac{h}{R_T + h}$$

Despejando h tenemos:

$$h = \frac{0{,}5\,v^2 R_T}{R_T g - 0{,}5\,v^2} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 16 \cdot 10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}}{6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 - 0{,}5 \cdot 16 \cdot 10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 9{,}4 \cdot 10^5\ \text{m}$$

8. Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio $r_0 = 2\,R_T$ hasta otra de radio $r_1 = 3\,R_T$. Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; $g_0 = 9{,}8$ m/s^2.

El trabajo necesario viene dado por el incremento de la energía mecánica del satélite al pasar de una órbita a la otra.

– Energía mecánica correspondiente a la órbita inicial:

$$E_1 = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{GMm}{2R} = -\frac{R}{4}\,mg$$

– Energía mecánica correspondiente a la órbita final:

$$E_2 = -\frac{GMm}{6R} = -\frac{R}{6}\,mg$$

Trabajo realizado:

$$E_2 - E_1 = Rmg\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\,Rmg =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot 500\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 2{,}6 \cdot 10^9\ \text{J}$$

9. Un cierto planeta esférico tiene una masa M = 1,25 · 1023 kg y un radio r = 1,5 · 106 m. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima de r/2. Despreciando el rozamiento, determina:

***a)* La velocidad con que fue lanzado el objeto.**

***b)* La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado por el objeto.**

Dato: constate de gravitación universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}.

a) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{GM_pm}{R_p} = -\frac{GM_pm}{R_p + h}$$

De donde $v^2 = \dfrac{2\,GM_p}{3\,R_p}$, para $h = \dfrac{R_p}{2}$

$$v^2 = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 1{,}25 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{m}} = 3{,}7 \cdot 10^6\ \text{m}^2$$

$$v = \sqrt{3{,}7 \cdot 10^6}\ \text{m} = 1{,}925 \cdot 10^3\ \text{m}$$

b) $$\frac{4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 1{,}25 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{9 \cdot 1{,}5^2 \cdot 10^{12}\ \text{m}^2} = 1{,}65\ \text{m/s}^2$$

10. Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determina:

***a)* La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.**

***b)* Los valores de ambas energías potencial y cinética.**

La energía potencial viene dada por: $E_p = -\dfrac{GMm}{R}$

Al ser circular la órbita se cumple que la fuerza gravitatoria es igual a la fuerza centrípeta:

$$\frac{GMm}{R_o^2} = \frac{mv^2}{R_o}.$$

De donde

$$E_p = -2\,E_c$$

$$Ec + Ep = -10^{-10}J \qquad E_c - 2E_c = -10^{-10}\ J$$

De donde

$$E_c = 10^{-10}J\ ;\ E_p = -2E_c = -2 \cdot 10^{-10}\ J$$

Periodo de revolución y velocidad orbital

11. El satélite mayor de Saturno, Titán, describe una órbita de radio medio $r = 1{,}222 \cdot 10^6$ km en un periodo de 15,945 días. Determina la masa del planeta Saturno y su densidad. (Radio de Saturno: 58 545 km.)

Igualamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$G\,\frac{Mm}{r^2} = m\,\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

siendo M la masa de Saturno, cuyo valor obtenemos a partir del periodo:

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{GM}{r}}}$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4 \cdot 9{,}86 \cdot (1{,}222 \cdot 10^9\ \text{m})^3}{(15{,}945 \cdot 86\,400\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}} =$$

$$= 5{,}67 \cdot 10^{26}\ \text{kg}$$

Densidad del planeta:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot (5{,}85 \cdot 10^7\ \text{m})^3} = 677\ \text{kg m}^{-3}$$

12. La órbita de Venus, en su recorrido alrededor del Sol, es prácticamente circular. Calcula el trabajo desarrollado por la fuerza de atracción gravitatoria hacia el Sol a lo largo de media órbita. Si esa órbita, en lugar de ser circular, fuese elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

Es cero en ambos casos.

a) Si la órbita es circular, la fuerza conservativa es perpendicular al desplazamiento en todo momento. Por tanto, el trabajo realizado por esta fuerza es cero.

b) Si la órbita es elíptica, el trabajo a lo largo de una órbita completa es cero, porque en un campo conservativo el trabajo a lo largo de una línea cerrada es nulo.

13. Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en el mismo plano, de radios $r_1 = 8\,000$ km y $r_2 = 9\,034$ km, respectivamente. En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado.

