MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA JULIO 2023

Ejercicio 1.
(Álgebra)

a) Obtener todas las ecuaciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$

b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x=5, y=-2, z=-2$ sea solución del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$$

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única?

Solución:

a) $\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{matrix}\right\}$ $llamamos\ z=\lambda \Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} x+y=1-\lambda \\ x+2y=3+\lambda \end{matrix}\right\} F_2-F_1$ $\left.\begin{matrix} x+y=1-\lambda \\ y=2+2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$x=1-\lambda-2-2\lambda=-1-3\lambda$$

Tendrá infinitas soluciones dependientes de parámetro λ que serán:
$x=-1-3\lambda$, $y=2+2\lambda$ y $z=\lambda$

b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$ sustituimos las soluciones x=5, y=-2 y z=-2 y obtenemos:

$$\left.\begin{matrix} 5-2-2=1 \\ 5-4+2=3 \\ 5a-4a-2b=b \end{matrix}\right\} con\ la\ última\ ecaución\ tenemos\ a=3b\ y\ así\ el\ sistema\ quedará:$$

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ 3bx+6by+bz=b \end{matrix}\right\}$$

Formamos la matriz y la matriz ampliada:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3b & 6b & b \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3b & 6b & b & b \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de la matriz A y lo igualamos a 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3b & 6b & b \end{vmatrix}=2b-3b+6b-6b-b+6b=4b=0 \Rightarrow b=0$$

Con el valor de b obtenido, estudiamos el sistema.

- $b=0$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango A:

$|A| = 0 \Rightarrow buscamos\ un\ menor\ de\ orden\ inferior \neq 0. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rango\ A = 2$

Rango A*:

Cualquier menor de orden 3 es 0 puesto que tendrán una fila con ceros.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rango\ A^* = 2$$

$$Como\ rangoA = rangoA^*$$

$$según\ teorema\ de\ Rouché\ Fröbeius\ tenemos\ SISTEMA\ COMPATIBLE\ INDETERMINADO$$
$$(infinitas\ soluciones)$$

- $b \neq 0$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow RangoA = RangoA^* = 3 = nº\ de\ incógnitas,$$
$$estamos\ ante\ un\ SISTEMA\ COMPATIBLE\ DETERMINADO$$
$$(solución\ única)$$

Ejercicio 2.
(Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

a) Calcular la matriz C, siendo c_{11}=2, tal que AC=B.
b) Si D=B^t A siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa.

Solución:

a) Para que dos matrices puedan multiplicarse el número de columnas de la primera tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

$$\underset{3x2}{A} \cdot \underset{2x2}{C} = \underset{3x2}{B}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Realizando el producto de matrices tenemos:

$$2 + z = 3 \Rightarrow z = 1$$
$$y + t = -1$$
$$az = a$$
$$at = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$2 + z = 3$$
$$y + t = -1 \Rightarrow y + 0 = -1 \Rightarrow y = -1$$

Con estos resultados tenemos: $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

b) $D = B^t \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 + a^2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\exists\ D^{-1} \Leftrightarrow |D| \neq 0$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 6 & 6 + a^2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -12 - (-12 - 2a^2) = 2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Por lo tanto, si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ la matriz D posee inversa.

Ejercicio 3.
(Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1.
b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1y r_2 y que contiene al punto (1,0,0).

Solución:

a) Si queremos que $\alpha \begin{cases} sea\ perpendicular\ a\ r_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{v_{r_2}} \\ contenga\ a\ r_1 \end{cases}$, entonces tiene que cumplirse que $\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{v_{r_1}} = 0$

$$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{v_{r_1}} = (3,2,2) \cdot (1,2,1) = 3 + 4 + 2 \neq 0$$

Con esto concluimos que **no existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1.**

b) Llamaremos s a la recta que nos piden.