***a)* ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?**

***b)* ¿Qué relación existe entre los periodos orbitales de los satélites? ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado 6 vueltas, desde el instante inicial?**

a) Sean m_1, r_1 y v_1 la masa, el radio orbital y la velocidad del satélite S_1, y m_2, r_2 y v_2 las mismas magnitudes del satélite S_2.

De: $$G\frac{M_T m_1}{r_1^2} = m_1\frac{v_1^2}{r_1} \Rightarrow v_1 = \sqrt{G\frac{M_T}{r_1}}$$

Lo mismo para el satélite S_2:

$$v_2 = \sqrt{G\frac{M_T}{r_2}}$$

Relacionando estas velocidades, tenemos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = 1{,}063; \qquad v_1 = 1{,}063\ v_2$$

b) Aplicamos la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3} = 1{,}2; \qquad T_2 = 1{,}2\ T_1$$

En el mismo tiempo que el satélite S_1 emplea en realizar $n_1 = 6$ vueltas, el satélite S_2 habrá realizado $n_2 = 5$ vueltas, como se deduce de:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{t}{n_1} \\ T_2 &= \frac{t}{n_2} \end{aligned}\right\} \quad n_2 = \frac{n_1 T_1}{T_2} = \frac{6\,T_1}{1{,}2\,T_2} = 5$$

14. El periodo de revolución de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su respectiva órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina:

***a)* La razón entre los radios de las respectivas órbitas.**

***b)* La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus órbitas.**

a) De la Tercera Ley de Kepler se deduce la relación entre los radios de las dos órbitas:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5{,}2; \qquad R_1 = 5{,}2\,R_2$$

b) Para hallar la aceleración centrípeta de los dos planetas, igualamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$

De acuerdo con esta igualdad, la aceleración centrípeta de cada planeta es:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GM_s}{R_1^2}; \qquad a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{GM_s}{R_2^2}$$

cuya relación viene dada por:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{5{,}2^2\,R_2^2} = \frac{1}{27} = 0{,}04$$

$$a_1 = 0{,}04\,a_2$$

15. Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averigua:

***a)* La velocidad del satélite.**

***b)* Su energía mecánica.**

Dato: radio medio de la Tierra, $6{,}37 \cdot 10^6$ m.

a) El valor de la gravedad en función de la altura viene dado por:

$$g_h = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}$$

En nuestro caso: $$\frac{1}{2}g_0 = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}$$

de donde: $$R + h = \sqrt{2} \cdot R = 9{,}0 \cdot 10^6\ \text{m}$$

Por otro lado, si la órbita del satélite es circular, se debe cumplir:

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{(R+h)}$$

de donde se obtiene la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{R^2 g}{R+h}} = \sqrt{\frac{(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{9{,}0 \cdot 10^6\ \text{m}}} =$$

$$= 6{,}6 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

b) La energía mecánica es igual a la mitad de la energía potencial:

$$E = -\frac{1}{2}\,\frac{GMm}{(R+h)} = -\frac{1}{2}\,mg\,\frac{R^2}{R+h} =$$

$$= -0{,}5 \cdot 200\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot \frac{6{,}37^2 \cdot 10^{12}\text{ m}^2}{9{,}0 \cdot 10^6\text{ m}} = -4{,}4 \cdot 10^9\text{ J}$$

16. Un cuerpo esférico de densidad uniforme con diámetro 6,0 · 10^5 km presenta una aceleración de la gravedad sobre su superficie de 125 m s^{-2}. Determina:

a) La masa de dicho cuerpo.

b) Si un objeto describe una órbita circular concéntrica con el cuerpo esférico y un periodo de 12 h, ¿cuál será el radio de dicha órbita?

Dato: constante de gravitación universal G = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a) El radio del cuerpo será $R = 1/2\ d = 3,0 \cdot 10^8$ m

De la expresión $g = \frac{GM}{R^2}$ despejamos la masa del cuerpo:

$$m = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{125\text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 9{,}0 \cdot 10^{16}\text{ m}^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}} = 1{,}7 \cdot 10^{29}\text{ kg}$$

b) Al describir la órbita circular el objeto está sometido a una fuerza centrípeta originada por la fuerza gravitatoria:

$$\frac{GMm}{R_o^2} = m\,\frac{v^2}{R_o} \qquad v^2 = \frac{GM}{R_o} = \frac{4\pi^2 R_o^2}{T^2}$$

$$R_o^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{29}\text{ kg} \cdot (12 \cdot 3\,600)^2\text{ s}^2}{4 \cdot 3{,}14^2}$$

$$R_o = 8{,}1 \cdot 10^8\text{ m}$$

17. Un planeta de igual masa que la Tierra describe una órbita circular de radio *r* de un año terrestre de duración alrededor de una estrella de masa *M* tres veces superior a la del Sol.

a) Obtén la relación entre: el radio *r* de la órbita del planeta, su periodo de revolución *T*, la constante de gravitación universal *G* y la masa *M* de la estrella alrededor de la cual orbita.

b) Calcula el cociente entre los radios de las órbitas de este planeta y de la Tierra.

Sea M la masa de la estrella y m la masa del planeta

a) Igualando la fuerza centrípeta en la órbita circular con la fuerza gravitatoria tenemos:

$$G\,\frac{Mm}{R_o^2} = m\,\frac{v^2}{R_o} \Rightarrow V^2 = \frac{Gm}{R_o^2} = \frac{4\pi^2 R_o^2}{T^2}\text{ ; De donde } R_o^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

Esta relación es la expresión matemática de la 3.ª ley de Kepler para órbitas circulares.

b) La 3.ª ley de Kepler también es válida para la Tierra:

Planeta : $R^3 = G\,\frac{3M_s \cdot T_p^2}{4\pi^2}$; Tierra : $R_o^3 = G\,\frac{M_s \cdot T_T^2}{4\pi^2}$ siendo $T_p = T_T$

De donde se obtiene:

$$\frac{R^3}{R_o^3} = 3 \Rightarrow \text{R} = \sqrt[3]{3}\,R_o$$

18. Un planeta esférico tiene una densidad uniforme ρ = 1,33 g cm^{-3} y un radio de 71 500 km. Determina:

a) El valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

b) La velocidad de un satélite que orbita alrededor del planeta en una órbita circular con un periodo de 73 h.

Dato: constante de gravitación universal *G* = 6,67 · 10^{-11} N m2 kg^{-2}.

a) La aceleración de la gravedad viene dada por:

$$g = G\,\frac{M}{R^2} = G\,\frac{V\rho}{R^2} = G\,\frac{4/3 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho GR = 26{,}57\text{ m/s}^2$$

b) De la igualdad $G\,\frac{Mm}{R_o^2} = m\,\frac{v^2}{R_o}$ y de $V = \frac{2\pi R_o}{T}$ obtenemos la expresión matemática de la 3.ª ley de Kepler para órbitas circulares:

$$R_o^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} = \frac{g_p \cdot R_p^2 \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$R_o = \sqrt[3]{\frac{26{,}57\text{ m/s}^2 \cdot (715 \cdot 10^5)^2\text{ m}^2 \cdot (73 \cdot 3\,600)^2\text{s}^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 6{,}19 \cdot 10^8\text{ m}$$

$$v = \frac{2\pi R_o}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}19 \cdot 10^8\text{ m}}{73 \cdot 3\,600\text{ s}} = 1{,}48 \cdot 10^5\text{ m/s}$$

19. Una nave espacial de 800 kg de masa realiza una órbita circular de 6 000 km de radio alrededor de un planeta. Sabiendo que la energía mecánica de la nave es E_m = –3,27 · 108 J, determina:

a) La masa del planeta.

b) La velocidad angular de la nave en su órbita.

Dato: constante *G* = 6,67 · 10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

a) Al ser la órbita circular se cumple $E_p = -\frac{GMm}{R} = 2E_m$

Por tanto,

$$M = \frac{2E_m R}{-Gm} = \frac{2 \cdot (-3{,}27 \cdot 10^8\text{ J}) \cdot 6 \cdot 10^6\text{ m}}{-6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 800\text{ kg}} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\text{ kg}$$

b) La velocidad se puede calcular a partir del dato E_m, teniendo en cuenta que se cumple:

$$E_p = 2E_m = -E_c \Rightarrow E_c = -2E_m = -2(-3{,}27 \cdot 10^8\text{ J}) = 6{,}54 \cdot 10^8\text{ J ;}$$

De $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ tenemos

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{\text{m}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}54 \cdot 10^8\ J}{800\text{ kg}}} = 1\,278{,}67\text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1\,278{,}67\text{ m/s}}{6 \cdot 10^6\text{ m/rad}} = 2{,}13 \cdot 10^{-4}\text{ rad/s}$$

Velocidad de escape. Cambio de órbita

20. La nave espacial *Apolo VIII* estuvo en órbita circular alrededor de la Luna 113 km por encima de su superficie.

Calcula:

a) **El periodo de movimiento.**

b) **Las velocidades lineal y angular de la nave.**

c) **La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.**

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg². Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; Radio de la Luna, $R_L = 1\,740$ km.