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_{r_1}} \times \overrightarrow{v_{r_1}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i + j - 4k \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2,1,-4)$$

Para obtener la ecuación de la recta s necesitamos un punto P(1,0,0) y un vector que será (2,1,-4). En este caso expresaremos la recta en forma continua:

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-4}}$$

Ejercicio 4.
(Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos (1,0,-1) y (0,1,1),

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto P=(0,0,1).
b) Calcular la distancia de la recta r al punto P=(0,0,1).

Solución:

a) Para determinar un plano necesitamos 2 vectores y un punto.

En este caso como la recta r pasa por $P_1 = (1,0,-1)\ y\ P_2 = (0,1,1)$ para obtener el plano necesitamos dos vectores y un punto:

$$\alpha \begin{cases} \overrightarrow{P_1P} = (-1,0,2) \\ \overrightarrow{P_2P} = (0,-1,0) \\ P = (0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x + z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha \equiv 2x + z - 1 = 0}$$

b) Para obtener la distancia de un punto a una recta formaremos el plano $\pi \perp r$ y que pase por P.

Como $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{P_2P_1} = \overrightarrow{n_\pi} = (-1,1,2)$ y el plano tiene que pasar por P=(0,0,1), obtenemos la ecuación de dicho plano:

$\pi \equiv -x + y + 2z + D = 0$

$\Rightarrow sustituimos\ el\ punto\ P\ para\ obtener\ D\ y\ ya\ tenemos\ la\ ecuación\ del\ plano.$

$\pi \equiv 0 + 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow\ \pi \equiv -x + y + 2z - 2 = 0$

Hallaremos un punto Q que será la intersección de r con π.

$r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$, sustituimos en el plano$\Rightarrow -1+\lambda+\lambda-2+4\lambda-2=0 \Rightarrow$
$\lambda = {}^{5}/_{6}$

Con este valor de λ, sustituimos en la recta y tenemos el punto $Q = (\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3})$

La distancia de P a Q será la distancia de P a r, que el valor pedido en el problema.

$$\boldsymbol{d(P\ a\ r)} = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \boldsymbol{0{,}9128\ u}$$

,Ejercicio 5.

(Análisis)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si\ x < 1 \\ \ln(x) & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en x=1.
b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales.

Solución:

a) Primero estudiaremos la continuidad en x=1.
$\lim\limits_{x\to 1^+} lnx = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{2-x} = 1$, $f(1) = ln1 = 0$ Como estos tres valores no coinciden, la función **no será continua en x=1**. **Tampoco será derivable** en x=1 puesto que para ello tiene que ser continua.

b) Como $Dom = \mathbb{R}$, no existen asíntotas verticales.
Para calcular las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} lnx = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+x} = 0$$

Por tanto **y=0 es asíntota horizontal cuando $\boldsymbol{x} \to -\infty$**

Ejercicio 6.

(Análisis)

Dada la función $f(x) = x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

Solución:

$Dom = \mathbb{R}$ por tratarse de un polinomio.

Puntos de corte con los ejes:

- Eje x: $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow los\ puntos\ serán\ (0{,}0) y\ (-3{,}0).$
- Eje y: $x = 0 \Rightarrow (0{,}0)$

Crecimiento y decrecimiento lo estudiaremos con la primera derivada.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Signo f'

$-\infty$		-2		0		$+\infty$
	+		-		+	
	↗		↘		↗	

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decrece en $(-2{,}0)$

Con ello concluimos que tiene un máximo relativo en x=-2 y un mínimo relativo en x=0. Siendo las coordenadas del máximo (-2, 4) y las del mínimo (0,0).