a) y *b)* La velocidad lineal de la nave en función de la altura viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1\,740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3)\ \text{m}}} = 1\,630\ \text{m/s}$$

La velocidad angular ω es:

$$\omega = \frac{v}{R_L + h} = \frac{1{,}627 \cdot 10^3\ \text{m/s}}{1{,}853 \cdot 10^3\ \text{m}} = 8{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m/s}$$

El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi\,(R + h)}{v} = \frac{2\,\pi \cdot (1\,740 \cdot 10^3 + 133 \cdot 10^3)\ \text{m}}{1\,630\ \text{m/s}} = 7\,219\ \text{s}$$

c) La expresión de la velocidad de escape a la altura a la que se encuentra el *Apolo VIII* se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{1{,}853 \cdot 10^6}} = 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

21. Dos planetas, A y B, tienen el mismo radio. La aceleración gravitatoria en la superficie del planeta A es tres veces superior a la aceleración gravitatoria en la superficie del planeta B.

Calcula:

a) **La relación entre las densidades de los dos planetas.**

b) **La velocidad de escape desde la superficie del planeta B si se sabe que la velocidad de escape desde la superficie del planeta A es de 2 km/s.**

a) Partimos de la relación gravitatoria que indica el enunciado

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{GM_A/R_A^2}{GM_B/R_B^2} = \frac{M_A}{M_B} = 3$$

ya que $R_A = R_B$.

De la igualdad de los radios se deduce que los planetas tienen el mismo volumen:

$$V_A = V_B = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{M_A}{M_B} = \frac{V_A\rho_A}{V_B\rho_B} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = 3$$

b) La energía mecánica en el punto de lanzamiento es igual a la energía mecánica en el infinito.

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

de donde se deduce la velocidad de escape:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

para cualquier planeta.

Para el planeta A:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow \frac{v_{eA}}{v_{eB}}\sqrt{\frac{M_A}{M_B}} = \sqrt{3}$$

$$v_{eB} = v_{eA}\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\,000\sqrt{\frac{1}{3}} = 1\,155\ \text{m/s}$$

Para el planeta B:

$$v_{eB} = \sqrt{\frac{2GM_B}{R_B}}$$

22. El planeta A tiene tres veces más masa que el planeta B y cuatro veces su radio. Obtén:

a) **La relación entre las velocidades de escape desde las superficies de ambos planetas.**

b) **La relación entre las aceleraciones gravitatorias en las superficies de ambos planetas.**

a) $\dfrac{v_{eA}}{v_{eB}} = \sqrt{\dfrac{M_A R_B}{M_B R_A}} = \sqrt{\dfrac{3M_B R_B}{M_B 4R_B}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

b) De $g_A = \dfrac{GM_A}{R_A^2}$ y de $g_B = \dfrac{GM_B}{R_B^2}$ obtenemos la relación:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{M_A R_B^2}{M_B R_A^2} = \frac{3M_B R_B^2}{M_B \cdot 16R_B^2} = \frac{3}{16}$$

23. Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular de radio 5/2 r_T alrededor de la Tierra. Determina:

a) **El trabajo que hay que realizar para llevar el satélite desde la órbita de radio 5/2 r_T a otra órbita circular de radio 5 r_T y mantenerlo en dicha órbita.**

b) **El periodo de rotación del satélite en la órbita de radio 5 r_T.**

Datos: constante de gravitación universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; masa de la Tierra, MT = 5,98 · 10^{24} kg; radio de la Tierra, r_T = 6,37 · 106 m.

a) El trabajo realizado es igual a la variación de la energía mecánica entre ambas órbitas.

$$W_{A-B} = E_{mB} - E_{mA} = -\frac{GMm}{2R_B} + \frac{GMm}{2R_A} = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right) = \frac{GMm}{10R_T} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 400\ \text{kg}}{10 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\text{m}R_A} = 2{,}5 \cdot 10^9\ \text{J}$$

b) Al ser la órbita circular se cumple:

$$F_g = F_c \Rightarrow -\frac{GMm}{R_o^2} = \frac{mv^2}{R_o}\ ;\ \frac{(2\pi R_o)^2}{T^2} = \frac{GM}{R_o} \Rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_o^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (5 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} =$$

$$= 5{,}68 \cdot 10^4\ \text{s} = 16\ \text{h}$$