Ejercicio 7.
(Análisis)

Calcular

a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x^2)}{x^3+4x^2}$

b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)cos^3(x)dx$$

(2 puntos)
Solución:

a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x^2)}{x^3 + 4x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como tenemos indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$ aplicaremos la regla de L'Hopital derivando numerador y denominador por separado tantas veces como sea necesario hasta quitar la indeterminación.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{3x^2 + 8x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{x \cdot (3x+8)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) \cdot 2}{(3x+8)} = \frac{2}{8} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)cos^3(x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 dt = -\frac{t^4}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{cos^4(x)}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

$\cos(x) = t$

$-sen(x)dx = dt$

Ejercicio 8.
(Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1,0]$ sólo se cortan para x=-1 y x=0.
Demostrar que en $[-1,0]$ $g(x) \geq f(x)$

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones.

Solución:

a) Para comprobar donde se cortan las gráficas:

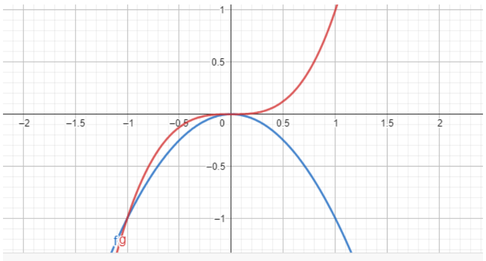
$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 = x^3 \Rightarrow x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Para demostrar que $g(x) \geq f(x)\ en\ [-1,0]$, daremos un valor en ese intervalo (p. ej x=-0,5) y sustituimos en ambas funciones.

$$f(-0{,}5) = -0{,}25 \qquad g(-0{,}5) = -0{,}125$$

Comprobamos que $g(x) \geq f(x)\ en\ [-1,0]$

b)



Área=

$$\int_{-1}^{0} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3 + x^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$$
$$= \mathbf{0,083\ u^2}$$

<u>Ejercicio 9.</u>
(Probabilidad y estadística)
Sean A,B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades P(A)= 0,3, P(B)= 0,4 y P(C)= 0,5 tales que Ay B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A \cap B), P(A \cap C), P(A \cap \bar{C}), P(A \cup B) y\, P(\bar{A} \cup \bar{B})$ siendo $\bar{A}, \bar{B}\ y\ \bar{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente.

Solución:

$P(A) = 0{,}3$
$P(B) = 0{,}4$
$P(C) = 0{,}5$
$A\ y\ B\ independientes \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = \mathbf{0,12}$
$A\ y\ C\ incompatibles \Rightarrow P(A \cap C) = \mathbf{0}$
$P(A \cap \bar{C}) \Rightarrow P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap \bar{C}) \Rightarrow P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) = P(A) = \mathbf{0,3}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = \mathbf{0,58}$
$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - \big(1 - P(A \cup B)\big)$
$= 0{,}7 + 0{,}6 - (1 - 0{,}58) = \mathbf{0,88}$

<u>Ejercicio 10.</u>
(Probabilidad y estadística)
De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.

a) Indicar las seis probabilidades que aparecen en el enunciado.
b) Si se selecciona una de las camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse?
c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3?

Solución:

Definimos los sucesos:
$Marca\ C_1$
$Marca\ C_2$
$Marca\ C_3$
$Averiado: A$

a)

$$P(C_1) = 0{,}45;\ P(C_2) = 0{,}3;\ P(C_3) = 0{,}25;$$
$$P\left({}^{A}/_{C_1}\right) = 0{,}02;\ P\left({}^{A}/_{C_2}\right) = 0{,}05\ \ P\left({}^{A}/_{C_3}\right) = 0{,}04$$

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(C_1 \cap A) + P(C_2 \cap A) + P(C_3 \cap A)$$
$$= P(C_1) \cdot P\left({}^{A}/_{C_1}\right) + P(C_2) \cdot P\left({}^{A}/_{C_2}\right) + P(C_3) \cdot P\left({}^{A}/_{C_3}\right)$$
$$= 0{,}45 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}04 = \mathbf{0{,}034}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left({}^{C_3}/_{A}\right) = \frac{P(C_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C_3) \cdot P\left({}^{A}/_{C_3}\right)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}04}{0{,}034} = \mathbf{0{,}294}$$